Lektion12, Envariabelanalys, den 16 november 1999

5.4.4 Beräkna integralen

$$\int_0^2 (3x+1)\,dx$$

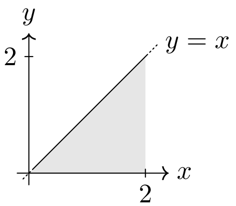
genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Linjäriteten ger att

$$\int_0^2 (3x+1)\,dx = 3\underbrace{\int_0^2 x\,dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_0^2 1\,dx}_{\mathrm{II}}.$$

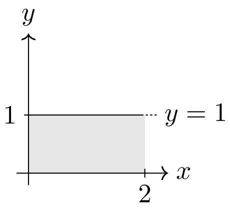
Vi undersöker de två integralerna i högerledet var för sig.

I Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = \tfrac{1}{2}\cdot \text{basen}\cdot \text{höjden} = 2$$

II Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = \text{basen}\cdot \text{höjden} = 2$$

Alltså är

$$\int_0^2 (3x+1)\,dx = 3\cdot 2 + 2 = 8.$$

5.4.10 Beräkna integralen

$$\int_{-a}^{a} (a-|s|)\,ds$$

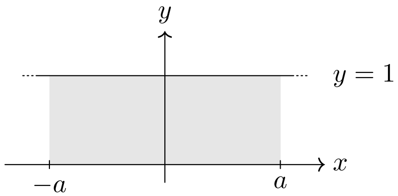
genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Låt oss för enkelhets skull anta att $a \geq 0$. Linjäriteten ger att

$$\int_{-a}^{a} (a-|s|)\,ds = a\underbrace{\int_{-a}^{a} 1\,ds}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\int_{-a}^{a} |s|\,ds}_{\mathrm{II}}.$$

Vi undersöker de två integralerna var för sig.

I Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = \text{basen}\cdot \text{höjden} = 2a$$

Alltså är $\mathrm{I} = 2a$.

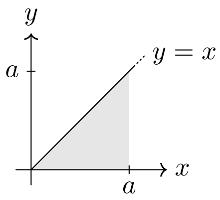
II Sätt $f(s) = |s|$. Vi har att

$$f(-s) = |-s| = |s| = f(s).$$

d.v.s. f är en jämn funktion, och då är

$$\mathrm{II} = 2\int_0^a |s|\,ds = \{|s| = s \text{ för } s \geq 0\} = 2\int_0^a s\,ds.$$

Integralen i högerledet har samma värde som arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = \tfrac{1}{2}\cdot \text{basen}\cdot \text{höjden} = a^2/2$$

Alltså är $\mathrm{II} = a^2$.

Sammantaget får vi att

$$\int_{-a}^{a} (a-|s|)\,ds = a\cdot \mathrm{I} - \mathrm{II} = 2a^2 - a^2 = a^2.$$

Anm. Om $a<0$ blir svaret $3a^2$.

5.4.11 Beräkna integralen

$$\int_{-1}^{1} (u^5 - 3u^3 + \pi)\,du$$

genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Linjäriteten ger att

$$\int_{-1}^{1} (u^5 - 3u^3 + \pi)\,du = \underbrace{\int_{-1}^{1} u^5\,du}_{\mathrm{I}} - 3\underbrace{\int_{-1}^{1} u^3\,du}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\int_{-1}^{1} \pi\,du}_{\mathrm{III}}$$

Vi undersöker integralerna var för sig.

I Om vi sätter $f(u) = u^5$ så noterar vi att

$$f(-u) = (-u)^5 = -u^5 = -f(u),$$

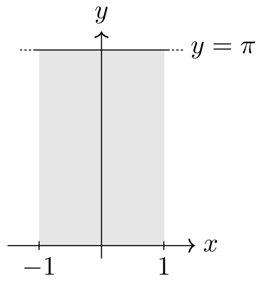
d.v.s. integranden är udda. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen noll.

II Med $f(u) = u^3$ noterar vi att

$$f(-u) = (-u)^3 = -u^3 = -f(u),$$

d.v.s. integranden är udda. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen noll.

III Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



area $= 2\cdot\pi = 2\pi$

Alltså är $\mathrm{III} = 2\pi$.

Sammantaget är det bara den tredje integralen som ger ett bidrag

$$\int_{-1}^{1} (u^5 - 3u^3 + \pi)\,du = \mathrm{I} - 3\cdot\mathrm{II} + \mathrm{III} = 2\pi.$$

5.4.14 Beräkna integralen

$$\int_{-3}^{3} (2+t)\sqrt{9-t^2}\,dt$$

genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Linjäriteten ger att

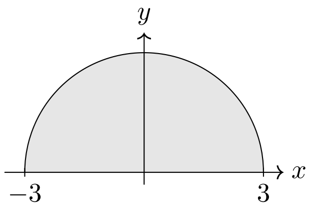
$$\int_{-3}^{3} (2+t)\sqrt{9-t^2}\,dt = 2\underbrace{\int_{-3}^{3} \sqrt{9-t^2}\,dt}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{-3}^{3} t\sqrt{9-t^2}\,dt}_{\mathrm{II}}.$$

Vi behandlar integralerna i högerledet separat.

I Om vi kvadrerar funktionen $y = \sqrt{9 - x^2}$ får vi

$$y^2 = 9 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 9.$$

Vår funktion beskriver alltså övre delen av en cirkel med radie 3 och mittpunkt i origo. Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \text{radie}^2 = \tfrac{9}{2}\pi$$

Alltså är $\text{I} = \frac{9}{2}\pi$.

II Sätt $f(t) = t\sqrt{9 - t^2}$. Vi har att

$$f(-t) = (-t)\sqrt{9 - (-t)^2} = -t\sqrt{9 - t^2} = -f(t),$$

d.v.s. integranden är en udda funktion. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen 0.

Sammantaget är

$$\int_{-3}^{3} (2 + t)\sqrt{9 - t^2}\, dt = 2 \cdot \text{I} + \text{II} = 2 \cdot \tfrac{9}{2}\pi + 0 = 9\pi.$$

5.4.24 Givet att $\int_0^a x^2\, dx = a^3/3$, beräkna

$$\int_{-6}^{6} x^2(2 + \sin x)\, dx.$$

Linjäriteten ger att

$$\int_{-6}^{6} x^2(2 + \sin x)\, dx = 2 \underbrace{\int_{-6}^{6} x^2\, dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{-6}^{6} x^2 \sin x\, dx}_{\text{II}}.$$

Vi beräknar de två integralerna i högerledet separat.

I Sätt $f(x) = x^2$. Vi har då att

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

d.v.s. integranden är jämn. Vi får att

$$\text{I} = 2\int_0^6 x^2\, dx.$$

Med formeln i uppgiftstexten får vi att

$$\text{I} = 2 \cdot 6^3/3 = 144.$$

II Sätt $f(x) = x^2 \sin x$. Vi har att

$$f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = x^2(-\sin x) = -x^2 \sin x = -f(x),$$

d.v.s. funktionen är udda. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen noll.

Sammantaget är

$$\int_{-6}^{6} x^2(2 + \sin x)\, dx = 2 \cdot \text{I} + \text{II} = 2 \cdot 144 + 0 = 288.$$

5.4.30 Finn medelvärdet av $g(x) = x + 2$ i intervallet $[a, b]$.

Medelvärdet ges av integralen

$$\hat{g} = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x+2)\,dx.$$

Linjäriteten ger att

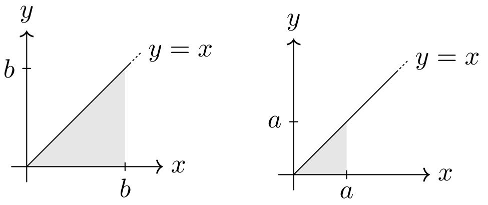
$$\hat{g} = \frac{1}{b-a}\underbrace{\int_a^b x\,dx}_{\mathrm{I}} + \frac{2}{b-a}\underbrace{\int_a^b dx}_{\mathrm{II}}.$$

Vi behandlar de två integralerna separat.

I Vi kan skriva om integralen som

$$\int_a^b x\,dx = \left[\int_0^b - \int_0^a\right] x\,dx = \int_0^b x\,dx - \int_0^a x\,dx.$$

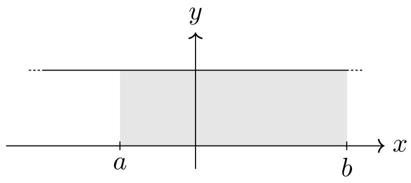
De två integralerna i högerledet har samma värde som arean av respektive triangel i figuren nedan.



Alltså är

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

II Integralens värde är arean av det gråfärgade området nedan.



area $= (b-a)\cdot 1 = b - a$

Alltså är

$$\mathrm{II} = b - a.$$

Medelvärdet är alltså

$$\hat{g} = \frac{1}{b-a}\cdot \mathrm{I} + \frac{2}{b-a}\cdot \mathrm{II} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} + \frac{2(b-a)}{b-a} = \frac{a+b}{2} + 2.$$

5.5.2 Beräkna $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.

Vi vet att

$$\frac{d}{dx}x^{3/2} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Alltså är

$$\frac{d}{dx}\bigl(\tfrac{2}{3}x^{3/2}\bigr) = \sqrt{x}.$$

Detta visar att $\frac{2}{3}x^{3/2}$ är en primitiv funktion till $\sqrt{x}$. Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \Bigl[\tfrac{2}{3}\sqrt{x}\Bigr]_0^4 = \tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} - \tfrac{2}{3}\cdot 0\sqrt{0} = 16/3.$$

5.5.6 Beräkna $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\Bigl(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\Bigr)\,dx$.

En primitiv funktion till $x^{-2} - x^{-3}$ är

$$\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right]_{-2}^{-1}$$
$$=-\frac{1}{(-1)}+\frac{1}{2\cdot(-1)^2}-\left(-\frac{1}{(-2)}+\frac{1}{2\cdot(-2)^2}\right)$$
$$=1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}=\tfrac{7}{8}.$$

5.5.10 Beräkna $\displaystyle\int_4^9\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$

En primitiv funktion till $x^{1/2}-x^{-1/2}$ är

$$\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^{1/2}}{1/2}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_4^9\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}\right]_4^9$$
$$=\tfrac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}-2\cdot\sqrt{9}-\left(\tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4}-2\cdot\sqrt{4}\right)$$
$$=\tfrac{2}{3}\cdot 9\cdot 3-2\cdot 3-\left(\tfrac{2}{3}\cdot 4\cdot 2-2\cdot 2\right)$$
$$=18-6-\tfrac{16}{3}+4=32/3.$$

5.5.16 Beräkna $\displaystyle\int_{-2}^{2}(e^x-e^{-x})\,dx.$

En primitiv funktion till e^x-e^{-x} är

$$e^x-\frac{e^{-x}}{-1}=e^x+e^{-x}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_{-2}^{2}(e^x-e^{-x})\,dx=\left[e^x+e^{-x}\right]_{-2}^{2}=e^2+e^{-2}-(e^{-2}+e^2)=0.$$

Anm. Alternativt kan man lägga märke till att integranden är udda och att integrationsintervallet är origosymmetriskt, varför integralen är noll.

5.5.18 Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{1}2^x\,dx.$

Vi har att

$$\frac{d}{dx}2^x=2^x\cdot\log 2 \qquad\Leftrightarrow\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\log 2}\right)=2^x.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_{-1}^{1}2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{\log 2}-\frac{2^{-1}}{\log 2}=\frac{3/2}{\log 2}.$$

5.5.20 Beräkna $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Vi erinrar oss att

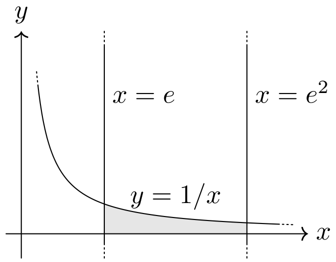
$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Bigl[\arcsin x\Bigr]_0^{1/2} = \arcsin\tfrac{1}{2} - \arcsin 0 = \pi/6.$$

5.5.24 Beräkna arean av området som begränsas av $y = 1/x$, $y = 0$, $x = e$ och $x = e^2$.

Vi ritar först upp en skiss av hur området ser ut

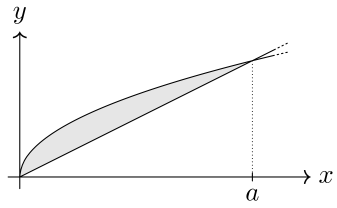


Arean av området ges av integralen

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x} = \Bigl[\log|x|\Bigr]_e^{e^2} = \log e^2 - \log e = 2\log e - \log e = \log e = 1.$$

5.5.28 Beräkna arean av området under $y = \sqrt{x}$ och över $y = x/2$.

Vi ritar en skiss av området.



Områdets area ges av integralen

$$\int_0^a \bigl(\sqrt{x} - x/2\bigr)\,dx,$$

där a är x-koordinaten för den punkt i området som är längst till höger, d.v.s. x-koordinaten för skärningspunkten mellan $y = \sqrt{x}$ och $y = x/2$. Låt oss först bestämma a innan vi ger oss på att beräkna integralen.

I punkten $x = a$ ska kurvorna ha samma y-koordinat, d.v.s.

$$\sqrt{a} = a/2. \qquad (*)$$

Vi kvadrerar.

$$a = a^2/4 \qquad \Leftrightarrow \qquad a(a-4) = 0.$$

Vi ser att $a = 4$ är den lösning vi söker. Eftersom vi som första steg kvadrerade ekvationen finns risken att vi introducerade falska rötter. Vi kontrollerar därför att $a = 4$ verkligen är en riktig lösning till $(*)$.

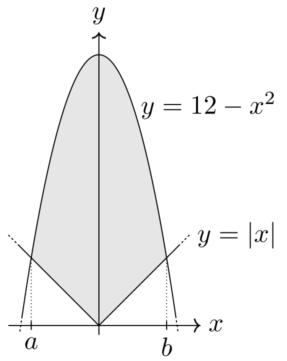
$$\begin{aligned}\text{VL av } (*) &= \sqrt{4} = 2,\\ \text{HL av } (*) &= 4/2 = 2.\end{aligned}$$

Områdets area är alltså

$$\int_0^4 \bigl(\sqrt{x} - x/2\bigr)\,dx = \Bigl[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x} - x^2/4\Bigr]_0^4 = \tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} - 4^2/4 - \bigl(0-0\bigr) = 4/3.$$

5.5.30 Beräkna arean av området över $y = |x|$ och under $y = 12 - x^2$.

Vi ritar först en skiss av området.



Områdets area ges av integralen

$$\int_a^b \bigl(12 - x^2 - |x|\bigr)\,dx,$$

där a och b är x-koordinater för skärningspunkterna mellan $y = |x|$ och $y = 12 - x^2$. Eftersom $y = |x|$ är definierad av två olika uttryck för $x < 0$ resp. $x > 0$ undersöker vi dessa intervall separat.

$x < 0$: I detta intervall är $y = |x| = -x$. Skärningspunkten mellan kurvorna ges av ekvationen

$$12 - x^2 = -x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - x - 12 = 0.$$

Denna andragradare har lösningarna

$$x = 4 \quad \text{och} \quad x = -3.$$

Eftersom endast negativa x ingår i detta intervall är skärningspunktens x-koordinat $a = -3$.

$x > 0$: I detta intervall är $y = |x| = x$. Skärningspunkten mellan kurvorna ges av ekvationen

$$12 - x^2 = x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + x - 12 = 0.$$

Denna andragradsekvation har lösningarna

$$x = 3 \quad \text{och} \quad x = -4.$$

Vi är bara intresserade av positiva x, så skärningspunkten är $b = 3$.

Områdets area ges alltså av integralen

$$\int_{-3}^{3} \bigl(12 - x^2 - |x|\bigr)\,dx.$$

Notera att integranden är en jämn funktion, så integralens värde är lika med

$$2\int_0^3 \bigl(12 - x^2 - |x|\bigr)\,dx = 2\int_0^3 \bigl(12 - x^2 - x\bigr)\,dx$$
$$= 2\Bigl[\,12x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\,\Bigr]_0^3 = 2\Bigl(12\cdot 3 - \tfrac{1}{3}\cdot 3^3 - \tfrac{1}{2}\cdot 3^2 - \bigl(0-0-0\bigr)\Bigr) = 45.$$

5.5.38 Finn medelvärdet av $f(x) = e^{3x}$ i intervallet $[-2, 2]$.

Medelvärdet ges av integralen

$$\bar{f} = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{3x}\,dx.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\bar{f} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{3x}\,dx = \frac{1}{4}\Bigl[\,\tfrac{1}{3}e^{3x}\,\Bigr]_{-2}^{2} = \frac{e^6 - e^{-6}}{12}.$$

5.5.42 Bestäm $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_t^3 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Om vi låter $F(x)$ beteckna en primitiv funktion till $\dfrac{\sin x}{x}$, då är

$$\frac{d}{dt}\int_t^3 \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{d}{dt}\big(F(3) - F(t)\big) = -F'(t).$$

Enligt integralkalkylens huvudsats är

$$F'(t) = \frac{\sin t}{t},$$

varför vi får att

$$\frac{d}{dt}\int_t^3 \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\sin t}{t}.$$

5.5.46 Bestäm $\dfrac{d}{d\theta}\displaystyle\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\,dx$.

Om $F(x)$ betecknar en primitiv funktion till $\dfrac{1}{1-x^2}$, då är

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{d}{d\theta}\big(F(\cos\theta) - F(\sin\theta)\big)\\ &= F'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta) - F'(\sin\theta)\cdot\cos\theta.\end{aligned}$$

Enligt integralkalkylens huvudsats är

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2},$$

varför vi har att

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{1-\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta) - \frac{1}{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\\ &= \frac{-\sin\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta}.\end{aligned}$$