Lektion 2, Envariabelanalys den 15 september 1999

1.4.8 Var i definitionsmängden är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{om } x < -1 \\ x^2 & \text{om } x \geq -1 \end{cases}$$

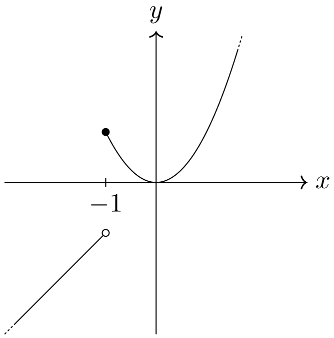
kontinuerlig, vänster- och högerkontinuerlig, och diskontinuerlig?

Funktionerna $x \mapsto x$ och $x \mapsto x^2$ är kontinuerliga överallt där de är definierade, varför den enda möjliga diskontinuitetspunkten är $x = -1$. I punkten $x = -1$ har vi att

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} x = -1, \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} x^2 = 1. \end{aligned}$$

Alltså har vi att f är

kontinuerlig	överallt utom i $x = -1$,
högerkontinuerlig	överallt,
vänsterkontinuerlig	överallt utom i $x = -1$,
diskontinuerlig	i $x = -1$.



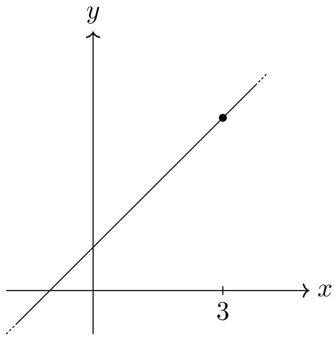
1.4.18 Finn m så att

$$g(x) = \begin{cases} x - m & \text{om } x < 3 \\ 1 - mx & \text{om } x \geq 3 \end{cases}$$

är kontinuerlig för alla x.

Funktionerna $x \mapsto x - m$ och $x \mapsto 1 - mx$ är kontinuerliga överallt där de är definierade. Den enda möjliga diskontinuitetspunkten är i fogen $x = 3$. Vi ska välja m så att g blir kontinuerlig även i punkten $x = 3$. Vi har

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} g(x) &= \lim_{x \to 3^-} (x - m) = 3 - m \\ \lim_{x \to 3^+} g(x) &= \lim_{x \to 3^+} (1 - mx) = 1 - 3m \end{aligned}$$



och för att g ska vara kontinuerlig måste

$$3 - m = 1 - 3m \quad \Leftrightarrow \quad m = -1.$$

SU 17 aug 87 Beräkna $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}$.

Både täljare och nämnare går mot 0 då $x \to \pi/2$. Vi förlänger med $1 + \sin x$ och använder trigonometriska formler

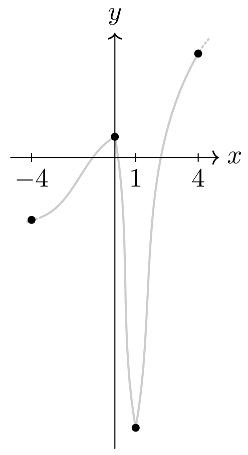
$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} &= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} \frac{1}{\sin x + 1} \\ &= \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\cos^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{\sin x + 1} = \frac{-1}{\lim_{x \to \pi/2} \sin x + 1} = -1/2. \end{aligned}$$

I den sista likheten har vi använt att sinus är kontinuerlig.

1.4.30 Visa att ekvationen $x^3 - 15x + 1 = 0$ har tre rötter i intervallet $[-4, 4]$.

Sätt $f(x) = x^3 - 15x + 1$. Vi har att

$$\begin{aligned} f(-4) &= -3, \\ f(0) &= +1, \\ f(1) &= -13, \\ f(4) &= +5. \end{aligned}$$



Satsen om mellanliggande värden ger att det finns åtminstone en rot i vart och ett av intervallen

$$[-4, 0], \ [0, 1] \text{ och } [1, 4],$$

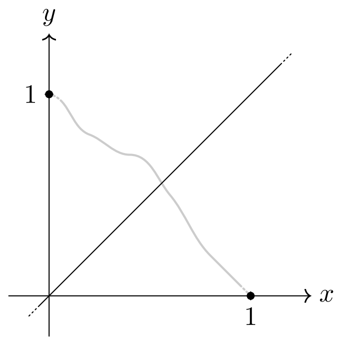
d.v.s. åtminstone tre rötter i intervallet $[-4, 4]$.

Anm. Algebrans fundamentalsats ger att det finns exakt tre rötter till ekvationen (se linjär algebra).

SU 10 jan 89 Låt f vara en kontinuerlig funktion i intervallet $[0, 1]$ sådan att $f(0) = 1$ och $f(1) = 0$. Visa att det finns ett $x \in [0, 1]$ sådant att $f(x) = x$.

Låt oss rita ut informationen i uppgiftstexten i ett koordinatsystem. Vi vet att funktionen f antar värdet 1 i punkten $x = 0$ och värdet 0 i punkten $x = 1$. Vår uppgift är att visa att grafen till f måste skära linjen $y = x$.

Situationen påminner om den i satsen om mellanliggande värden; grafen till f startar ovanför linjen $y = x$ för att i slutpunkten vara under linjen $y = x$. Mellan startpunkten och slutpunkten borde alltså finnas en skärningspunkt mellan f:s graf och linjen $y = x$.



Vi kan också mycket riktigt använda satsen om mellanliggande värden genom att betrakta funktionen

$$g(x) = f(x) - x.$$

Vi har att $g(0) = f(0) - 0 = 1$ och $g(1) = f(1) - 1 = -1$. Satsen om mellanliggande värden ger att det finns ett $x = x_0 \in [0, 1]$ sådan att $g(x_0) = 0$, vilket betyder att $0 = g(x_0) = f(x_0) - x_0$, d.v.s. $f(x_0) = x_0$.

2.1.4 Finn ekvationen för tangentlinjen till grafen för $y = 6 - x - x^2$ i punkten $x = -2$.

För att bestämma tangentlinjen behöver vi dess lutning och en punkt på linjen. Tangentlinjens lutning ges av gränsvärdet

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{y(-2+h) - y(-2)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{6 - (-2+h) - (-2+h)^2 - \bigl(6 - (-2) - (-2)^2\bigr)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3h - h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (3 - h) = 3. \end{aligned}$$

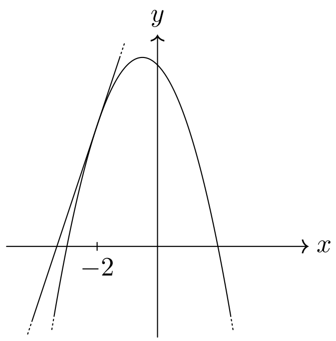
Alltså har tangentlinjen ekvationen

$$y = 3x + m,$$

där m bestäms av att tangentlinjen ska gå genom punkten $\bigl(-2, y(-2)\bigr) = (-2, 4)$,

$$4 = 3 \cdot (-2) + m \quad \Leftrightarrow \quad m = 10.$$

Tangentlinjens ekvation är alltså $y = 3x + 10$.



2.1.24 Finn alla punkter på kurvan $y = 1/x$ där tangentlinjen är vinkelrät mot linjen $y = 4x - 3$.

Vi bestämmer först ekvationen för tangentlinjen till $y = 1/x$ i en godtycklig punkt $x = a$. Tangentlinjens lutning ges av gränsvärdet

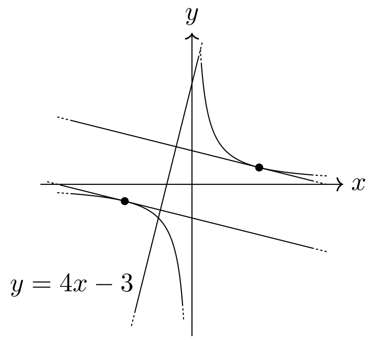
$$\lim_{h\to 0} \frac{y(a+h) - y(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \{\text{gemensam nämnare}\}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{a - (a+h)}{h\,a(a+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\,a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}.$$

Alltså har tangentlinjen ekvationen

$$y = \frac{-1}{a^2} \cdot x + m,$$

där m bestäms av att tangentlinjen går genom punkten $\bigl(a, y(a)\bigr) = (a, 1/a)$,

$$\frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2} \cdot a + m \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{2}{a}.$$



Tangentlinjen har därmed ekvationen

$$y = \frac{-1}{a^2} \cdot x + \frac{2}{a}.$$

Eftersom tangentlinjen ska vara vinkelrät mot en linje med lutning 4 söker vi de a-värden där tangentlinjen har lutning $-1/4$, d.v.s.

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2.$$

Alltså är de sökta punkterna

$$(2, 1/2) \;\text{ och }\; (-2, -1/2).$$

2.2.16 Beräkna derivatan till funktionen

$$s = \frac{1}{3+4t}$$

direkt från definitionen av derivata.

Derivatan ges av gränsvärdet

$$s'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{3+4(t+h)} - \dfrac{1}{3+4t}}{h}$$
$$= \{\text{gemensam nämnare}\} = \lim_{h\to 0} \frac{3+4t-(3+4t+4h)}{h(3+4t)(3+4t+4h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h(3+4t)(3+4t+4h)} = \frac{-4}{(3+4t)^2}.$$

2.2.25 Hur ska funktionen $f(x) = x \operatorname{sgn} x$ definieras i punkten $x = 0$ så att den blir kontinuerlig där? Är den även deriverbar där?

Vi har att

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x \cdot (-1) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot (+1) = 0,$$

vilket visar att om vi definierar $f(0) = 0$ så är f kontinuerlig i $x = 0$.

För att undersöka om f är deriverbar i $x = 0$ beräknar vi höger- och vänsterderivatan,

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h \cdot (+1) - 0}{h} = +1$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h \cdot (-1) - 0}{h} = -1.$$

Eftersom $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ är f inte deriverbar i $x = 0$.

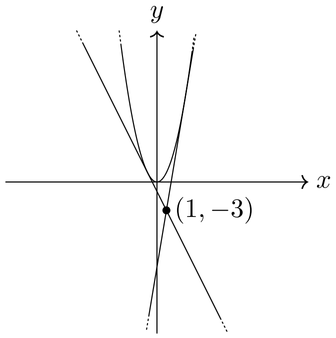
2.2.47 Det finns två olika räta linjer som passerar genom punkten $(1, -3)$ och tangerar kurvan $y = x^2$. Finn deras ekvationer.

Låt oss först bestämma ekvationen för tangentlinjen genom en godtycklig punkt $x = a$. Tangentlinjens lutning ges av

$$y'(a) = 2x\big|_{x=a} = 2a.$$

Tangentlinjen har alltså ekvationen

$$y = 2a \cdot x + m,$$



där m bestäms av att linjen ska gå genom punkten (a, a^2),

$$a^2 = 2a \cdot a + m \quad \Leftrightarrow \quad m = -a^2.$$

Vi ska nu välja a så att tangentlinjen passerar genom punkten $(1, -3)$, d.v.s.

$$\begin{aligned} -3 = y(1) = 2a - a^2 \quad &\Leftrightarrow \\ a = 3 \ \text{ eller } \ a = -1. \end{aligned}$$

De två linjerna är alltså $y = 6x - 9$ och $y = -2x - 1$.

2.2.48 Finn ekvationer till de två räta linjer som har lutning -2 och tangerar grafen till $y = 1/x$.

En linje med lutning -2 har en ekvation med formen

$$y = -2x + m.$$

En sådan linje kan endast tangera grafen till $y = 1/x$ i punkter där derivatan är -2,

$$y'(x) \equiv -\frac{1}{x^2} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Linjerna ska alltså gå genom punkterna

$$\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, y(\tfrac{1}{\sqrt{2}})\big) = \big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\big) \ \text{ respektive } \ \big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, y(-\tfrac{1}{\sqrt{2}})\big) = \big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\big).$$

Vi får två fall

1. m anpassas så att linjen går genom $\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\big)$,

$$\sqrt{2} = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + m \quad \Leftrightarrow \quad m = 2\sqrt{2}.$$

2. m anpassas så att linjen går genom $\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\big)$,

$$-\sqrt{2} = -2 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + m \quad \Leftrightarrow \quad m = -2\sqrt{2}.$$

De två linjernas ekvationer är alltså

$$\begin{aligned} y &= -2x + 2\sqrt{2} \\ y &= -2x - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$