Lektion 8, Envariabelanalys den 2 november 1999

4.2.6 Bestäm om funktionen $f(x) = x^2 - 1$, definierad i intervallet $(2, 3)$, har några lokala eller globala extremvärden, och finn i sådant fall dessa.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Kritiska punkter är de punkter där derivatan är noll,

   $$f'(x) \equiv 2x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.$$

   Eftersom $x = 0$ inte tillhör definitionsmängden finns inga kritiska punkter.
2. Derivatan f' är definierad i hela intervallet $(2, 3)$, och därför finns inga punkter där f inte är deriverbar.
3. Ändpunkterna 2 och 3 tillhör inte intervallet.

Alltså finns inga punkter där ett eventuellt lokalt extremvärde skulle kunna antas. Lokala extremvärden saknas!

Eftersom det inte finns några lokala extremvärden finns heller inga globala extremvärden.

4.2.14 Bestäm om funktionen $f(x) = |x^2 - x - 2|$, definierad i intervallet $[-3, 3]$, har några lokala eller globala extremvärde, och bestäm dessa.

De punkter som är aktuella som lokala eller globala extrempunkter är

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att

   $$f'(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - x - 2) \cdot (2x - 1).$$

   Den första faktorn är aldrig noll, medan den andra faktorn är noll i $x = 1/2$. Derivatan är noll i $x = 1/2$.
2. Beloppsfunktionen är deriverbar överallt utom i punkter där dess argument är noll, d.v.s. utom i punkter där

   $$x^2 - x - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -1 \quad \text{eller} \quad x = 2.$$
3. Ändpunkterna $x = -3$ och $x = 3$ tillhör intervallet.

De punkter som är kandidater till att vara extrempunkter är alltså

$$-3, \quad -1, \quad 1/2, \quad 2 \quad \text{och} \quad 3.$$

För att bestämma om dessa punkter är lokala max-, min- eller terasspunkter undersöker vi hur derivatans tecken varierar i intervallet.

$x =$	-3		-1		$1/2$		2		3
$\operatorname{sgn}(x^2 - x - 2)$	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$	$+$
$2x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	$+$
$f(x)$	10	$\searrow$	0	$\nearrow$	$9/4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Ur tabellen kan vi avläsa svaren.

Lokalt min:	0	i $x = -1$ och $x = 2$.
Lokalt max:	9/4	i $x = 1/2$,
	4	i $x = 3$,
	10	i $x = -3$.
Globalt min:	0	i $x = -1$ och $x = 2$.
Globalt max:	10	i $x = -3$.

KTH KS 99 Låt

$$f(x) = \begin{cases} 16x - x^2 & \text{för} \quad 0 \le x \le 4, \\ -6x - x^2 & \text{för} \ -6 \le x < 0. \end{cases}$$

Bestäm största och minsta värdet av f på intervallet $-6 \le x \le 4$.

Eftersom intervallet är slutet och funktionen är kontinuerlig har funktionen f ett största och minsta värde, och dessa är dessutom lokala extremvärden.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är definierad,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Derivatan av f är

$$f'(x) = \begin{cases} 16 - 2x & \text{för} \quad 0 < x < 4, \\ -6 - 2x & \text{för} \ -6 < x < 0. \end{cases}$$

   Uttrycket $16 - 2x$ är noll då $x = 8$, som ligger utanför intervallet $(0,4)$.
   Uttrycket $-6 - 2x$ är noll då $x = -3$.
   Alltså är $x = -3$ en kritisk punkt.

2. Funktionen f ges av polynomuttryck varför f är deriverbar i de öppna delintervallen. I fogen $x = 0$ mellan uttrycken har vi att

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-6 - 2x) = -6,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (16 - 2x) = 16.$$

   Eftersom $f'_+(0) \ne f'_-(0)$ är f inte deriverbar i $x = 0$.

3. Ändpunkterna är -6 och 4.

För att bestämma om dessa punkter är lokala max-, min- eller terasspunkter undersöker vi hur derivatans tecken varierar i intervallen.

$x =$	-6		-3		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	48

Ur tabellen kan vi avläsa svaret.

Största värde: 48 i $x = 4$,
Minsta värde: 0 i $x = -6$ och $x = 0$.

4.2.26 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen f.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritisk punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att

$$f'(x) \equiv \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1.$$

2. Derivatan f' är definierad överallt.
3. Eftersom f är definierad på hela tallinjen saknas ändliga ändpunkter.

De enda möjliga kandidaterna är $x = -1$ och $x = +1$.

För att klassificera dessa punkter undersöker vi hur derivatans tecken varierar i intervallet.

$x =$		-1		$+1$	
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$

Ur tabellen kan vi avläsa att

$$\begin{array}{lll} \text{lokalt min:} & -\frac{1}{2} & \text{i punkten } x=-1, \\ \text{lokalt max:} & \frac{1}{2} & \text{i punkten } x=+1. \end{array}$$

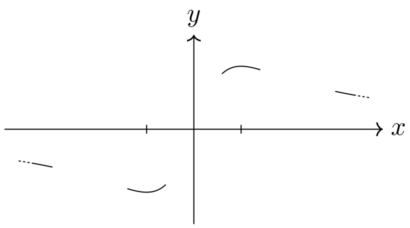
För att kunna avgöra om dessa punkter även är globala extrempunkter måste vi undersöka gränsvärdena

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

Vi ser därmed att

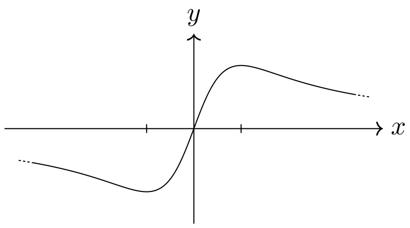
$$\begin{array}{lll} \text{globalt min:} & -\frac{1}{2} & \text{i punkten } x=-1, \\ \text{globalt max:} & \frac{1}{2} & \text{i punkten } x=+1. \end{array}$$

Vi ritar in extrempunkterna och att funktionen går mot 0 då $x \to \pm\infty$.



Vi vet från teckenstudiet av f' att f är avtagande för $x < -1$, växande för $-1 < x < 1$ och avtagande för $1 < x$. Det är därför bara att fylla i mellanrummen ovan.

En viktig detalj att notera är att funktionen är udda $\big(f(-x) = -f(x)\big)$ och därför anti-symmetrisk kring y-axeln.



4.2.30 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = x + \sin x$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att
$$f'(x) \equiv 1 + \cos x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = (2n+1)\pi \quad \text{för alla heltal } n.$$
2. Derivatan f' är definierad överallt.
3. Ändliga ändpunkter saknas.

Eftersom $\cos x > -1$ för alla $x \neq (2n+1)\pi$ är

$$f'(x) > 0 \qquad \text{för alla } x \neq (2n+1)\pi,$$

och punkterna $\{(2n+1)\pi\}$ är terasspunkter.

$$\begin{array}{ll} \text{lokalt min:} & \text{saknas} \\ \text{lokalt max:} & \text{saknas} \end{array}$$

Eftersom det saknas lokala extremvärden och definitionsmängden är obegränsad, så saknas globala extremvärden.

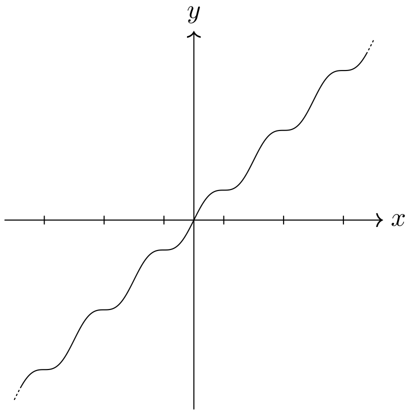
$$\begin{array}{ll} \text{globalt min:} & \text{saknas} \\ \text{globalt max:} & \text{saknas} \end{array}$$

Eftersom sinus-funktionen är 2π-periodisk är

$$f(x+2\pi) = x + 2\pi + \sin(x+2\pi) = x + 2\pi + \sin x = f(x) + 2\pi.$$

Detta samband betyder att grafen till f har exakt samma utseende på intervallen $\big((2n-1)\pi, (2n+1)\pi\big)$ men olika höjd.

Funktionen är växande och har terasspunkter i $\{(2n+1)\pi\}$.



4.2.32 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = x - 2\arctan x$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att

$$f'(x) \equiv 1 - \frac{2}{1+x^2} \equiv \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1.$$

2. Derivatan f' är definierad överallt.
3. Ändliga ändpunkter saknas.

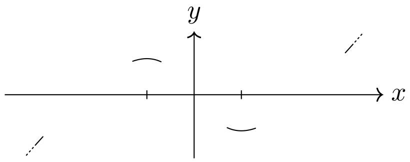
Vi bestämmer punkternas karaktär genom att studera derivatans tecken i olika intervall. Vi tar också med gränsvärdena då $x \to \pm\infty$ eftersom dessa behövs när vi ska bestämma globala extremvärden.

$x =$	$-\infty$		-1		$+1$		∞
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+1		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1+2\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$1-2\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	∞

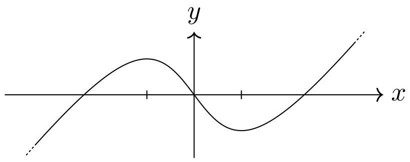
Ur tabellen kan vi avläsa extrempunkterna och deras typ.

Lokalt min:	$1-\frac{\pi}{2}$	i punkten $x = 1$.
Lokalt max:	$\frac{\pi}{2}-1$	i punkten $x = -1$.
Globalt min:	saknas.	
Globalt max:	saknas.	

Vi ritar in extrempunkterna. Eftersom vi vet funktionens lokala beteende kring dessa punkter och dess beteende då $x \to \pm\infty$ får vi figuren



Sedan återstår bara att fylla i mellanrummen där funktionen är monoton. Funktionen är dessutom udda.



4.2.36 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att

$$\begin{aligned} f'(x) &\equiv 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot (-2x)e^{-x^2} \equiv 2x(1-x^2)e^{-x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \quad \text{eller} \quad x = \pm 1. \end{aligned}$$

2. Derivatan f' är definierad överallt.
3. Ändliga ändpunkter saknas.

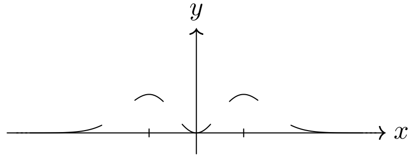
Vi bestämmer punkternas karaktär genom att studera derivatans tecken i olika intervall.

$x =$	$-\infty$		-1		0		$+1$		∞
$2x$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
e^{-x^2}		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

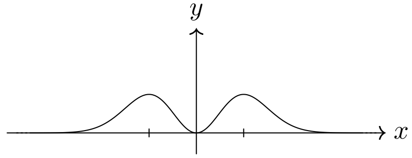
Ur tabellen kan vi avläsa extrempunkterna och deras typ.

Lokalt min:	0	i punkten $x = 0$.
Lokalt max:	e^{-1}	i punkterna $x = -1$ och $x = 1$.
Globalt min:	0	i punkten $x = 0$.
Globalt max:	e^{-1}	i punkterna $x = -1$ och $x = 1$.

Vi ritar in extrempunkterna. Eftersom vi vet funktionens lokala beteende kring dessa punkter och dess beteende då $x \to \pm\infty$ får vi figuren



Sedan återstår bara att fylla i mellanrummen där funktionen är monoton. Funktionen är dessutom jämn, d.v.s. symmetrisk kring y-axeln.



4.2.42 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = (x-1)^{2/3} - (x+1)^{2/3}$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att

$$\begin{aligned} f'(x) &\equiv \tfrac{2}{3}(x-1)^{-1/3} - \tfrac{2}{3}(x+1)^{-1/3} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)^{-1/3} = (x+1)^{-1/3}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Eftersom funktionen $x \mapsto x^{-1/3}$ är monoton kan inte $(*)$ ha någon lösning.

2. Funktionen $x \mapsto x^{2/3}$ är deriverbar utom i $x = 0$. Därför är funktionen f deriverbar utom i $x = -1$ och $x = 1$.

3. Ändliga ändpunkter saknas.

Precis som tidigare ska vi nu göra en tabell över derivatans tecken. Vi får dock lite problem med gränsvärdena $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ som kräver en liten extra insats för att bestämmas.

Det ena gränsvärdet som vi ska beräkna är

$$\lim_{x\to\infty} \Big[(x-1)^{2/3} - (x+1)^{2/3}\Big].$$

Eftersom termerna i differensen har exponent $2/3$ är det ingen mening att använda det vanliga tricket med konjugatförlängning; vi skulle bara få en differens mellan termer med exponent $4/3$. Istället använder vi formeln

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad \Leftrightarrow \qquad a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

för att få bort tredjedelen från exponenterna. Vi får att gränsvärdet blir

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{(x-1)^{4/3}+(x-1)^{2/3}(x+1)^{2/3}+(x+1)^{4/3}} \\
&\quad = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{x^{4/3}\Big[\big(1-\frac{1}{x}\big)^{4/3}+\big(1-\frac{1}{x}\big)^{2/3}\big(1+\frac{1}{x}\big)^{2/3}+\big(1+\frac{1}{x}\big)^{4/3}\Big]} \\
&\quad = \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{x^{1/3}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{[\ \cdots\ ]} = 0 \cdot \tfrac{1}{3} = 0.
\end{aligned}$$

På samma sätt fås att

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

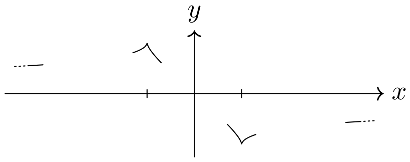
Tabellen över derivatans tecken blir

$x =$	$-\infty$		-1		$+1$		∞
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	$-2^{2/3}$	$\nearrow$	0

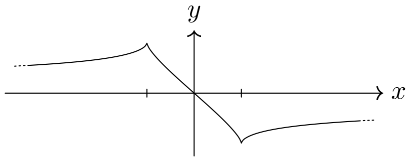
Ur tabellen kan vi avläsa extrempunkterna och deras karaktär.

Lokalt min:	$-2^{2/3}$	i punkten $x = 1$.
Lokalt max:	$+2^{2/3}$	i punkten $x = -1$.
Globalt min:	$-2^{2/3}$	i punkten $x = 1$.
Globalt max:	$+2^{2/3}$	i punkten $x = -1$.

Funktionen $x \mapsto x^{2/3}$ har en neråtvänd spets i $x = 0$. Därför har $f(x)$ ”spetsar” vid $x = -1$ och $x = 1$.



Det återstår bara att fylla i mellanrummen där funktionen är monoton. Funktionen är också udda.



4.2.44 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = x - x^{1/3}$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,

2. punkter där funktionen inte är deriverbar,

3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att

$$f'(x) \equiv 1 - \tfrac{1}{3}x^{-2/3} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\tfrac{1}{3\sqrt{3}}.$$

2. Derivatan f' är odefinierad i $x = 0$.
3. Ändliga ändpunkter saknas.

För att bestämma gränsvärdena $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ använder vi samma algebraiska trick som i uppgift 4.2.42.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 + x^{4/3} + x^{2/3}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - x^{-1}}{1 + x^{-2/3} + x^{-4/3}} = \pm\infty.\end{aligned}$$

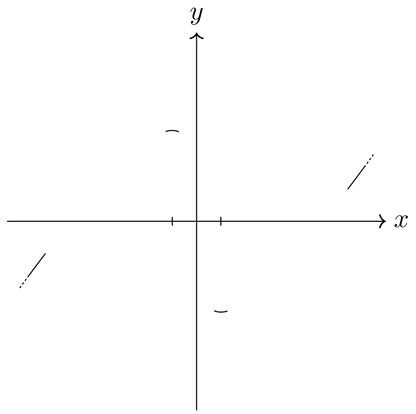
Vi bestämmer punkternas karaktär genom att studera derivatans tecken i olika intervall.

$x =$	$-\infty$		$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{3\sqrt{3}}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	∞

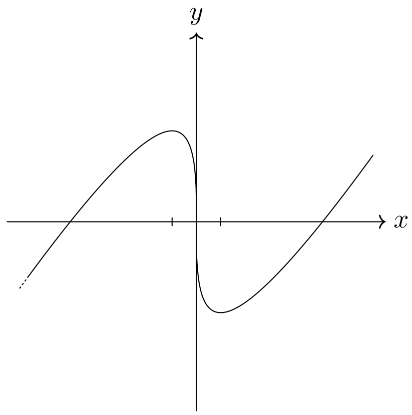
Ur tabellen kan vi avläsa extrempunkterna och deras typ.

Lokalt min:	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	i punkten $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.
Lokalt max:	$+\frac{2}{3\sqrt{3}}$	i punkten $x = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$.
Globalt min:	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	i punkten $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.
Globalt max:	$+\frac{2}{3\sqrt{3}}$	i punkten $x = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Vi ritar in extrempunkterna. Eftersom vi vet funktionens lokala beteende kring dessa punkter och dess beteende då $x \to \pm\infty$ får vi figuren



Sedan återstår bara att fylla i mellanrummen. I punkten $x = 0$ har funktionen en lodrät tangent. Dessutom är funktionen udda.



4.3.26 Klassificera de kritiska punkterna till

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}$$

genom att använda andraderivatan.

De kritiska punkterna ges av

$$f'(x) \equiv 1 - \frac{8}{x^3} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2.$$

Vi har att $f''(x) = \dfrac{24}{x^4} > 0$ för alla x, varför $x = 2$ är en lokal minimipunkt.

4.3.28 Klassificera de kritiska punkterna till

$$f(x) = \frac{x}{2^x}$$

genom att använda andraderivatan.

De kritiska punkterna ges av

$$f'(x) \equiv \frac{1 \cdot 2^x - x \cdot 2^x \log 2}{2^{2x}} \equiv \frac{1 - x \log 2}{2^x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{\log 2}.$$

Vi har

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\log 2 \cdot 2^x - (1 - x \log 2) \cdot 2^x \log 2}{2^{2x}} \\ f''(2) &= -\frac{\log 2}{2^{1/\log 2}} < 0 \end{aligned}$$

vilket betyder att $x = 2$ är en lokal maximipunkt.

4.3.32 Klassificera de kritiska punkterna till

$$f(x) = (x^2 - 4)^2$$

genom att använda andraderivatan.

De kritiska punkterna ges av

$$f'(x) \equiv 2(x^2 - 4) \cdot 2x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -2, \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 2.$$

Vi har att $f''(x) = 12x^2 - 16$ varför

$$\begin{aligned} f''(-2) &= 24 - 16 = 8 > 0 && \Rightarrow && \text{lokal minimipunkt,} \\ f''(0) &= -16 < 0 && \Rightarrow && \text{lokal maximipunkt,} \\ f''(+2) &= 24 - 16 = 8 > 0 && \Rightarrow && \text{lokal minimipunkt.} \end{aligned}$$