**Lektion 18, Envariabelanalys den 7 december 1999**

**App. III.2** Antag att $f(x) \leq K$ i intervallen $[a,b)$ och $(b,c]$, och $\lim_{x\to b} f(x) = L$. Visa att $L \leq K$.

I vanliga fall skulle vi bara hänvisa till instängningsprincipen och uppgiften skulle vara löst, men i detta fall ska vi gå tillbaka till definitionen av gränsvärde och med den som utgångspunkt visa uppgiften.

I en mera teoretisk uppgift av den här typen kan det vara bra att först tydligt skriva upp vad vi vet och vad vi vill visa.

Vi vet:
1. $f(x) \leq K$ överallt i $[a,c]$ utom möjligtvis i $x = b$,
2. $\lim_{x\to b} f(x) = L$,

Vill visa:
3. $\lim_{x\to b} f(x) = L \leq K$.

Punkt 2 översätter vi med gränsvärdesdefinitionen till

$2^*$. Oavsett hur litet vi väljer $\varepsilon > 0$ så finns alltid ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon, \qquad (*)$$

för alla $x$ i en punkterad $\delta$-omgivning av $x = b$.

Om vi plockar ut den viktiga informationen ur punkt 1 och $2^*$ så säger den att i en punkterad $\delta$-omgivning av $x = b$ så är

$$f(x) \leq K, \qquad (1)$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \qquad (2)$$

Om det nu vore så att $L > K$, så skulle den vänstra olikheten i (2) vålla problem. För, säg att vi väljer $\varepsilon > 0$ så pass liten att $L - \varepsilon > K$ (vilket vi kan). Då säger (1) och (2) att

$$K < L - \varepsilon < f(x) \leq K,$$

vilket helt klart är orimligt. Alltså måste antagandet att $L > K$ vara fel, d.v.s. vi måste ha att $L \leq K$. VSB

**App. III.4** Visa att följande funktioner är kontinuerliga,

a) $f(x) = C$,

b) $g(x) = x$.

Vi ska visa att

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad (*)$$

för alla reella tal $a$.

a) Om vi skriver $(*)$ med gränsvärdesdefinitionen ska vi alltså visa att:

Oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer så finns det alltid ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{för alla } x : 0 < |x-a| < \delta. \qquad (\dagger)$$

Eftersom $f(x) = C$ för alla $x$ så blir $(\dagger)$,

$$0 < \varepsilon \quad \text{för alla } x : 0 < |x-a| < \delta.$$

Denna olikhet är alltid uppfylld om $\varepsilon > 0$.

b) I detta fall ska vi visa att:

Oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer så finns det alltid ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

$$|g(x) - g(a)| < \varepsilon \quad \text{för alla } x : 0 < |x-a| < \delta. \qquad (\dagger)$$

Med $g(x) = x$ blir $(\dagger)$,

$$|x-a| < \varepsilon \quad \text{för alla } x : 0 < |x-a| < \delta.$$

Om vi väljer $\delta = \varepsilon$ så ser vi att $(\dagger)$ är uppfylld.

**App. IV.2** Låt

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x = 1/n \text{ för } n = 1, 2, 3, \dots, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Visa att $f$ är integrabel över $[0, 1]$ och beräkna

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Låt oss först rekapitulera Riemannintegralens definition.
Till varje partition (indelning) $P$ av intervallet $[0, 1]$ bildar vi en över- och undersumma,

$$U(P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

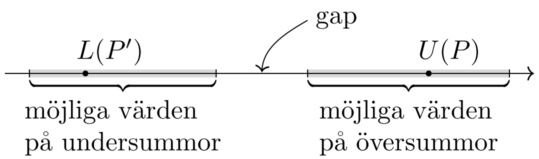
$$L(P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i,$$

där $M_i$ är $f$:s största värde i det $i$:te delintervallet och $m_i$ är $f$:s minsta värde i samma delintervall.

Oberoende av vilka partitioner $P$ och $P'$ vi väljer så kommer alltid en översumma vara större än en undersumma,

$$L(P') \le U(P).$$

Om vi därför ritar ut de möjliga värdena för över- och undersummor på en tallinje, så kommer de typiskt att ha utseendet



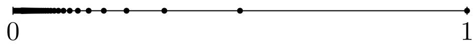

Om det inte finns något gap mellan de två mängderna av möjliga värden på över- och undersummor eller om detta gap endast består av ett värde $I$, då är funktionen integrabel på intervallet och

$$\int_0^1 f(x)\,dx = I.$$

För att visa att gapet i vårt exempel högst består av ett värde ska vi ta fram en följd av partitioner $\{P_n\}$ så att

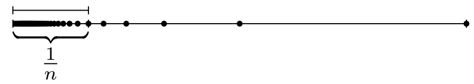
$$\lim_{n\to\infty} U(P_n) = \lim_{n\to\infty} L(P_n) = I.$$

Vi ska inte direkt skriva upp partitionen $P_n$, utan ta hjälp av en annan partition $P_{m,n}$. Partitionen $P_{m,n}$ ska vi bygga upp genom att stegvis lägga till delintervall som ska kapsla in de punkter där funktionen antar värdet 1; låt oss kalla dessa punkter för 1-punkter.

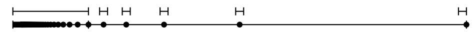



1-punkter

Det första delintervallet som vi lägger till är $[0, \frac{1}{n}]$, som ska fungera som ett ihopsamlingsintervall för alla 1-punkter som hopar sig kring $x = 0$.



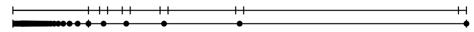

Kring varje 1-punkt utanför $[0, \frac{1}{n}]$ skapar vi ett intervall med längd $\frac{1}{m}$ och centrerad kring punkten. Punkten $x = 1$ blir här ett undantag, där vi istället skapar ett intervall med $x = 1$ som höger ändpunkt.



Antalet sådana $\frac{1}{m}$-delintervall blir $(n-1)$ (kom ihåg att fr.o.m. $x = \frac{1}{n}$ så tillhör 1-punkterna delintervallet $[0, \frac{1}{n}]$).

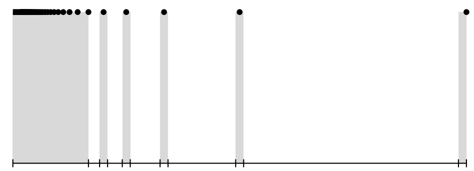
Slutligen låter vi mellanrummen mellan de hittills definierade intervallen vara de sista delintervallen som vi lägger till vår partition $P_{m,n}$.

$P_{m,n}$ :



Översumman till $P_{m,n}$ blir

$$U(P_{m,n}) = \sum M_i \Delta x_i = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + (n-1) \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{m}$$



Låt nu $P_n$ vara partitionen $P_n = P_{n^2,n}$. Då får vi att

$$U(P_n) = U(P_{n^2,n}) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n^2} \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$

Eftersom funktionen är positiv så måste vi ha att

$$0 \le L(P_n) \le U(P_n).$$

Instängningsprincipen ger att

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n) = 0.$$

Vi har därmed visat att $f$ är integrabel på $[0,1]$, och att

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

**App. IV.6** Använd definitionen av likformig kontinuitet för att visa att $f(x) = \sqrt{x}$ är likformigt kontinuerlig på $[0,1]$.

Vi ska visa följande:

> Oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer och oberoende av $a \in [0,1]$ så finns ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att
>
> $$|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| < \varepsilon \quad \text{för alla } x : 0 < |x-a| < \delta. \qquad (*)$$

Det som tillkommit jämfört med gränsvärdesdefinitionen är att nu ska $\delta$ vara oberoende av $a$. Vi vill alltså kunna välja ett $\delta > 0$ så att vi utgående från

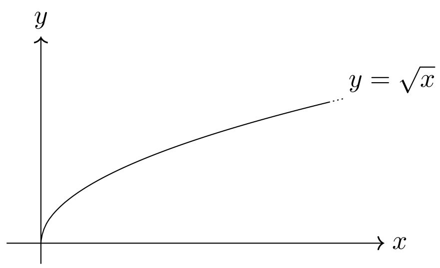
$$0 < |x-a| < \delta \qquad (1)$$

kan härleda olikheten

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| < \varepsilon, \qquad (1)$$

helt oberoende av vilket värde $a$ har.

Om vi ritar upp grafen till $y = \sqrt{x}$,




så ser vi att grafen har en lodrät tangent i $x = 0$. Det betyder att två punkter $x$ och $a$ som ligger nära varandra, $|x-a| < \delta$, i närheten av 0 kommer ha sina funktionsvärden på betydligt större avstånd än $\delta$. Vi måste därför välja $\delta$ mycket mindre än $\varepsilon$, d.v.s. i en annan storleksordning än $\varepsilon$.

Välj därför $\delta = \varepsilon^2$. För att visa (2) delar vi upp härledningen i två delar.

$x > \varepsilon^2$ : Vi har

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| = \frac{|x-a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}\,|} < \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2} + 0} = \varepsilon.$$

$x \le \varepsilon^2$ : Vi har

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| \le |\sqrt{x} - 0\,| = \sqrt{x} \le \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Alltså har vi utgående från (1) visat (2) med $\delta = \varepsilon^2$ (som är oberoende av $a$).