Lektion 17, Envariabelanalys den 2 december 1999

9.4.4 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$ är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

Eftersom exponenten $2n$ alltid är ett jämnt tal så är täljaren $(-1)^{2n} = 1$. Serien är alltså en positiv geometrisk serie med kvoten $\frac{1}{2}$ och är konvergent.

Eftersom serien är positiv så sammanfaller begreppen konvergens och absolutkonvergens. Svaret måste alltså bli att serien är absolutkonvergent.

9.4.6 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

Vi börjar med att undersöka om serien är absolutkonvergent. Den positiva serien är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-2)^n}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}. \qquad (*)$$

Vi vet sedan tidigare att $n!$ växer mycket snabbare än potensuttryck av täljarens typ. T.ex. har vi att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Om vi därför jämför vår serie $(*)$ med den konvergenta geometriska serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

så har vi att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n/n!}{(2/3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Jämförelseprincipen ger att $(*)$ är konvergent, vilket betyder att serien i uppgiftstexten är absolutkonvergent.

9.4.8 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$ är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

Serien är absolutkonvergent om den positiva serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{-n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \qquad (*)$$

är konvergent. För stora n är

$$\frac{n}{n^2+1} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

så termerna i serien $(*)$ avtar lika långsamt som termerna i den divergenta harmoniska serien. Vi jämför därför $(*)$ med den harmoniska serien,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n^2} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Jämförelseprincipen ger att $(*)$ är divergent, d.v.s. serien i uppgiftstexten är inte absolutkonvergent.

Det återstår alltså att undersöka om serien är betingat konvergent eller divergent. Att visa att en serie är betingat konvergent är ofta en delikat uppgift, så låt oss ta ett steg tillbaka och betrakta serien trunkerad till en ändlig summa,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{-n}{n^2+1}.$$

På denna ändliga summa kan vi använda de vanliga räknereglerna och bryta ut en faktor -1,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{-n}{n^2+1} = -\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n^2+1}.$$

Om vi är observanta ser vi att summan i högerledet blir den positiva serien (*) om $N \to \infty$. Vi har alltså att

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{-n}{n^2+1} = -\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n^2+1} \quad \text{är divergent.}$$

Alltså måste serien i uppgiftstexten vara divergent.

9.5.2 Bestäm mittpunkt, konvergensradie och konvergensområde till potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3n(x+1)^n.$$

Om vi skriver potensserien som

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3n\bigl(x-(-1)\bigr)^n$$

så ser vi direkt att mittpunkten är i $x=-1$.

Konvergensradien kan vi räkna ut med d'Alemberts kvotformel,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3(n+1)}{3n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Alltså är konvergensradien $R=1$.

Från denna information kan vi dra slutsatsen att för alla x i intervallet $(-1-R, -1+R) = (-2,0)$ så konvergerar potensserien, och för alla x i intervallen $(-\infty,-2)$ och $(0,\infty)$ divergerar potensserien. Vi måste göra en speciell undersökning av om ändpunkterna $x=-2$ och $x=0$ tillhör konvergensområdet.

$x=-2:$ När $x=-2$ är potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3n(-1)^n.$$

Vi ser direkt att termerna inte går mot noll, så potensserien är divergent för $x=-2$.

$x=0:$ Potensserien är nu

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3n\cdot 1^n.$$

Även i detta fall går inte termerna mot noll, så potensserien är divergent för $x=0$.

Sammanfattningsvis har vi att

mittpunkt	-1,
konvergensradie	1,
konvergensområde	$(-2,0)$.

9.5.4 Bestäm mittpunkt, konvergensradie och konvergensområde till potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4\,2^{2n}}\,x^n.$$

Vi ser direkt att potensserien är centrerad kring $x=0$.

Konvergensradien får vi från d'Alemberts kvotformel,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^4\, 2^{2(n+1)}}}{\dfrac{(-1)^n}{n^4\, 2^{2n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 \cdot 2^{2n}}{(n+1)^4 \cdot 2^{2n} \cdot 2^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{2^{2n}\cdot 2^2} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^4 \cdot \frac{1}{2^2} \\
&= \{\, x \mapsto x^4 \text{ är kontinuerlig} \,\} \\
&= \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \Big)^4 \cdot \tfrac{1}{4} = 1^4 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Alltså är konvergensradien $R = 4$.

Konvergensområdet är alltså intervallet från -4 till $+4$, men vi måste avgöra om ändpunkterna -4 och $+4$ också tillhör konvergensområdet.

$x = -4$: För $x = -4$ blir potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4\, 2^{2n}} \cdot (-4)^n = \{\, (-4)^n = (-1)^n \cdot 2^{2n} \,\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Serien i högerledet är välkänt konvergent, så potensserien är konvergent för $x = -4$.

$x = 4$: Potensserien är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4\, 2^{2n}} \cdot 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$

som är absolutkonvergent enligt fallet $x = -4$. Alltså är potensserien konvergent för $x = -4$.

Om vi sammanfattar har vi alltså

mittpunkt	0,
konvergensradie	4,
konvergensområde	$[-4, 4]$.

9.5.6 Bestäm mittpunkt, konvergensradie och konvergensområde till potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} (4-x)^n.$$

Vi skriver först om potensserien i standardform,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} \big((-1)(x-4)\big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} (-1)^n (x-4)^n.$$

Nu kan vi avläsa att mittpunkten är $x = 4$.

Konvergensradien är enligt d'Alemberts kvotformel

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{e^{n+1}}{(n+1)^3}(-1)^{n+1}}{\dfrac{e^n}{n^3}(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} e \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3} \\
&= e \cdot \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^3 = \{\, x \mapsto x^3 \text{ är kontinuerlig} \,\} \\
&= e \cdot \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \Big)^3 = e \cdot 1^3 = e,
\end{aligned}$$

vilket ger att $R = e^{-1}$.

Slutligen ska vi undersöka om de två ändpunkterna $x = 4 - e^{-1}$ och $x = 4 + e^{-1}$ tillhör konvergensområdet.

$x = 4 - e^{-1}$: Då $x = 4 - e^{-1}$ är potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} \Big(\frac{1}{e}\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

som är välkänt konvergent.

$x = 4 + e^{-1}$: Potensserien blir i detta fall

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} \Big(-\frac{1}{e}\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}.$$

Denna serie är absolutkonvergent, som vi såg i den andra ändpunkten.

Svaret blir alltså

mittpunkt	4,
konvergensradie	e^{-1},
konvergensområde	$[4 - e^{-1}, 4 + e^{-1}]$.

Alltså är konvergensradien $R = \infty$.

Svaret blir

mittpunkt	$\frac{1}{4}$ (men vilket annat reellt tal duger),
konvergensradie	∞,
konvergensområde	alla reella tal.

9.5.8 Bestäm mittpunkt, konvergensradie och konvergensområde till potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}.$$

Vi skriver om potensserien i standardform,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bigl(4(x-\frac{1}{4})\bigr)^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^n}(x-\tfrac{1}{4})^n.$$

Här ser vi att mittpunkten är $x = \frac{1}{4}$.

d'Alemberts kvotformel ger oss konvergensradien

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{4^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{4^n}{n^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

I gränsvärdet ser vi att nämnaren har en faktor mer än täljaren. Det verkar alltså som om gränsvärdet går mot noll. Vi kan visa detta med följande skattning

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \\ &\le \lim_{n\to\infty} 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

9.5.18 Givet potensserien

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad (-1 < x < 1).$$

Utnyttja denna formel för att bestämma potensserien för

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

i potenser av x, och bestäm för vilka x formeln är giltig.

Vad vi ska göra är att vi ska skriva om funktionen $f(x)$ så att vi kan uttrycka den i termer av potensserieformeln i uppgiftstexten,

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = -\frac{x-1}{x+1} = -\frac{x+1-2}{x+1} = -1 + \frac{2}{x+1}.$$

Den sista termen i högerledet är nästan uttryckt i potensserieformeln. En ytterligare omskrivning ger

$$\begin{aligned} &= -1 + \frac{2}{1-(-x)} = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n. \end{aligned}$$

9.5.28 Bestäm summan av serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

Om vi tittar lite närmare på serien så ser vi att uttrycket $\frac{1}{2^n}$ skulle kunna komma från x^n i serien

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

om vi stoppar in $x = 1/2$.

Faktorn $(n+1)$ är typiskt en faktor som dyker upp när man deriverar en potensserie,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}.$$

Serien i högerledet är en vanlig geometrisk serie, så vi har att

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{d}{dx}\,\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}. \qquad (*)$$

Det är viktigt att notera att ovanstående formel gäller bara för x inom konvergensområdet till den geometriska serien. Om vi vill stoppa in $x = 1/2$ så måste vi därför försäkra oss om att $x = 1/2$ verkligen tillhör konvergensområdet.

Den geometriska serien har konvergensområdet $(-1, 1)$, så vi kan lugnt stoppa in $x = 1/2$ i $(*)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4.$$

Visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$

Lösningen till den här uppgiften är lite invecklad, med några steg och delresultat. För att inte förlora överblicken redovisar vi först en skiss av lösningen som hoppar över allt smått och koncentrerar sig på huvuddragen.

1. Visa Maclaurinserien $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n$ för $|x| < 1$.
2. Visa att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ är konvergent.
3. Använd Abels kontinuitetssats,

$$\begin{aligned}\log 2 &= \lim_{x\to 1^-} \log(1+x) = \lim_{x\to^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 1^-} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

Punkt 3 är redan ganska välförklarad så det räcker om vi visar punkt 1 och 2.

1. Maclaurinutvecklingen av $\log(1+x)$ är välkänd,

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n + R_N(x), \qquad (*)$$

där resttermen ges av

$$R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\xi_N)}{N!} x^N \qquad (0 < \xi_N < x).$$

Med ett relativt enkelt induktivt resonemang kan vi få fram att

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Så resttermen är

$$R_N(x) = \frac{(-1)^{N-1}}{N}\, \xi_N^N\, x^N.$$

Om vi låter $N \to \infty$ så ser vi att

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} R_N(x) &= \lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^{N-1}}{N}\, \xi_N^N\, x^N \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^{N-1}}{N} \cdot \lim_{N\to\infty} \xi_N^N \cdot \lim_{N\to\infty} x^N \\ &= \left\{\, \xi_N \in (0,x) \quad\Rightarrow\quad \lim \xi_N^N \le \lim x^N = 0 \,\right\} \\ &= 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Alltså ger $(*)$, om vi låter $N \to \infty$, att

$$\log(1+x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n + \lim_{N\to\infty} R_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

2. Vad vi ska notera i serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad (*)$$

är att den är alternerande. För att en alternerande serie ska konvergera räcker det om beloppet av termerna avtar monotont mot 0, och i vårt fall är

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

strängt avtagande, så Leibniz test ger att serien $(*)$ är konvergent.