Lektion 13, Envariabelanalys den 18 november 1999

5.6.4 Bestäm $\displaystyle\int e^{2x}\sin(e^{2x})\,dx$.

När vi ska förenkla en integral med hjälp av en substitution gäller det att kunna känna igen integranden som en uttryckskombination av typen

$$f(u)\cdot u',$$

där u är ett uttryck i x och f någon funktion.

I vår integral kan vi se att med $u = e^{2x}$ så är $u' = 2e^{2x}$ och integranden kan skrivas

$$\tfrac{1}{2}\sin u\cdot u'.$$

Med substitutionen $u = e^{2x}$ får vi alltså

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin(e^{2x})\,dx &= \{u = e^{2x};\ du = 2e^{2x}\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int \sin u\,du = -\tfrac{1}{2}\cos u + C = -\tfrac{1}{2}\cos(e^{2x}) + C.\end{aligned}$$

5.6.6 Bestäm $\displaystyle\int (x+2)(x^2+4x+9)^{1/3}\,dx$.

Genom att bara stirra på integranden ser vi att uttrycket x^2+4x+9 har en derivata $\bigl(= 2(x+2)\bigr)$ som förekommer som en faktor i integranden. Om vi substituerar $u = x^2+4x+9$ så kan integranden skrivas

$$u'\cdot\tfrac{1}{2}u^{1/3}.$$

Vi får

$$\begin{aligned}\int (x+2)(x^2+4x+9)^{1/3}\,dx &= \{u = x^2+4x+9;\ du = 2(x+2)\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int u^{1/3}\,du = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}u^{4/3} + C = \tfrac{3}{8}(x^2+4x+9)^{4/3} + C.\end{aligned}$$

5.6.8 Bestäm $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Låt oss skriva om integranden något,

$$2\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Här ser vi att den högra faktorn är derivatan av deluttrycket $\sqrt{x}$ som förekommer i den vänstra faktorn. Med substitutionen $u = \sqrt{x}$ kan alltså integranden skrivas

$$2\sin u\cdot u',$$

och integralen blir

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= \Bigl\{u = \sqrt{x};\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\Bigr\}\\ &= 2\int \sin u\,du = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

5.6.10 Bestäm $\int x^2 2^{x^3+1}\,dx$.

Vi skriver om integranden till

$$\tfrac{1}{3}\,2^{x^3+1}\cdot 3x^2.$$

Vi känner igen den högra faktorn $3x^2$ som derivatan av exponenten x^3+1.

$$\begin{aligned}\int x^2\,2^{x^3+1}\,dx &= \{u=x^3+1;\; du=3x^2\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{3}\int 2^u\,du = \frac{2^u}{3\,\log 2}+C = \frac{2^{x^3+1}}{3\,\log 2}+C.\end{aligned}$$

5.6.16 Bestäm $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$.

Notera att $(x^2+2x+3)' = 2x+2 = 2(x+1)$. Vi kan skriva om integranden som

$$\frac{1/2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,(x^2+2x+3)'.$$

Substitutionen $u=x^2+2x+3$ förenklar alltså integralen dramatiskt.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx &= \{u=x^2+2x+3;\; du=2(x+1)\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u}+C = \sqrt{x^2+2x+3}+C.\end{aligned}$$

5.6.22 Bestäm $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Uttrycket inom rottecknet har derivatan $-2x$, och det är inte riktigt den faktorn vi har i täljaren. Men om vi delar upp integralen i två delar,

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

så har den första integralen just den önskade derivatan i täljaren (sånär som på en faktor -2). Den första integralen blir

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \{u=1-x^2;\; du=-2x\,dx\}\\ &= -\tfrac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u}+C = -\sqrt{1-x^2}+C.\end{aligned}$$

Den andra integralen känner vi till den primitiva funktionen till.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C.$$

Alltså är

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

5.6.28 Bestäm $\int \sin^4 t\,\cos^5 t\,dt$.

Som integranden står är det inte lätt att se någon kombination av typen

$$f(u)\cdot u',$$

men om vi använder den trigonometriska ettan och skriver om uttrycket till

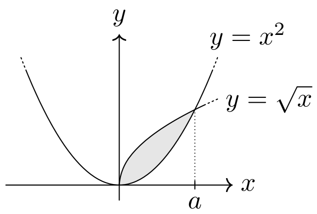
$$\sin^4 t \cdot (1-\sin^2 t)^2 \cdot \cos t$$

så ser vi att $u = \sin t$ är en lämplig substitution.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 t\, \cos^5 t\, dt &= \{u = \sin t;\ du = \cos t\, dt\}\\ &= \int u^4(1-u^2)^2\, du = \int (u^4 + u^8 - 2u^6)\, du\\ &= \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{9}u^9 - \tfrac{2}{7}u^7 + C = \tfrac{1}{5}\sin^5 t + \tfrac{1}{9}\sin^9 t - \tfrac{2}{7}\sin^7 t + C.\end{aligned}$$

5.7.2 Finn arean av området som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{x}$ och $y = x^2$.

Vi ritar först upp kurvorna och området.



Vi ser att området begränsas ovanifrån av kurvan $y = \sqrt{x}$ och nertill av kurvan $y = x^2$. Områdets area blir därför

$$A = \int_0^a (\sqrt{x} - x^2)\, dx.$$

För att kunna räkna ut integralen behöver vi bestämma värdet på a som är x-koordinaten för skärningspunkten mellan kurvorna $y = x^2$ och $y = \sqrt{x}$. Talet a ska alltså uppfylla ekvationen

$$\sqrt{a} = a^2. \qquad (*)$$

Vi kvadrerar,

$$a = a^4 \qquad \Leftrightarrow \qquad a^3(a-1) = 0,$$

och ser att $a = 1$ är det sökta värdet. Eftersom vi kvadrerade $(*)$ och funktionen $x \mapsto x^2$ inte är en-entydig så måste vi förvissa oss om att $a = 1$ inte är en falsk rot. Stoppar vi in $a = 1$ i $(*)$ fås

$$\begin{aligned}\text{VL av } (*) &= \sqrt{1} = 1,\\ \text{HL av } (*) &= 1^2 = 1.\end{aligned}$$

Arean ges alltså av

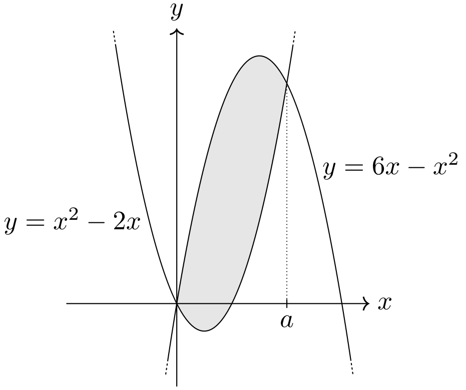
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \Big[\, \tfrac{2}{3}x\sqrt{x} - \tfrac{1}{3}x^3 \,\Big]_0^1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}.$$

5.7.4 Finn arean av området som begränsas av kurvorna $y = x^2 - 2x$ och $y = 6x - x^2$.

Vi ska först rita upp de två kurvorna och området de innesluter. Kvadratkomplettering ger

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \qquad (1)$$
$$y = 6x - x^2 = -(x-3)^2 + 9 \qquad (2)$$

Alltså har kurvan i (1) ett minimivärde -1 i punkten $x = 1$, och kurvan i (2) har ett maximivärde 9 i punkten $x = 3$. Båda kurvorna är dessutom parabler.



Området begränsas ovanifrån av kurvan $y = 6x - x^2$ och nertill av kurvan $y = x^2 - x$. Områdets area ges av integralen

$$\int_0^a \big(6x - x^2 - (x^2 - 2x)\big)\,dx = \int_0^a (8x - 2x^2)\,dx,$$

där integrationsgränserna är skärningspunkterna mellan kurvorna. Punkten $x = a$ uppfyller därmed ekvationen

$$a^2 - 2a = 6a - a^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad a(a-4) = 0.$$

Alltså är $a = 4$.

Området area ges alltså av integralen

$$\int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx = \Big[\,4x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\,\Big]_0^4 = 4\cdot 16 - \tfrac{2}{3}\cdot 64 - (0-0) = 64/3.$$

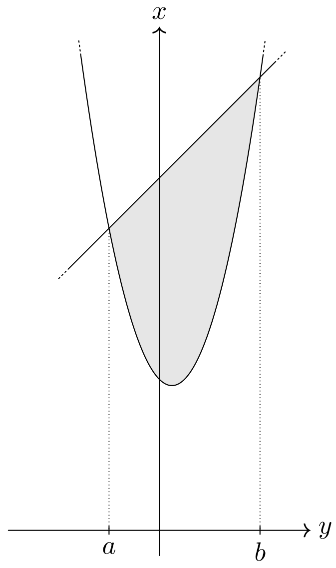
5.7.6 Bestäm arean av området som begränsas av kurvorna $x - y = 7$ och $x = 2y^2 - y + 3$.

Den andra kurvan är uttryckt i formen

$$x = x(y).$$

Det är därför enklare att betrakta y-variabeln som den oberoende variabeln och x-variabeln som den beroende.

För att bestämma den andra kurvans form kvadratkompletterar vi



$$\begin{aligned} x &= 2y^2 - y + 3 = 2(y - \tfrac{1}{4})^2 - \tfrac{1}{8} + 3 \\ &= 2(y - \tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{23}{8}. \end{aligned}$$

Alltså har kurvan ett x-minimum $\frac{23}{8}$ i $y = \frac{1}{4}$ och är parabelformad.

Den första kurvan är en enkel rät linje

$$x = y - 7.$$

Arean ges av integralen

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \big(y + 7 - (2y^2 - y + 3)\big)\,dy \\ &= \int_a^b (-2y^2 + 2y + 4)\,dy. \end{aligned}$$

Vi behöver bestämma skärningspunkterna $y = a$ och $y = b$. De är båda rötter till ekvationen

$$y + 7 = 2y^2 - y + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 - y - 2 = 0.$$

Denna andragradsekvation har lösningarna $y = -1$ och $y = 2$. Alltså är $a = -1$ och $b = 2$.

Området area blir

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (-2y^2 + 2y + 4)\,dy = \Big[\,-\tfrac{2}{3}y^3 + y^2 + 4y\,\Big]_{-1}^2 \\ &= -\tfrac{2}{3}\cdot 8 + 4 + 8 - \big(\tfrac{2}{3} + 1 - 4\big) = 9. \end{aligned}$$

5.7.30 Bestäm arean av den slutna ögla som kurvan $y^2 = x^4(2+x)$ beskriver till vänster om origo.

Om vi betraktar kurvuttrycket

$$y^2 = x^4(2+x) \tag{$*$}$$

kan vi notera att om punkten (x,y) ligger på kurvan så ligger även punkten $(x,-y)$ på kurvan. Kurvan är alltså symmetrisk kring x-axeln.

Vidare ser vi att om $x < -2$ så är HL är negativt och eftersom VL är en kvadrat kan inte $(*)$ vara uppfylld, d.v.s. det finns inga punkter till vänster om $x = -2$.

Från $(*)$ kan vi få två explicita uttryck för y,

$$y = \pm x^2\sqrt{x+2}. \tag{$\dagger$}$$

Kurvan består alltså av grafen till de två funktionerna ovan. Från $(\dagger)$ ser vi också att ändpunkten $x = -2$ är en singulär punkt. I en omgivning av $x = -2$ har kurvan utseendet

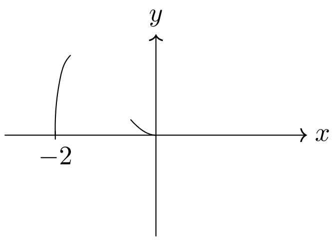
$$y = \pm x^2\sqrt{x+2} = \pm\bigl(4 + O(x+2)\bigr)\sqrt{x+2} = \pm 4\sqrt{x+2} + O(x+2)^{3/2}.$$

Kurvan har alltså en $\sqrt{\ }$-singularitet i $x = -2$. I grafens andra ändpunkt i $x = 0$ har kurvan utseendet

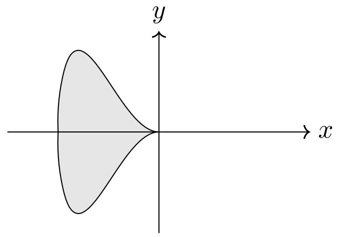
$$y = \pm x^2\sqrt{2+x} = \pm x^2\bigl(\sqrt{2} + O(x)\bigr) = \pm\sqrt{2}\,x^2 + O(x)^3,$$

alltså ett kvadratisk nollställe.

Om vi skisserar delarna av kurvan kring $x = -2$ och $x = 0$, och begränsar oss till positiva y-värden så får vi figuren nedan.



Det finns visserligen en extrempunkt mellan $x = -2$ och $x = 0$ (Rolles sats) men annars är grafen ganska ordinär däremellan. Fyller vi i mellanrummen i figuren ovan får vi ett ungefärligt utseende på området.



Arean ges av integralen

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} \bigl(x^2\sqrt{x+2} - (-x^2\sqrt{x+2})\bigr)\,dx = 2\int_{-2}^{0} x^2\sqrt{2+x}\,dx \\
&= \{u = 2+x;\ du = dx\} = 2\int_0^2 (u-2)^2\sqrt{u}\,du \\
&= 2\int_0^2 (u^{5/2} - 4u^{3/2} + 4u^{1/2})\,du = 2\Bigl[\tfrac{2}{7}u^{7/2} - \tfrac{8}{5}u^{5/2} + \tfrac{8}{3}u^{3/2}\Bigr]_0^2 \\
&= 2\Bigl(\tfrac{2}{7}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2} - \tfrac{8}{5}\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2} + \tfrac{8}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{2} - (0-0+0)\Bigr) = \tfrac{256}{105}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

6.1.2 Bestäm $\displaystyle\int (x+3)e^{2x}\,dx$.

Om vi tittar på formeln för partialintegrering

$$\int u\cdot v\,dx = U\cdot v - \int U\cdot v'\,dx$$

så ser vi att om vi väljer $v = x+3$ så kommer den faktorn att deriveras bort i högerledets integralterm. Detta förutsätter givetvis att vi kan hitta en primitiv funktion U till den andra faktorn $u = e^{2x}$ och dessutom integrera den. Vi prövar!

$$\begin{aligned}\int (x+3)e^{2x}\,dx &= \tfrac{1}{2}(x+3) - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\cdot 1\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}e^{2x}(x+3) - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}e^{2x} + C = \tfrac{1}{2}e^{2x}(x+\tfrac{5}{2}) + C.\end{aligned}$$

6.1.6 Bestäm $\int x(\log x)^3\,dx$.

Integranden består av två faktorer x och $(\log x)^3$. Om vi ska använda partialintegrering måste vi bestämma vilken faktor vi ska derivera och vilken vi ska integrera. Ofta när logaritmfaktorer förekommer väljer man att derivera dessa.

$$\begin{aligned}\int x(\log x)^3\,dx &= \tfrac{1}{2}x^2\cdot(\log x)^3 - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{3(\log x)^2}{x}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}x^2(\log x)^3 - \tfrac{3}{2}\int x(\log x)^2\,dx.\end{aligned}$$

Trots partialintegreringen är integralen fortfarande knepig, men notera att problemet faktiskt har reducerats något. Istället för $\log x$ upphöjt till 3 har vi $\log x$ upphöjt till 2. Om vi fortsätter att partialintegrera kanske logaritmfaktorn förenklas ytterligare,

$$\begin{aligned}\int x(\log x)^2\,dx &= \tfrac{1}{2}x^2\cdot(\log x)^2 - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{2\log x}{x}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \int x\log x\,dx.\end{aligned}$$

En sista partialintegrering eliminerar $\log x$ helt.

$$\int x\log x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\cdot\log x - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\log x - \tfrac{1}{4}x^2 + C.$$

Sammanställer vi räkningarna fås

$$\begin{aligned}\int x(\log x)^3\,dx &= \tfrac{1}{2}x^2(\log x)^3 - \tfrac{3}{2}\Big(\tfrac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \tfrac{1}{2}x^2\log x + \tfrac{1}{4}x^2 + C\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}x^2(\log x)^3 - \tfrac{3}{4}x^2(\log x)^2 + \tfrac{3}{4}x^2\log x - \tfrac{3}{8}x^2 + C.\end{aligned}$$

6.1.8 Bestäm $\int x^2\arctan x\,dx$.

Vi kan utläsa två faktorer i integranden, x^2 och $\arctan x$. Om vi använder partialintegrering ska vi derivera den ena och integrera den andra. Visserligen skulle x^2:s gradtal sjunka med ett steg om vi deriverade x^2, men att integrera $\arctan x$ verkar motbjudande. Vi deriverar istället $\arctan x$ och integrerar x^2, och hoppas på det bästa.

$$\begin{aligned}\int x^2\arctan x\,dx &= \tfrac{1}{3}x^3\cdot\arctan x - \int \tfrac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \tfrac{1}{3}x^3\cdot\arctan x - \tfrac{1}{3}\int\frac{x\cdot x^2}{1+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Integralen kan förenklas med substitutionen $u = x^2+1$,

$$\begin{aligned}\int\frac{x\cdot x^2}{1+x^2}\,dx &= \{u = x^2+1;\ du = 2x\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int\frac{u-1}{u}\,du = \tfrac{1}{2}\int\Big(1-\frac{1}{u}\Big)\,du = \tfrac{1}{2}\big(u-\log u\big) + C.\end{aligned}$$

Alltså är

$$\int x^2\arctan x\,dx = \tfrac{1}{3}x^3\arctan x - \tfrac{1}{6}\big(1+x^2-\log(1+x^2)\big) + C.$$

6.1.13 Bestäm $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx$.

Återigen har vi problemet med vilken av faktorerna e^{2x} och $\sin 3x$ som vi ska derivera respektive integrera. I detta fall verkar båda kombinationerna vara lika enkla, så låt oss välja att integrera e^{2x} och derivera $\sin 3x$ (utan speciell anledning).

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin 3x\,dx &= \tfrac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin 3x - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\cdot 3\cos 3x\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.\end{aligned}$$

Vi fick nästan tillbaka samma integral; sinus ersatt med cosinus. Kanske vi kan få tillbaka sinus-funktionen om vi partialintegrerar ytterligare en gång.

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos 3x\,dx &= \tfrac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\cdot(-3\sin 3x)\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \tfrac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.\end{aligned}$$

Nu fick vi tillbaka vår ursprungsintegral! Alltså har vi visat att

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \tfrac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Samlar vi integraltermerna i ena ledet fås

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \tfrac{2}{13}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + C.$$

6.1.14 Bestäm $\displaystyle\int xe^{\sqrt{x}}\,dx$.

Faktorn $e^{\sqrt{x}}$ verkar enklast att derivera. Partialintegrering ger att

$$\int xe^{\sqrt{x}}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\cdot e^{\sqrt{x}} - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2e^{\sqrt{x}} - \tfrac{1}{4}\int x^{3/2}e^{\sqrt{x}}\,dx.$$

Tyvärr verkar detta inte förenkla integralen. Vi har fortfarande kvar den besvärliga $e^{\sqrt{x}}$-faktorn och dessutom har exponenten för x-faktorn ökat.

Låt oss istället pröva en annan strategi. Substituera $u=\sqrt{x}$.

$$\int xe^{\sqrt{x}}\,dx = \{u=\sqrt{x};\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\} = 2\int u^3e^u\,du.$$

Denna integral är enklare att partialintegrera. Vi väljer att derivera u^3-faktorn och fortsätta partialintegrera tills vi eliminerat u^3 helt.

$$\begin{aligned}\int u^3e^u\,du &= u^3e^u - \int 3u^2e^u\,du = u^3e^u - 3\Bigl(u^2e^u - \int 2ue^u\,du\Bigr)\\ &= u^3e^u - 3\Bigl(u^2e^u - 2\Bigl(ue^u - \int 1\cdot e^u\,du\Bigr)\Bigr)\\ &= u^3e^u - 3u^2e^u + 6ue^u - 6e^u + C.\end{aligned}$$

Med den ursprungliga variabeln är

$$\int xe^{\sqrt{x}}\,dx = \bigl(2x^{3/2} - 6x + 12\sqrt{x} - 12\bigr)e^{\sqrt{x}} + C.$$

6.1.32 Härled en reduktionsformel för

$$I_n = \int_0^{\pi/2} x^n\sin x\,dx$$

och bestäm I_6.

Idéen är att vi uttrycker I_n i termer av lägre ordningars uttryck i en s.k. reduktionsformel, d.v.s.

$$I_n = f(I_{n-1}, I_{n-2}, \dots).$$

På så sätt har vi förenklat problemet något. Integralerna I_{n-1}, I_{n-2} o.s.v. kan i sin tur, med samma formel, uttryckas i termer av I_{n-2}, I_{n-3} o.s.v.

Genom att fortsätta nysta upp formlerna kommer vi till slut till några integraler av så pass låg ordning att vi direkt kan räkna ut dem.

Låt oss börja med att partialintegrera I_n. Vi deriverar x^n (vars gradtal då sjunker med ett steg) och integrerar $\sin x$.

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[\, x^n \cdot (-\cos x) \Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} n x^{n-1} \cdot (-\cos x)\, dx \\ &= -(\pi/2)^n \cos \pi/2 + n \int_0^{\pi/2} x^{n-1} \cos x \, dx = n \int_0^{\pi/2} x^{n-1} \cos x \, dx \end{aligned}$$

Vi fick inte riktigt tillbaka en integral som vi kan uttrycka i termer av I_k:na. Om vi däremot partialintegrerar ytterligare en gång så borde cosinus-faktorn återgå till en sinus-faktor.

$$\begin{aligned} n \int_0^{\pi/2} x^{n-1} \cos x \, dx &= n \Big[\, x^{n-1} \sin x \Big]_0^{\pi/2} - n \int_0^{\pi/2} (n-1) x^{n-1} \sin x \, dx \\ &= n(\pi/2)^{n-1} - n(n-1) I_{n-2}. \end{aligned}$$

Alltså är reduktionsformeln

$$I_n = n(\pi/2)^{n-1} - n(n-1) I_{n-2}.$$

Vi lägger märke till att formeln ovan uttrycker I_n i termer av I_{n-2}, d.v.s. förenklar integralen med två steg i taget.

Genom att succesivt räkna ut I_0, I_2 I_4 och I_6 når vi alltså fram till målet.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi/2} = -0 - (-1) = 1, \\ I_2 &= 2 \cdot \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{2-1} - 2 \cdot 1 \cdot I_0 = \pi - 2, \\ I_4 &= 4 \cdot \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{4-1} - 4 \cdot 3 \cdot I_2 = \tfrac{1}{2}\pi^3 - 12(\pi - 2) = \tfrac{1}{2}\pi^3 - 12\pi + 24, \\ I_6 &= 6 \cdot \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{6-1} - 6 \cdot 5 \cdot I_4 = \tfrac{3}{16}\pi^5 - 30\big(\tfrac{1}{2}\pi^3 - 12\pi + 24\big) \\ &= \tfrac{3}{16}\pi^5 - 15\pi^3 + 360\pi - 720. \end{aligned}$$

Bestäm $\displaystyle\int \arctan x \, dx$.

Vid första påsyn verkar integralen hopplös. Knepet är att se integranden som en produkt,

$$1 \cdot \arctan x.$$

Vi partialintegrerar och väljer att derivera $\arctan x$ och integrera 1.

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

I integralen i högerledet använder vi substitutionen $u = 1 + x^2$,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2}\, dx &= \{u = x^2 + 1;\ du = 2x\, dx\} \\ &= \tfrac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2} \log u + C = \tfrac{1}{2} \log(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

Sammantaget får vi

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \tfrac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C.$$

Beräkna $\displaystyle\int \log x \, dx$.

Vi använder tricket från förra uppgiften och ser integranden som en produkt av två faktorer,

$$1 \cdot \log x.$$

Vi partialintegrerar och väljer att derivera $\log x$ och integrera 1.

$$\int \log x \, dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \log x - x + C.$$