Lektion 14, Envariabelanalys den 23 november 1999

6.2.2 Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Det första vi observerar i integralen är uttrycket i nämnaren,

$$\sqrt{1-4x^2}. \tag{$*$}$$

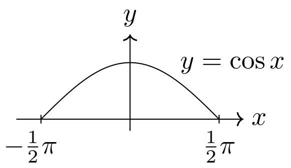
När ett uttryck av den här typen förekommer i en rationell integrand kan vi förenkla uttrycket med en substitution av typen

$$x = a\sin\theta, \tag{$\dagger$}$$

där vi anpassar talet a så att uttrycket $(*)$ kan förenklas med den trigonometriska ettan. I vårt fall väljer vi $a = 1/2$ för då blir

$$\sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-4(\tfrac{1}{2}\sin\theta)^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = |\cos\theta\,|.$$

I substitutionen $(\dagger)$ svarar x-värdena mellan $-a$ och a mot θ-värden mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$. På detta θ-intervall är $\cos\theta$ positiv, så vi kan ta bort beloppstecknen i formeln ovan.



Med substitutionen $x = \frac{1}{2}\sin\theta$ är alltså

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \bigl\{x = \tfrac{1}{2}\sin\theta;\ dx = \tfrac{1}{2}\cos\theta\,d\theta\bigr\}\\ &= \int \frac{\frac{1}{4}\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\tfrac{1}{2}\cos\theta\,d\theta = \int \tfrac{1}{8}\sin^2\theta\,d\theta.\end{aligned}$$

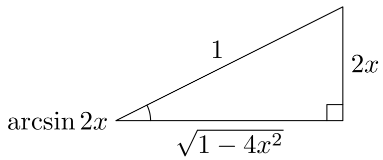
Den sista integralen skriver vi om med formeln för dubbla vinkeln,

$$= \int \tfrac{1}{16}\bigl(1-\cos 2\theta\bigr)\,d\theta = \tfrac{1}{16}\bigl(\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\bigr) + C$$

För att uttrycka den primitiva funktionen i den ursprungliga variabeln sätter vi in $\theta = \arcsin 2x$.

$$\begin{aligned}&= \tfrac{1}{16}\arcsin 2x - \tfrac{1}{32}\sin\bigl(2\arcsin 2x\bigr) + C\\ &= \bigl\{\text{formeln för dubbla vinkeln}\bigr\}\\ &= \tfrac{1}{16}\arcsin 2x - \tfrac{1}{16}\sin(\arcsin 2x)\cdot\cos(\arcsin 2x) + C\end{aligned}$$

Uttrycket $\sin(\arcsin 2x)$ kan vi direkt förenkla till $2x$, men för att förenkla uttrycket $\cos(\arcsin 2x)$ behöver vi en hjälptriangel.



$$\cos(\arcsin 2x) = \sqrt{1-4x^2}$$

Alltså är den primitva funktionen

$$= \tfrac{1}{16}\arcsin 2x - \tfrac{1}{8}x\sqrt{1-4x^2} + C.$$

6.2.10 Beräkna $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}\,dx$.

Uttrycket $\sqrt{9+x^2}$ är en annan typ av uttryck som också kan förenklas med en trigonometrisk substitution. Denna gång använder vi formeln

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

som inspiration till en substitution av typen

$$x = a\tan\theta, \tag{$\dagger$}$$

där a väljs lämpligt. Med $a = 3$ blir vårt uttryck

$$\sqrt{9+x^2} = \sqrt{9+(3\tan\theta)^2} = 3\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{3}{|\cos\theta\,|}.$$

Precis som i förra uppgiften svarar x-värden i substitutionen (†) mot θ-värden mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$, så beloppstecknen kring $\cos\theta$ kan tas bort i formeln ovan.

Med substitutionen $x = 3\tan\theta$ blir integralen

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}\,dx &= \bigl\{x = 3\tan\theta;\ dx = 3(1+\tan^2\theta)\,d\theta\bigr\}\\ &= \int \frac{3}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{3^4\tan^4\theta}\cdot 3(1+\tan^2\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

Vi kan skriva om integralen något med de trigonometriska formlerna

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad\text{och}\quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

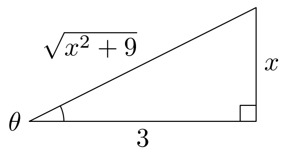
till

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta}{\sin^4\theta}\,d\theta.$$

I den här integralen känner vi igen täljaren $\cos\theta$ som derivatan av $\sin\theta$, så vi substituerar $t = \sin\theta$,

$$\begin{aligned}&= \bigl\{t = \sin\theta;\ dt = \cos\theta\,d\theta\bigr\}\\ &= \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{27\,t^3} + C = -\frac{1}{27\,\sin^3\theta} + C\end{aligned}$$

För att uttrycka den primitiva funktionen i den ursprungliga variabeln x, ritar vi en hjälptriangel.



$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

Alltså är den primitiva funktionen

$$= -\frac{(x^2+9)^{3/2}}{27\,x^3} + C.$$

6.2.16 Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$.

Det här är ett exempel på den tredje och sista typen av ”roten ur ett andragradsuttryck”. I detta fall ska vi substituera

$$x = \frac{a}{\cos\theta},$$

får då övergår vårt kvadratrotsuttryck till

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\theta} - a^2} = a\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = a\sqrt{\tan^2\theta} = a|\tan\theta\,|.$$

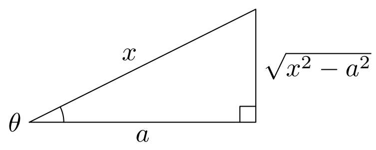
Tyvärr kan vi i detta fall inte ta bort beloppstecknen kring $\tan\theta$, utan när $x \le -a$ så har vi minustecken och när $x \ge a$ så har vi plustecken.

För att slippa beloppstecknet när vi integrerar behandlar vi de båda fallen $x \ge a$ och $x \le -a$ separat.

$x \ge a:$ Med substitutionen $x = \dfrac{a}{\cos\theta}$ blir integralen

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} &= \Bigl\{x = \frac{a}{\cos\theta};\ dx = \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta\Bigr\}\\ &= \int \frac{\cos^2\theta}{a^2}\cdot\frac{1}{a\tan\theta}\cdot\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta\\ &= \frac{1}{a^2}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{\sin\theta}{a^2} + C.\end{aligned}$$

För att skriva integralen med den ursprungliga variabeln x använder vi en hjälptriangel.



$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$$

Alltså är den primitiva funktionen

$$= \frac{1}{a^2}\,\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C.$$

$x \le -a$: Räkningarna blir som i fallet ovan, förutom att vi hela tiden har med ett minustecken från tangensfunktionen. En primitiv funktion är alltså

$$-\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C.$$

I de olika x-intervallen $(-\infty,-a)$ och (a,∞) har vi olika primitiva funktioner. Detta är inget underligt utan helt naturligt.

6.2.22 Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}}$.

Vi skriver om nämnaren till ett kvadratiskt uttryck med hjälp av kvadratkomplettering,

$$4x-x^2 = 4-(x-2)^2.$$

Med en enkel substitution $t=x-2$ kan integralen skrivas

$$\int \frac{dx}{\bigl(4-(x-2)^2\bigr)^{3/2}} = \bigl\{t=x-2\bigr\} = \int \frac{dt}{(4-t^2)^{3/2}}.$$

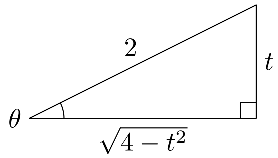
Standardsubstitutionen i detta fall är

$$t = 2\sin\theta.$$

Integralen blir

$$\begin{aligned}
&= \bigl\{t=2\sin\theta;\ dt = 2\cos\theta\,d\theta\bigr\}\\
&= \int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{2^3\,\cos^3\theta} = \frac{1}{4}\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\
&= \Bigl\{\frac{d}{d\theta}\tan\theta = 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\Bigr\}\\
&= \tfrac{1}{4}\tan\theta + C.
\end{aligned}$$

Vi använder en hjälptriangel för att uttrycka den primitiva funktionen i t-variabeln, och därmed i x-variabeln.



$$\tan\theta = \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$$

Alltså är den primitiva funktionen

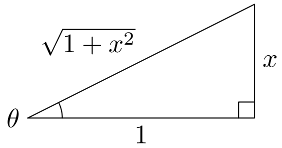
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\frac{t}{\sqrt{4-t^2}} + C = \{t = x-2\}\\
&= \frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}} + C.
\end{aligned}$$

6.2.26 Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$.

I integrandens nämnare känner vi igen uttrycket $1+x^2$ som är ett av dessa kvadratiska uttryck som, trots att vi inte har någon kvadratrot, lämpar sig för en trigonometrisk substitution.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} &= \Bigl\{x=\tan\theta;\ dx = (1+\tan^2\theta)\,d\theta \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dx}{1+x^2} = d\theta\Bigr\}\\
&= \int \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\,d\theta = \Bigl\{1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta};\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Bigr\}\\
&= \int \sin^2\theta\,d\theta = \{\text{formeln för dubbla vinkeln}\}\\
&= \int \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta + C\\
&= \{\text{formeln för dubbla vinkeln}\}\\
&= \tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{2}\cos\theta\cdot\sin\theta + C
\end{aligned}$$

För att uttrycka den primitiva funktionen i den ursprungliga variabeln x ritar vi en hjälptriangel.



$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Alltså är den primitiva funktionen

$$= \tfrac{1}{2}\arctan x - \frac{\tfrac{1}{2}x}{1+x^2} + C.$$

Bestäm n:te derivatan av $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-2}$.

Istället för att sätta igång och derivera funktionen för att uttyda ett enkelt mönster, ska vi först förenkla funktionen med en partialbråkuppdelning.

Det första steget är att vi faktoriserar nämnaren, och det kräver att vi vet nämnarens rötter

$$x^2-x-2=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=-1 \quad \text{eller} \quad x=2.$$

Faktorsatsen ger att

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)}.$$

Enligt partialbråkuppdelningen kan uttrycket skrivas i formen

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2},$$

där A och B är två konstanter. För att ta reda på vad A och B ska vara kan vi använda en teknik som brukar kallas handpåläggning.

Vi tar handen och täcker över den faktor i vänsterledet som svarar mot A,

$$\frac{1}{\qquad (x-2)},$$

och stoppar sedan istället för x in nollstället till den faktor vi täckt över. Vi får då värdet på A.

$$A = \frac{1}{\qquad (-1-2)} = -\tfrac{1}{3}.$$

På samma sätt får vi fram B,

$$B = \frac{1}{(2+1) \qquad} = \tfrac{1}{3}.$$

Alltså är

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}.$$

Vi kan nu derivera termerna separat. Det är någorlunda enkelt att induktivt se vad n:te derivatan blir,

$$f^{(n)}(x) = \left(-\tfrac{1}{3}\right)\frac{(-1)^n\, n!}{(x+1)^{n+1}} + \tfrac{1}{3}\frac{(-1)^n\, n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

(Se anteckningarna till gruppstudium 7.)

6.3.6 Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{5-x^2}$.

Standardsättet att räkna ut en primitiv funktion till en rationell funktion föreskriver att vi först faktoriserar nämnarpolynomet,

$$\frac{1}{5-x^2} = \frac{-1}{(x-\sqrt{5}\,)(x+\sqrt{5}\,)},$$

för att sedan partialbråkuppdela uttrycket. Ansätt

$$\frac{-1}{(x-\sqrt{5}\,)(x+\sqrt{5}\,)} = \frac{A}{x-\sqrt{5}} + \frac{B}{x+\sqrt{5}},$$

där A och B är okända koefficienter. Eftersom nämnarfaktorerna är av första graden kan vi använda handpåläggning,

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1}{\qquad (\sqrt{5}+\sqrt{5})} = \frac{-1}{2\sqrt{5}},\\ B &= \frac{-1}{(-\sqrt{5}-\sqrt{5}) \qquad} = \frac{1}{2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\frac{1}{5-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Bigl(\frac{-1}{x-\sqrt{5}} + \frac{1}{x+\sqrt{5}}\Bigr)$$

och vi får att

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5-x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \int \Bigl(\frac{1}{x+\sqrt{5}} - \frac{1}{x-\sqrt{5}}\Bigr)\,dx\\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\Bigl(\log|x+\sqrt{5}| - \log|x-\sqrt{5}|\Bigr) + C\\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log\left|\frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}}\right| + C. \end{aligned}$$

6.3.10 Beräkna $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3x^2+8x-3}$.

För att faktorisera nämnarpolynomet behöver vi veta dess rötter

$$3x^2+8x-3=0.$$

Kvadratkomplettera!

$$3(x+\tfrac{4}{3})^2 - \tfrac{16}{3} - 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=-3 \quad \text{eller} \quad x = 1/3.$$

Faktorsatsen ger nu att

$$\frac{x}{3x^2+8x-3} = \frac{x}{3(x+3)(x-\frac{1}{3})}.$$

Vi partialbråkuppdelar. Ansätt

$$\frac{x}{3(x+3)(x-\frac{1}{3})} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-\frac{1}{3}}.$$

Handpåläggning ger att

$$\begin{aligned} A &= \frac{-3}{3 \qquad (-3-\frac{1}{3})} = \frac{3}{10},\\ B &= \frac{1/3}{3(\frac{1}{3}+3) \qquad} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Integralen blir nu

$$\begin{aligned} \int \frac{x\,dx}{3x^2+8x-3} &= \int \Bigl(\frac{\frac{3}{10}}{x+3} + \frac{\frac{1}{30}}{x-\frac{1}{3}}\Bigr)\,dx\\ &= \tfrac{3}{10}\log|x+3| + \tfrac{1}{30}\log|x-\tfrac{1}{3}| + C. \end{aligned}$$

6.3.12 Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+9x}$.

Nämnarpolynomet kan vi faktorisera direkt

$$x(x^2+9).$$

Eftersom den högra faktorn inte har några reella rötter kan den inte faktoriseras ytterligare.

Vi partialbråkuppdelar. Ansätt

$$\frac{1}{x(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9}$$

Vi skriver högerledet med gemensam nämnare och jämför sedan uttrycket med vänsterledet,

$$\begin{aligned} &= \frac{A(x^2+9)+x(Bx+C)}{x(x^2+9)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+Cx+9A}{x(x^2+9)}. \end{aligned}$$

Identifikation av koefficienter ger att

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ C&=0 \\ 9A&=1 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} A&=1/9 \\ B&=-1/9 \\ C&=0 \end{aligned}$$

Integralen blir nu

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+9x} &= \frac{1}{9}\int\Big(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+9}\Big)\,dx = \tfrac{1}{9}\log x - \frac{1}{18}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx \\ &= \tfrac{1}{9}\log x - \tfrac{1}{18}\log(x^2+9)+C. \end{aligned}$$

6.3.16 Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{12+7x+x^2}\,dx$.

Eftersom täljarpolynomet har högre grad än nämnarpolynomet förenklar vi integranden med en polynomdivision.

$$\begin{array}{rl} x \;-7 & \\ \hline x^3+1 & \big|\; x^2+7x+12 \\ -\;x^3+7x^2+12x & \\ \hline -\;7x^2-12x+1 & \\ -\;-7x^2-49x-84 & \\ \hline 37x+85 & \end{array}$$

Alltså är

$$\frac{x^3+1}{x^2+7x+12} = x-7+\frac{37x+85}{x^2+7x+12}.$$

Vi ska nu koncentrera oss på det rationella uttrycket i högerledet. Dess nämnare har rötterna

$$x^2+7x+2=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x=-4 \quad\text{eller}\quad x=-3.$$

Faktorsatsen ger att

$$\frac{37x+85}{x^2+7x+12} = \frac{37x+85}{(x+4)(x+3)}.$$

Vi partialbråkuppdelar. Ansätt

$$\frac{37x+85}{(x+4)(x+3)} = \frac{A}{x+4}+\frac{B}{x+3}.$$

Handpåläggning ger att

$$\begin{aligned} A &= \frac{37\cdot(-4)+85}{(-4+3)} = 63, \\ B &= \frac{37\cdot(-3)+85}{(-3+4)} = -26. \end{aligned}$$

Vi får nu att

$$\int \frac{x^3+1}{12+7x+x^2}\,dx = \int \Big(x-7+\frac{63}{x+4}-\frac{26}{x+3}\Big)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2-7x+63\log|x+4|-26\log|x+3|+C.$$

6.3.20 Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x}$.

Vi undersöker rötterna till nämnarpolynomet. Vi ser direkt att $x=0$ är en rot. De övriga två är rötter till

$$x^2+2x+2=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x+1)^2+1=0,$$

och är inte reella. Alltså är

$$\frac{1}{x^3+2x^2+2x}=\frac{1}{x(x^2+2x+2)}.$$

Vi partialbråkuppdelar. Ansätt

$$\frac{1}{x(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}=\frac{A(x^2+2x+2)+x(Bx+C)}{x(x^2++2x+2)}$$
$$=\frac{(A+B)x^2+(2A+C)x+2A}{x(x^2+2x+2)}.$$

Identifikation av koefficienter ger att

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ 2A+C&=0 \\ 2A&=1 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} A&=1/2 \\ B&=-1/2 \\ C&=-1 \end{aligned}$$

Vi får att

$$\int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x} = \tfrac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{x}-\frac{x+2}{(x+1)^2+1}\Big)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\log x - \tfrac{1}{4}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx - \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$
$$= \tfrac{1}{2}\log x - \tfrac{1}{4}\log\big((x+1)^2+1\big) - \tfrac{1}{2}\arctan(x+1)+C.$$