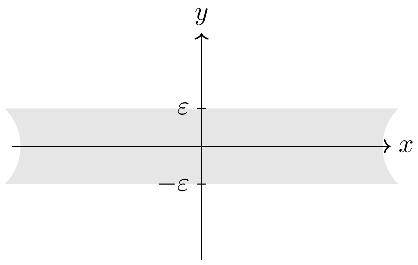
Lektion 1, Envariabelanalys den 8 september 1999

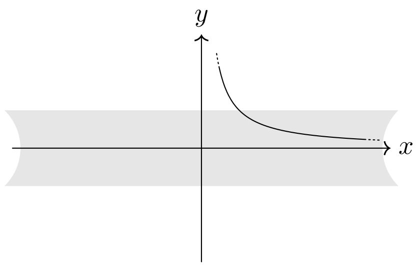
Visa med gränsvärdesdefinitionen att $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

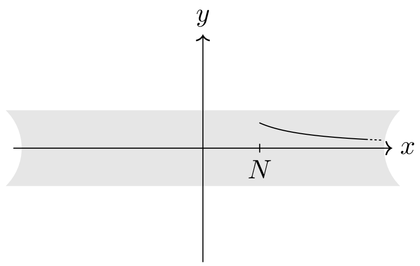
Låt oss rita ut alla punkter i talplanet som har y-koordinat nära det förmodade gränsvärdet 0. Vi får då en mängd som i figuren till höger.



Med "nära 0" menar vi att y-koordinaten ligger mellan $-\varepsilon$ och ε, där ε är något litet positivt tal. Det numeriska värdet på ε är inte så viktigt utan det viktiga är att vi fixerar något ε.

Om vi i vår figur också ritar in grafen till funktionen $f(x) = 1/x$ för $x > 0$ så får vi figuren nedan till vänster.





Vad vi kan lägga märke till är att det finns ett x-värde N så att för $x > N$ så ligger grafen helt inom den gråfärgade omgivningen till 0. Matematiskt skulle vi uttrycka detta som

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon \qquad \text{om } x > N.$$

Givetvis beror värdet på N av hur liten ε är. Om ε väljs mindre än tidigare så blir vi tvungna att välja det nya N:et större. Om vi vill vara tydliga ska vi skriva $N = N(\varepsilon)$ (N beror av ε).

Huvudidéen i gränsvärdesdefinitionen är att oavsett hur litet vi väljer ε ska det alltid finnas ett $N = N(\varepsilon)$ så att grafen för $x > N$ ligger inom den gråfärgade ε-omgivningen till 0.

Om vi ska uttrycka detta i matematiska termer blir detta:

För alla $\varepsilon > 0$ måste det finnas $N = N(\varepsilon)$ så att

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon \qquad \text{för alla } x > N.$$

I vårt exempel är $f(x) = 1/x$, så vi ska alltså ta fram ett N så att

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon \qquad \text{för alla } x > N. \tag{$*$}$$

Vi kan alltid anta att $N > 0$ varför den vänstra olikheten är uppfylld. Renodlar vi frågan blir den: För vilka positiva x är $1/x < \varepsilon$.
Vi löser denna olikhet genom att först multiplicera med x

$$1 < \varepsilon x,$$

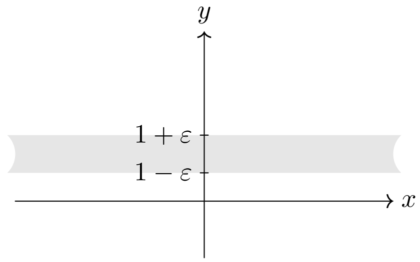
och multiplicera sedan med $1/\varepsilon$

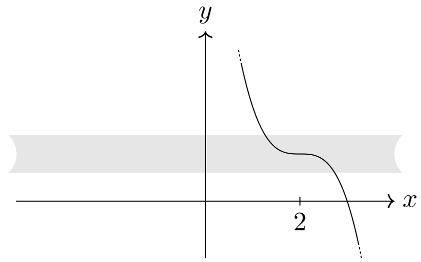
$$1/\varepsilon < x,$$

d.v.s. om vi väljer $x > 1/\varepsilon$ så är olikheten $(*)$ uppfylld.
M.a.o. vi kan välja $N = 1/\varepsilon$. I och med detta har vi visat att $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

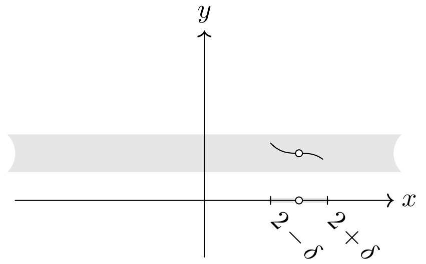
Visa med gränsvärdesdefinitionen att $\lim_{x\to 2} \big(1 - (x-2)^3\big) = 1$.

Vi gör som i det tidigare exemplet och ritar ut de punkter i talplanet som har y-koordinat i en omgivning av det förmodade gränsvärdet 1 (figuren till vänster).





I denna figur ritar vi också in grafen till funktionen $f(x) = 1-(x-2)^3$ (figuren till höger). Notera nu att i närheten av x-värdet 2 ligger grafen inom den gråfärgade ε-omgivningen till y-värdet 1. Genom att välja ett litet intervall kring x-värdet 2 kan vi få grafen helt inom den gråfärgade ε-omgivningen till 1.



Observera att när vi säger ”kring x-värdet 2” så menar vi x-värden i närheten av 2 men vi utesluter värdet 2. Vi kallar ett sådant intervall, som utesluter mittpunkten och har längd 2δ, för en punkterad δ-omgivning till 2.

Gränsvärdesdefinitionen säger nu att oavsett hur litet vi väljer ε så ska det alltid finnas $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att grafen ligger inom den gråfärgade ε-omgivningen till 1 då x tillhör den punkterade δ-omgivningen till 2.

Mera matematiskt lyder detta:

> För alla $\varepsilon > 0$ måste det finnas $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att
>
> $$1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon \qquad \text{för alla } x \neq 2 \text{ i intervallet } (2-\delta, 2+\delta).$$

I vårt fall ska vi undersöka för vilka x som

$$1 - \varepsilon < 1 - (x-2)^3 < 1 + \varepsilon.$$

Multiplicera med -1

$$-1 + \varepsilon > -1 + (x-2)^3 > -1 - \varepsilon.$$

Addera 1

$$\varepsilon > (x-2)^3 > -\varepsilon.$$

Tag tredje roten ur

$$\sqrt[3]{\varepsilon} > x - 2 > -\sqrt[3]{\varepsilon}.$$

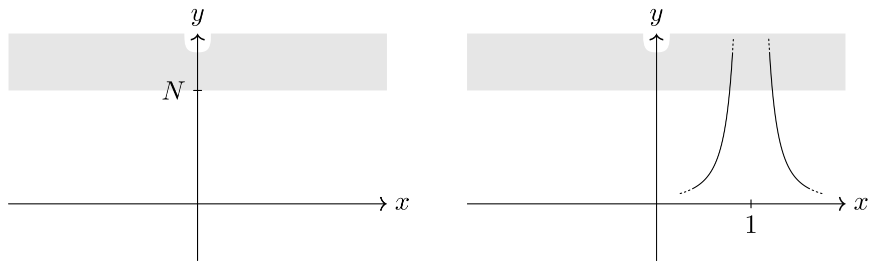
Addera 2

$$2 + \sqrt[3]{\varepsilon} > x > 2 - \sqrt[3]{\varepsilon}.$$

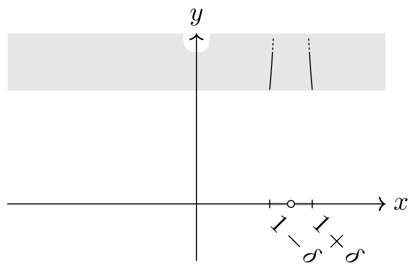
Alltså kan vi välja $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Visa med gränsvärdesdefinitionen att $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$.

Vi ritar först ut de punkter i talplanet med y-koordinat i en omgivning av ∞ (figuren till vänster). Med ”en omgivning av ∞” menar vi alla punkter med y-koordinat större än något givet tal N. Precis som med ε är N:s numeriska värde inte så viktigt.



I vår figur ritar vi nu in grafen till funktionen $f(x) = 1/(x-1)^2$ (figuren till höger). Kring x-värdet 1 ligger grafen inom den gråfärgade omgivningen av ∞, d.v.s. det finns en punkterad δ-omgivning till 1 där grafen helt tillhör omgivningen av ∞.



Gränsvärdesdefinitionen säger nu att oavsett hur vi väljer omgivningen av ∞, d.v.s. hur stor vi väljer N, ska det alltid finnas ett $\delta = \delta(N) > 0$ så att grafen på en punkterad δ-omgivning till 1 tillhör omgivningen av ∞. Den matematiska formuleringen blir:

För alla N måste det finnas $\delta = \delta(N) > 0$ så att

$$f(x) > N \qquad \text{för alla } x \neq 1 \text{ i intervallet } (1-\delta, 1+\delta).$$

Vi ska alltså undersöka för vilka x som

$$\frac{1}{(x-1)^2} > N.$$

Multiplicera båda led med $(x-1)^2$ (som är icke-negativ) och dela med N,

$$\frac{1}{N} > (x-1)^2.$$

Ta kvadratrot

$$-\frac{1}{\sqrt{N}} < x-1 < \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Addera 1

$$1-\frac{1}{\sqrt{N}} < x < 1+\frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Alltså kan vi välja $\delta = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

1.2.10 Bestäm $\lim\limits_{t\to -4} \dfrac{t^2}{4-t}$ eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

Vi använder räknereglerna för gränsvärden och får

$$\lim_{t\to -4} \frac{t^2}{4-t} = \frac{\lim\limits_{t\to -4} t^2}{\lim\limits_{t\to -4}(4-t)} = \frac{(-4)^2}{4-(-4)} = 2. \qquad (*)$$

Egentligen kan vi inte vara säkra på den första likheten innan vi vet att $\lim t^2$ och $\lim(4-t)$ existerar, och att $\lim(4-t) \neq 0$. Rent logiskt borde vi alltså först räkna ut dessa gränsvärden och därefter göra uträkningen $(*)$. Man brukar i vanliga fall inte vara så strikt utan undviker gärna denna dubbelskrivning av samma uträkningar.

1.2.13 Bestäm $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

Om vi blint använder räknereglerna för gränsvärden får vi

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-6x+9)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)} = \frac{0}{0}.$$

Ovanstående uträkning är inte korrekt eftersom vi får 0 i nämnaren och då gäller inte gränsvärdesregeln om kvoter.

Vi måste istället skriva om gränsvärdesuttrycket till en form där vi kan använda våra räkneregler. I detta fall faktoriserar vi täljare och nämnare, och förkortar bort den gemensamma faktorn.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)} = \frac{0}{6} = 0.$$

1.2.18 Bestäm $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$ eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

Med inspektion ser vi direkt att både täljare och nämnare går mot noll då $h \to 0$. Genom att förlänga med täljarens konjugat får vi bort kvadratrotsuttrycket i täljaren i utbyte mot ett harmlöst konjugatuttryck i nämnaren.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h+4-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+4}+2} = 1/4\end{aligned}$$

1.2.36 Bestäm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|3x-1|-|3x+1|}{x}$ eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

När $x \to 0$ går täljare och nämnare mot 0. Vi förlänger med täljarens konjugat för att få bort beloppstecknen i differensuttrycket uppe i täljaren.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{|3x-1|-|3x+1|}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\big(|3x-1|-|3x+1|\big)\big(|3x-1|+|3x+1|\big)}{x\big(|3x-1|+|3x+1|\big)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|3x-1|^2-|3x+1|^2}{x\big(|3x-1|+|3x+1|\big)} = \lim_{x\to 0} \frac{(9x^2-6x+1)-(9x^2+6x+1)}{x\big(|3x-1|+|3x+1|\big)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-12x}{x\big(|3x-1|+|3x+1|\big)} = \lim_{x\to 0} \frac{-12}{|3x-1|+|3x+1|} = -6\end{aligned}$$

1.3.4* Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2}{x-x^2}$.

Genom att förlänga täljare och nämnare med $1/x^2$ får vi ett uttryck där vi kan använda gränsvärdesräknereglerna.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2/x^2}{1/x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1-2/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(1/x-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

1.3.6 Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$.

Vi förlänger täljare och nämnare med $1/x^2$ och använder gränsvärdesräknereglerna.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x^2}}{1+\frac{\cos x}{x^2}} = \frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^2}}$$

De återstående gränsvärdesuttrycken beräknar vi med instängningsprincipen.

$$\begin{aligned}\frac{-1}{x^2} \le \frac{\sin x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pm 1}{x^2} = 0 \\ \frac{-1}{x^2} \le \frac{\cos x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pm 1}{x^2} = 0\end{aligned}$$

Därmed är

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x} = 1.$$

1.3.8 Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$.

Vi förlänger med $1/x$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2-1/x}{\frac{1}{x}\sqrt{3x^2+x+1}} = \{x>0\}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2-1/x}{\sqrt{\frac{3x^2+x+1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-1/x}{\sqrt{3+1/x+1/x^2}}.\end{aligned}$$

För att komma vidare behöver vi följande räkneregel

$$\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim f(x)}.$$

Gränsvärdet blir

$$\frac{\lim\,(2-1/x)}{\sqrt{\lim\,(3+1/x+1/x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

1.3.13 Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{3-x}$.

Vi använder gränsvärdesräknereglerna

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3-\lim\limits_{x\to 3^-} x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

1.3.36 Vilka är de horisontella och vertikala asymptoterna till

$$y = \frac{2x-5}{|3x+2|}.$$

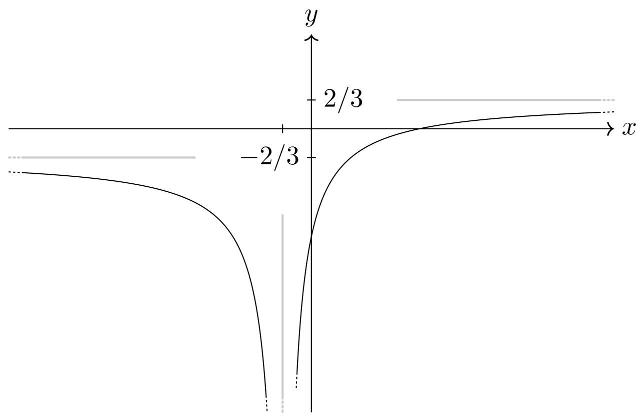
De horisontella och vertikala asymptoterna bestäms av

1. Om $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = b$ då är $y=b$ en horisontell asymptot.
2. Om $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = c$ då är $y=c$ en horisontell asymptot.
3. Om $\lim\limits_{x\to a} y(x) = \pm\infty$ då är $x=a$ en vertikal asymptot.

Vi undersöker dessa fall

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-5}{3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-5/x}{3+2/x} = \dfrac{2}{3}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-5}{-3x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-5/x}{-3-2/x} = -\dfrac{2}{3}$
3. Nämnaren blir 0 då $x=-2/3$. Täljaren är är då negativ. Alltså är $\lim\limits_{x\to-2/3} y(x) = -\infty$.

Alltså är $y=-2/3$ och $y=2/3$ horisontella asymptoter, och $x=-2/3$ är en vertikal asymptot.



Lektion 2, Envariabelanalys den 15 september 1999

1.4.8 Var i definitionsmängden är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{om } x < -1 \\ x^2 & \text{om } x \geq -1 \end{cases}$$

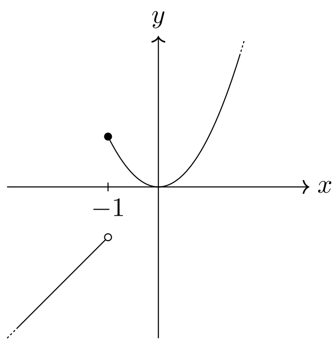
kontinuerlig, vänster- och högerkontinuerlig, och diskontinuerlig?

Funktionerna $x \mapsto x$ och $x \mapsto x^2$ är kontinuerliga överallt där de är definierade, varför den enda möjliga diskontinuitetspunkten är $x = -1$. I punkten $x = -1$ har vi att

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} x = -1, \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} x^2 = 1. \end{aligned}$$

Alltså har vi att f är

kontinuerlig	överallt utom i $x = -1$,
högerkontinuerlig	överallt,
vänsterkontinuerlig	överallt utom i $x = -1$,
diskontinuerlig	i $x = -1$.



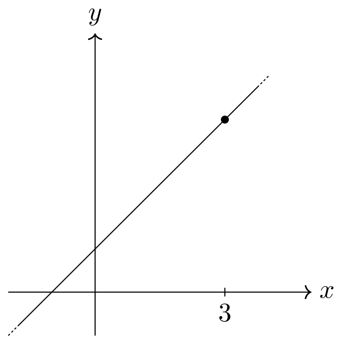
1.4.18 Finn m så att

$$g(x) = \begin{cases} x - m & \text{om } x < 3 \\ 1 - mx & \text{om } x \geq 3 \end{cases}$$

är kontinuerlig för alla x.

Funktionerna $x \mapsto x - m$ och $x \mapsto 1 - mx$ är kontinuerliga överallt där de är definierade. Den enda möjliga diskontinuitetspunkten är i fogen $x = 3$. Vi ska välja m så att g blir kontinuerlig även i punkten $x = 3$. Vi har

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} g(x) &= \lim_{x \to 3^-} (x - m) = 3 - m \\ \lim_{x \to 3^+} g(x) &= \lim_{x \to 3^+} (1 - mx) = 1 - 3m \end{aligned}$$



och för att g ska vara kontinuerlig måste

$$3 - m = 1 - 3m \quad \Leftrightarrow \quad m = -1.$$

SU 17 aug 87 Beräkna $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}$.

Både täljare och nämnare går mot 0 då $x \to \pi/2$. Vi förlänger med $1 + \sin x$ och använder trigonometriska formler

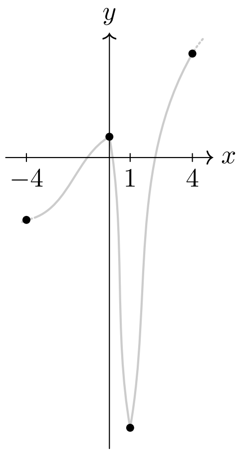
$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} &= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} \frac{1}{\sin x + 1} \\ &= \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\cos^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{\sin x + 1} = \frac{-1}{\lim_{x \to \pi/2} \sin x + 1} = -1/2. \end{aligned}$$

I den sista likheten har vi använt att sinus är kontinuerlig.

1.4.30 Visa att ekvationen $x^3 - 15x + 1 = 0$ har tre rötter i intervallet $[-4, 4]$.

Sätt $f(x) = x^3 - 15x + 1$. Vi har att

$$\begin{aligned} f(-4) &= -3, \\ f(0) &= +1, \\ f(1) &= -13, \\ f(4) &= +5. \end{aligned}$$



Satsen om mellanliggande värden ger att det finns åtminstone en rot i vart och ett av intervallen

$$[-4, 0], \ [0, 1] \text{ och } [1, 4],$$

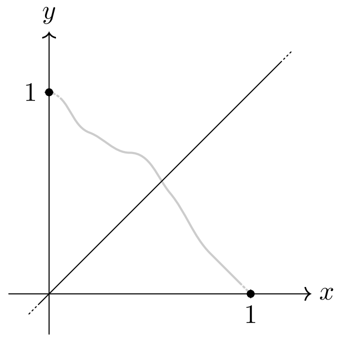
d.v.s. åtminstone tre rötter i intervallet $[-4, 4]$.

Anm. Algebrans fundamentalsats ger att det finns exakt tre rötter till ekvationen (se linjär algebra).

SU 10 jan 89 Låt f vara en kontinuerlig funktion i intervallet $[0, 1]$ sådan att $f(0) = 1$ och $f(1) = 0$. Visa att det finns ett $x \in [0, 1]$ sådant att $f(x) = x$.

Låt oss rita ut informationen i uppgiftstexten i ett koordinatsystem. Vi vet att funktionen f antar värdet 1 i punkten $x = 0$ och värdet 0 i punkten $x = 1$. Vår uppgift är att visa att grafen till f måste skära linjen $y = x$.

Situationen påminner om den i satsen om mellanliggande värden; grafen till f startar ovanför linjen $y = x$ för att i slutpunkten vara under linjen $y = x$. Mellan startpunkten och slutpunkten borde alltså finnas en skärningspunkt mellan f:s graf och linjen $y = x$.



Vi kan också mycket riktigt använda satsen om mellanliggande värden genom att betrakta funktionen

$$g(x) = f(x) - x.$$

Vi har att $g(0) = f(0) - 0 = 1$ och $g(1) = f(1) - 1 = -1$. Satsen om mellanliggande värden ger att det finns ett $x = x_0 \in [0, 1]$ sådan att $g(x_0) = 0$, vilket betyder att $0 = g(x_0) = f(x_0) - x_0$, d.v.s. $f(x_0) = x_0$.

2.1.4 Finn ekvationen för tangentlinjen till grafen för $y = 6 - x - x^2$ i punkten $x = -2$.

För att bestämma tangentlinjen behöver vi dess lutning och en punkt på linjen. Tangentlinjens lutning ges av gränsvärdet

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{y(-2+h) - y(-2)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{6 - (-2+h) - (-2+h)^2 - \bigl(6 - (-2) - (-2)^2\bigr)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3h - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (3 - h) = 3. \end{aligned}$$

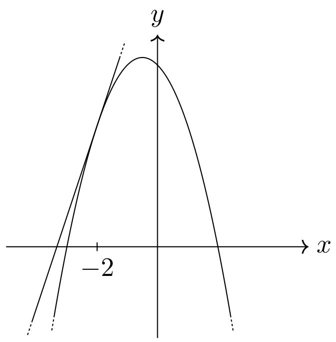
Alltså har tangentlinjen ekvationen

$$y = 3x + m,$$

där m bestäms av att tangentlinjen ska gå genom punkten $\bigl(-2, y(-2)\bigr) = (-2, 4)$,

$$4 = 3 \cdot (-2) + m \quad \Leftrightarrow \quad m = 10.$$

Tangentlinjens ekvation är alltså $y = 3x + 10$.



2.1.24 Finn alla punkter på kurvan $y = 1/x$ där tangentlinjen är vinkelrät mot linjen $y = 4x - 3$.

Vi bestämmer först ekvationen för tangentlinjen till $y = 1/x$ i en godtycklig punkt $x = a$. Tangentlinjens lutning ges av gränsvärdet

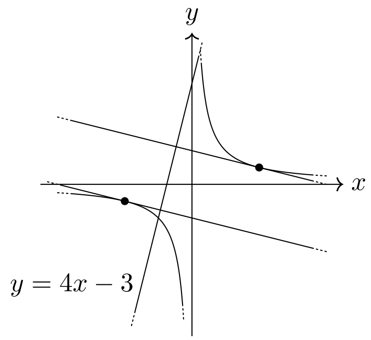
$$\lim_{h\to 0} \frac{y(a+h) - y(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \{\text{gemensam nämnare}\}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{a - (a+h)}{h\,a(a+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\,a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}.$$

Alltså har tangentlinjen ekvationen

$$y = \frac{-1}{a^2}\cdot x + m,$$

där m bestäms av att tangentlinjen går genom punkten $\big(a, y(a)\big) = (a, 1/a)$,

$$\frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2}\cdot a + m \quad\Leftrightarrow\quad m = \frac{2}{a}.$$



Tangentlinjen har därmed ekvationen

$$y = \frac{-1}{a^2}\cdot x + \frac{2}{a}.$$

Eftersom tangentlinjen ska vara vinkelrät mot en linje med lutning 4 söker vi de a-värden där tangentlinjen har lutning $-1/4$, d.v.s.

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad a = \pm 2.$$

Alltså är de sökta punkterna

$$(2, 1/2) \;\text{ och }\; (-2, -1/2).$$

2.2.16 Beräkna derivatan till funktionen

$$s = \frac{1}{3+4t}$$

direkt från definitionen av derivata.

Derivatan ges av gränsvärdet

$$s'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{3+4(t+h)} - \dfrac{1}{3+4t}}{h}$$
$$= \{\text{gemensam nämnare}\} = \lim_{h\to 0} \frac{3+4t-(3+4t+4h)}{h(3+4t)(3+4t+4h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h(3+4t)(3+4t+4h)} = \frac{-4}{(3+4t)^2}.$$

2.2.25 Hur ska funktionen $f(x) = x\operatorname{sgn} x$ definieras i punkten $x = 0$ så att den blir kontinuerlig där? Är den även deriverbar där?

Vi har att

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\cdot(-1) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\cdot(+1) = 0,$$

vilket visar att om vi definierar $f(0) = 0$ så är f kontinuerlig i $x = 0$.

För att undersöka om f är deriverbar i $x = 0$ beräknar vi höger- och vänsterderivatan,

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h\cdot(+1) - 0}{h} = +1$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h\cdot(-1) - 0}{h} = -1.$$

Eftersom $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ är f inte deriverbar i $x = 0$.

2.2.47 Det finns två olika räta linjer som passerar genom punkten $(1,-3)$ och tangerar kurvan $y=x^2$. Finn deras ekvationer.

Låt oss först bestämma ekvationen för tangentlinjen genom en godtycklig punkt $x=a$. Tangentlinjens lutning ges av

$$y'(a) = 2x\big|_{x=a} = 2a.$$

Tangentlinjen har alltså ekvationen

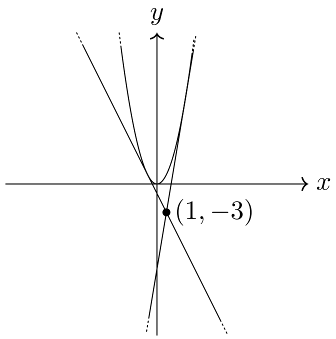
$$y = 2a\cdot x + m,$$

där m bestäms av att linjen ska gå genom punkten (a,a^2),

$$a^2 = 2a\cdot a + m \quad\Leftrightarrow\quad m=-a^2.$$

Vi ska nu välja a så att tangentlinjen passerar genom punkten $(1,-3)$, d.v.s.

$$\begin{aligned}-3 = y(1) = 2a - a^2 \quad &\Leftrightarrow\\ a=3 \ \text{ eller } \ a=-1.\end{aligned}$$



De två linjerna är alltså $y=6x-9$ och $y=-2x-1$.

2.2.48 Finn ekvationer till de två räta linjer som har lutning -2 och tangerar grafen till $y=1/x$.

En linje med lutning -2 har en ekvation med formen

$$y=-2x+m.$$

En sådan linje kan endast tangera grafen till $y=1/x$ i punkter där derivatan är -2,

$$y'(x) \equiv -\frac{1}{x^2} = -2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Linjerna ska alltså gå genom punkterna

$$\Big(\tfrac{1}{\sqrt2}, y(\tfrac{1}{\sqrt2})\Big) = \Big(\tfrac{1}{\sqrt2},\sqrt2\Big) \ \text{ respektive } \ \Big(-\tfrac{1}{\sqrt2}, y(-\tfrac{1}{\sqrt2})\Big) = \Big(-\tfrac{1}{\sqrt2},-\sqrt2\Big).$$

Vi får två fall

1. m anpassas så att linjen går genom $\big(\tfrac{1}{\sqrt2},\sqrt2\big)$,

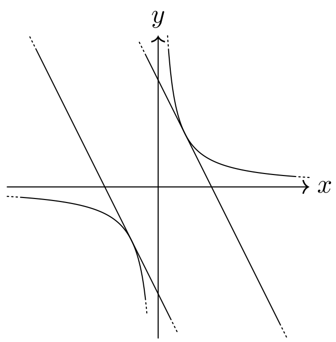
$$\sqrt2 = -2\cdot\frac{1}{\sqrt2} + m \quad\Leftrightarrow\quad m = 2\sqrt2.$$

2. m anpassas så att linjen går genom $\big(-\tfrac{1}{\sqrt2},-\sqrt2\big)$,

$$-\sqrt2 = -2\cdot(-\frac{1}{\sqrt2}) + m \quad\Leftrightarrow\quad m=-2\sqrt2.$$

De två linjernas ekvationer är alltså

$$\begin{aligned} y &= -2x+2\sqrt2\\ y &= -2x-2\sqrt2\end{aligned}$$



Lektion 3, Envariabelanalys den 23 september 1999

2.3.16 Bestäm derivatan av $y = \dfrac{4}{3-x}$.

Vi använder deriveringsregeln för kvoter,

$$y' = \frac{(4)' \cdot (3-x) - 4 \cdot (3-x)'}{(3-x)^2} = \frac{0 \cdot (3-x) - 4 \cdot (-1)}{(3-x)^2} = \frac{4}{(3-x)^2}.$$

2.3.22 Bestäm derivatan av $z = \dfrac{x-1}{x^{2/3}}$.

Vi har att

$$z = \frac{x-1}{x^{2/3}} = x^{1/3} - x^{-2/3}.$$

Detta uttryck kan deriveras termvis

$$z' = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} - (-\tfrac{2}{3})x^{-5/3} = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} + \tfrac{2}{3}x^{-5/3}.$$

2.3.40 Bestäm derivatan

$$\frac{d}{dx}\Bigl(\frac{f(x)}{x^2+f(x)}\Bigr)\Bigr|_{x=2}$$

givet att $f(2) = 2$ och $f'(2) = 3$.

Deriveringsregeln för kvoter ger att

$$\frac{d}{dx}\Bigl(\frac{f(x)}{x^2+f(x)}\Bigr) = \frac{f'(x)\bigl(x^2+f(x)\bigr) - f(x)\bigl(2x+f'(x)\bigr)}{\bigl(x^2+f(x)\bigr)^2} = \frac{x^2f'(x) - 2xf(x)}{\bigl(x^2+f(x)\bigr)^2}.$$

Sätter vi $x = 2$ fås

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Bigl(\frac{f(x)}{x^2+f(x)}\Bigr)\Bigr|_{x=2} &= \frac{2^2 \cdot f'(2) - 2 \cdot 2 \cdot f(2)}{\bigl(2^2+f(2)\bigr)^2} = \{f(2) = 2, f'(2) = 3\}\\ &= \frac{4 \cdot 3 - 4 \cdot 2}{(4+2)^2} = 1/9.\end{aligned}$$

2.4.2 Bestäm derivatan av $y = (1 - x/3)^{99}$.

Uttrycket som vi ska derivera har, grovt sett, utseendet

$$y = (\colorbox{lightgray}{})^{99}.$$

"Någonting upphöjt till 99" är den yttre funktionen medan den gråfärgade delen utgör en inre funktionsdel.

När vi deriverar uttrycket med kedjeregeln, deriverar vi först den yttre funktionen som om den inre gråfärgade delen vore den variabel vi deriverar med avseende på, och sedan multiplicerar vi med derivatan av den inre funktionen,

$$\begin{aligned}y' &= 99\bigl(\colorbox{lightgray}{}\bigr)^{98} \cdot \bigl(\colorbox{lightgray}{}\bigr)'\\ &= 99\bigl(1 - x/3\bigr)^{98} \cdot \bigl(1 - x/3\bigr)'\\ &= 99\bigl(1 - x/3\bigr)^{98} \cdot (-1/3) = -33\bigl(1 - x/3\bigr)^{98}.\end{aligned}$$

2.4.4 Bestäm derivatan av $y = \sqrt{1 - 3x^2}$.

På den grövsta nivån består uttrycket av "roten ur någonting". Med kedjeregeln får vi

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1/2}{\sqrt{\colorbox{lightgray}{}}} \cdot \bigl(\colorbox{lightgray}{}\bigr)' = \frac{1/2}{\sqrt{1-3x^2}} \cdot \bigl(1 - 3x^2\bigr)'\\ &= \frac{1/2}{\sqrt{1-3x^2}} \cdot (-6x) = \frac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}.\end{aligned}$$

2.4.11 Bestäm derivatan av $y = 4x + |4x - 1|$.

Uttryckets andra term består av en sammansättning av beloppsfunktionen och ett förstagradsuttryck

$$y = 4x + |\boxed{}|.$$

Vi deriverar med hjälp av kedjeregeln

$$y' = 4 + \operatorname{sgn}(\boxed{}) \cdot (\boxed{})' = 4 + \operatorname{sgn}(4x-1) \cdot 4.$$

Detta uttryck kan förenklas om vi noterar att $\operatorname{sgn}(4x-1) = +1$ om $4x - 1 > 0$ d.v.s. $x > 1/4$, och $\operatorname{sgn}(4x-1) = -1$ om $x < 1/4$. Svaret blir alltså

$$y' = \begin{cases} 8 & \text{om } x > 1/4, \\ 0 & \text{om } x < 1/4. \end{cases}$$

Anm. Derivatan existerar inte i punkten $x = 1/4$ eftersom vänsterderivatan är 0 medan högerderivatan är 8.

2.4.14 Bestäm derivatan av $f(x) = \left(1 + \sqrt{\dfrac{x-2}{3}}\right)^4$.

Den yttre funktionen i uttrycket är ”någonting upphöjt till 4”. Om vi använder kedjeregeln på denna nivå fås

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^4 = 4\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)'$$

Den inre funktionen består i sin tur av ett rotuttryck som vi använder kedjeregeln på

$$\begin{aligned} &= 4\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)' \\ &= 4\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3 \cdot \left(0 + \frac{1/2}{\sqrt{\dfrac{x-2}{3}}} \cdot \left(\frac{x-2}{3}\right)'\right) \end{aligned}$$

Nu har vi nått ett uttryck som vi direkt kan derivera

$$= 4\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3 \cdot \frac{1/2}{\sqrt{\dfrac{x-2}{3}}} \cdot 1/3$$

Det återstår bara att förenkla uttrycket

$$= \frac{\frac{2}{3}\left(1 + \sqrt{\dfrac{x-2}{3}}\right)^3}{\sqrt{\dfrac{x-2}{3}}}.$$

2.4.16 Bestäm derivatan av $y = \dfrac{x^5\sqrt{3+x^6}}{(4+x^2)^3}$.

Uttrycket består av en kvot av två deluttryck. Om vi sätter

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5\sqrt{3+x^6} \\ g(x) &= (4+x^2)^3 \end{aligned}$$

så är

$$y' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Vi behöver alltså räkna ut derivatan av täljaren $f(x)$ och nämnaren $g(x)$.

$f'(x)$: Täljaren består av en produkt av två funktioner

$$f(x) = x^5 \cdot \sqrt{3+x^6}.$$

Produktregeln ger att

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^5)' \cdot \sqrt{3+x^6} + x^5 \cdot \left(\sqrt{3+x^6}\,\right)' \\ &= 5x^4\sqrt{3+x^6} + x^5\left(\frac{1/2}{\sqrt{3+x^6}} \cdot (3+x^6)'\right) \\ &= 5x^4\sqrt{3+x^6} + x^5\frac{3x^5}{\sqrt{3+x^6}} = \{\text{gemensam nämnare}\} \\ &= \frac{5x^4(3+x^6)+3x^{10}}{\sqrt{3+x^6}} = \frac{15x^4+8x^{10}}{\sqrt{3+x^6}}. \end{aligned}$$

$g'(x)$: Kedjeregeln ger att

$$g'(x) = 3(4+x^2)^2 \cdot (4+x^2)' = 3(4+x^2)^2 \cdot 2x = 6x(4+x^2)^2.$$

Sätter vi samman dessa resultat får vi

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\dfrac{15x^4+8x^{10}}{\sqrt{3+x^6}} \cdot (4+x^2)^3 - x^5\sqrt{3+x^6} \cdot 6x(4+x^2)^2}{(4+x^2)^6} \\ &= \frac{(15x^4+8x^{10})(4+x^2)^3 - x^5(3+x^6)\cdot 6x(4+x^2)^2}{\sqrt{3+x^6}(4+x^2)^6} \\ &= \frac{2x^{12}+32x^{10}-6x^6+60x^4}{\sqrt{3+x^6}(4+x^2)^4}. \end{aligned}$$

Anm. En enklare lösning är att använda logaritmisk derivering (se avsnitt 3.3).

2.4.25 Uttryck derivatan av

$$y = \sqrt{3+2f(x)}$$

i termer av f och f'.

Kedjeregeln ger att

$$y' = \frac{1/2}{\sqrt{3+2f(x)}} \cdot \big(3+2f(x)\big)' = \frac{1/2}{\sqrt{3+2f(x)}} \cdot 2f'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{3+2f(x)}}.$$

2.4.36 Finn ekvationen för tangentlinjen till kurvan

$$y = \sqrt{1+2x^2}$$

i punkten $x = 2$.

Tangentens lutning ges av

$$\begin{aligned} y'(2) &= \frac{d}{dx}\sqrt{1+2x^2}\,\Big|_{x=2} = \frac{1/2}{\sqrt{1+2x^2}}(1+2x^2)'\,\Big|_{x=2} \\ &= \frac{1/2}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot 4x\,\Big|_{x=2} = 4/3. \end{aligned}$$

Tangentlinjens ekvation är alltså

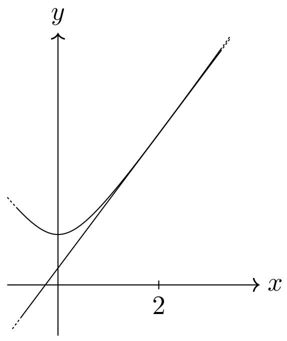
$$y = \tfrac{4}{3}x + m,$$

där m bestäms av att tangentlinjen går genom punkten $(2, \sqrt{1+2\cdot 2^2}\,) = (2,3)$,

$$3 = \tfrac{4}{3}\cdot 2 + m \quad\Leftrightarrow\quad m = 1/3.$$

Tangentlinjen har därmed ekvationen

$$y = \tfrac{4}{3}x + \tfrac{1}{3}.$$



2.4.40 Visa att derivatan av $y = (x-a)^m(x-b)^n$ försvinner i någon punkt mellan a och b om m och n är positiva heltal.

Produktregeln vid derivering ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x-a)^{m-1}\cdot(x-b)^n + (x-a)^m \cdot n(x-b)^{n-1} \\ &= (x-a)^{m-1}\cdot(x-b)^{n-1}\cdot\big(m(x-b)+n(x-a)\big). \end{aligned}$$

Derivatan f' blir noll om någon av de tre faktorerna blir noll. De två första faktorerna blir noll endast i $x = a$ respektive $x = b$. Den tredje faktorn blir noll då

$$\begin{aligned} m(x-b)+n(x-a)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (m+n)x-(mb+na)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{mb+na}{m+n}. \end{aligned}$$

Om vi nu kan visa att $x = \frac{mb+na}{m+n}$ ligger i intervallet (a, b) så är vi klara.

Vad vi behöver visa är alltså att

$$a < \frac{mb+na}{m+n} < b.$$

Vi förlänger med $m + n$ (som är positiv) och får de ekvivalenta olikheterna

$$a(m+n) < mb+na < b(m+n). \qquad (*)$$

Betraktar vi nu den vänstra olikheten kan vi subtrahera termen an från båda led och få den ekvivalenta olikheten

$$am < bm.$$

Förkortning av faktorn m (positiv) ger oss $a < b$. Eftersom vi i varje steg har skrivit om olikheten till en ekvivalent olikhet är

$$a < \frac{mb+na}{m+n} \quad \text{ekvivalent med} \quad a < b.$$

Den högra olikheten är sann och därför är även den vänstra olikheten sann.

Den högra olikheten i $(*)$ kan visas vara ekvivalent med $a < b$ genom att addera bm och dela med n. Alltså är även den högra olikheten i $(*)$ sann.

Vi har därmed visat att x tillhör intervallet (a, b).

2.5.4 Bestäm derivatan av $\cos^2 x - \sin^2 x$.

Vi har att

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

Derivering ger

$$-2\sin 2x.$$

2.5.28 Bestäm derivatan av $\tan 3x \cdot \cot 3x$.

Vi har att

$$\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$
$$\cot 3x = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

varför

$$\tan 3x \cdot \cot 3x = 1$$

och derivatan är 0.

Anm. Uttrycket $\tan 3x \cdot \cot 3x$ är definierat överallt utom i punkter där $\tan 3x$ eller $\cot 3x$ är odefinierade. I detta fall visar det sig att undantagspunkterna är $\frac{n\pi}{6}$ för alla heltal n.

2.5.32 Bestäm derivatan av $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

Vi använder kvotregeln

$$\begin{aligned} \frac{(\cos x)'(1+\sin x)-\cos x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2} &= \frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2} \\ = \frac{-\sin x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(1+\sin x)^2} &= -\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{1+\sin x}. \end{aligned}$$

2.5.42 Finn ekvationer för de linjer som är tangent respektive normal till kurvan $y = \tan 2x$ i punkten $(0,0)$.

Vi börjar med tangentlinjen. Tangentens lutning i $x = 0$ ges av

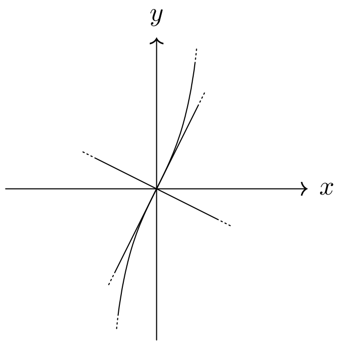
$$y'(0) = \frac{d}{dx}\tan 2x\Big|_{x=0} = (1+\tan^2 2x)\cdot 2\Big|_{x=0} = 2.$$

Eftersom tangentlinjen ska gå genom punkten $(0,0)$ ser vi direkt att dess ekvation är

$$y = 2x.$$

Normallinjen ska ha lutning $-1/y'(0) = -1/2$ och gå genom punkten $(0,0)$. Dess ekvation är därför

$$y = -1/2\,x.$$



2.5.58 Bestäm $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos\Big(\frac{\pi - \pi\cos^2 x}{x^2}\Big)$.

Vi utnyttjar kontinuitet och det välkända gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\cos\Big(\pi\,\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\Big) &= \lim_{x\to 0}\cos\Big(\pi\frac{\sin^2 x}{x^2}\Big) = \{\text{cos är kontinuerlig}\}\\ &= \cos\Big(\lim_{x\to 0}\pi\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\Big) = \{x \mapsto x^2 \text{ är kontinuerlig}\}\\ &= \cos\Big(\pi\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\Big)^2\Big) = \cos(\pi\cdot 1) = -1.\end{aligned}$$

2.8.2 Finn y', y'' och y''' då $y = x^2 - 1/x$.

Vi deriverar

$$\begin{aligned}y' &= 2x - (-\frac{1}{x^2}) = 2x + \frac{1}{x^2},\\ y'' &= 2 - \frac{2}{x^3},\\ y''' &= \frac{6}{x^4}.\end{aligned}$$

2.8.8 Finn y', y'' och y''' då $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

Vi skriver först om uttrycket till en form som bättre lämpar sig för upprepad derivering

$$y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

Vi deriverar

$$\begin{aligned}y' &= -2\cdot\Big(-\frac{1}{(x+1)^2}\Big) = \frac{2}{(x+1)^2},\\ y'' &= -\frac{4}{(x+1)^3},\\ y''' &= +\frac{12}{(x+1)^4}.\end{aligned}$$

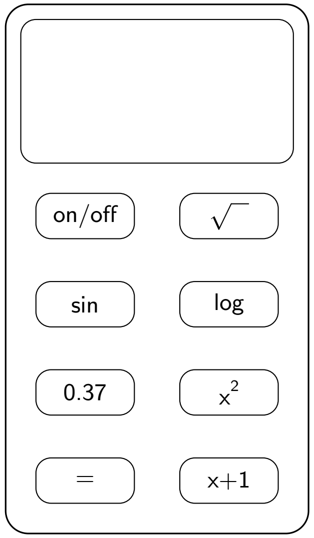
2.8.28 Om f och g är två gånger deriverbara, visa att

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$

Vi har att

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg'\\ (fg)'' &= \big((fg)'\big)' = (f'g + fg')' = (f'g)' + (fg')'\\ &= (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') = f''g + 2f'g' + fg''.\end{aligned}$$

Beräkna $\sin\left(\log\sqrt{1+0{,}37^2}\right)$ på miniräknaren nedan.



Vi trycker ner följande tangenter (från vänster till höger)

$$\boxed{0.37}\ \boxed{x^2}\ \boxed{x+1}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\log}\ \boxed{\sin}.$$

Varje tangent är en funktion. Den tar ett tal (det i resultatfönstret), utför en räkneoperation och returnerar resultatet (även det i resultatfönstret).

När vi trycker ner tangenterna efter varandra tas resultatet från en tangent som ingångsvärde till nästa tangent. Matematiskt säger vi att vi sätter samman funktionerna. Räkningen vi gjorde ovan skulle i matematisk formalism bli

$$\boxed{\sin}\circ\boxed{\log}\circ\boxed{\sqrt{\ }}\circ\boxed{x+1}\circ\boxed{x^2}\left(\boxed{0.37}\right).$$

Notera att vi skriver allt baklänges. Argumentet (0,37) längst till höger och sedan funktionerna i tur och ordning om vi läser raden från höger till vänster.

Lektion 4, Envariabelanalys den 30 september 1999

2.6.2 Åskådliggör medelvärdessatsen genom att finna en punkt i det öppna intervallet $(1,2)$ där tangentlinjen till $y = 1/x$ är parallell med kordan mellan punkterna $(1,1)$ och $(2,1/2)$.

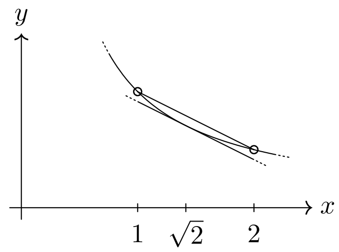
Kordan mellan $(1,1)$ och $(2,1/2)$ har lutningen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1/2-1}{2-1} = -1/2.$$

Vi söker alltså en punkt i intervallet $(1,2)$ där tangenten har lutning $-1/2$, d.v.s. där y:s derivata är $-1/2$,

$$y'(x) \equiv -\frac{1}{x^2} = -1/2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Av dessa två punkter är det bara $x = \sqrt{2}$ som tillhör intervallet $(1,2)$.



2.6.6 Låt $r > 1$. Om $x > 0$ eller $-1 \le x < 0$, visa att

$$(1+x)^r > 1 + rx.$$

Sätt $f(x) = (1+x)^r$. Vi undersöker de olika x-värdena.

$x > 0$: Vi använder medelvärdessatsen på funktionen f i intervallet $[0,x]$,

$$\frac{(1+x)^r - 1^r}{x-0} = r(1+\xi)^{r-1}$$

där $0 < \xi < x$. Eftersom $\xi > 0$ är högerledet alltid större än

$$r(1+0)^{r-1} = r.$$

Alltså har vi att

$$\frac{(1+x)^r - 1}{x} > r.$$

Multiplikation med x (positiv) ger att

$$(1+x)^r - 1 > rx.$$

Addition med 1 ger slutligen att

$$(1+x)^r > 1 + rx.$$

$-1 \le x < 0$: Vi använder medelvärdessatsen på funktionen f i intervallet $[x,0]$,

$$\frac{1^r - (1+x)^r}{0-x} = r(1+\xi)^{r-1}$$

där $x < \xi < 0$. Eftersom $\xi < 0$ är högerledet alltid mindre än

$$r(1+0)^{r-1} = r.$$

Alltså har vi att

$$\frac{(1+x)^r - 1}{x} < r.$$

Multiplicera med x (negativ),

$$(1+x)^r - 1 > rx,$$

och addera 1,

$$(1+x)^r > 1 + rx.$$

Visa att $e^x \cos x > 1$ för $0 < x < \pi/4$.

Sätt $f(x) = e^x \cos x$. Vi använder medelvärdessatsen på f i intervallet $[0, x]$,

$$\frac{e^x \cos x - 1}{x - 0} = f'(\xi) = e^\xi(\cos\xi - \sin\xi),$$

där $0 < \xi < x$. Om vi kan visa att högerledet är positivt oavsett var ξ ligger i intervallet $(0, x)$, då har vi visat att

$$\frac{e^x \cos x - 1}{x} > 0 \qquad \text{d.v.s.} \qquad e^x \cos x > 1.$$

Vi behöver alltså visa att

$$e^\xi(\cos\xi - \sin\xi) > 0 \qquad \text{då} \ \ 0 < \xi < x < \pi/4.$$

Eftersom exponentialfunktionen alltid är positiv räcker det om vi visar att

$$\cos\xi - \sin\xi > 0 \qquad \text{då} \ \ 0 < \xi < \pi/4.$$

Med hjälp av additionsformler kan vänsterledet skrivas om till

$$\sqrt{2}\,\cos(\xi + \pi/4) > 0 \qquad \text{då} \ \ 0 < \xi < \pi/4.$$

Vi vet att cosinus-funktionen är positiv på intervallet $(0, \pi/2)$ och därför är $\cos(\xi + \pi/4)$ positiv på intervallet $(0, \pi/4)$. Vi har alltså visat det vi skulle och uppgiften är klar.

Anm. Olikheten gäller inte bara för x i intervallet $(0, \pi/4)$ utan detta intervall kan göras större. Vårt angreppssätt med medelvärdessatsen ger alltså inte det optimala resultatet. (Problemet är att vi inte vet var i intervallet $(0, x)$ som ξ hamnar.)

Bestäm $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$ för $x > 0$.

Vi byter först variabel i gränsvärdet till $t = 1/n$. När $n \to \infty$ får vi att $t \to 0^+$. Gränsvärdesuttrycket blir

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{x^t - 1}{t}.$$

Denna kvot kan tolkas som en differenskvot. Om vi sätter $f(t) = x^t$ så kan gränsvärdet skrivas som

$$\lim_{t\to +} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}.$$

Med medelvärdessatsen får vi ett $0 < \xi_t < t$ så att gränsvärdet är

$$\lim_{\xi_t\to 0^+} f'(\xi_t) = \lim_{\xi_t\to 0^+} x^{\xi_t} \log x = \log x.$$

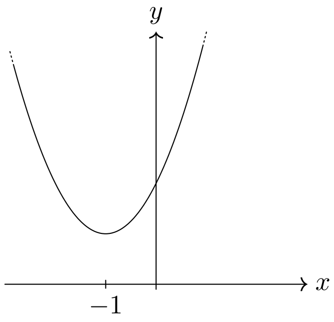
2.6.8 Finn intervallen där $f(x) = x^2 + 2x + 2$ är växande respektive avtagande.

Derivatan ges av $f'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$. Vi ser att

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \quad \text{om } x \geq -1,\\ f'(x) &\leq 0 \quad \text{om } x \leq -1. \end{aligned}$$

Alltså är f

$$\begin{aligned} &\text{växande} && \text{på } [-1, \infty),\\ &\text{avtagande} && \text{på } (-\infty, -1]. \end{aligned}$$



2.6.12 Finn intervallen där $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ är växande respektive avtagande.

Derivatan ges av

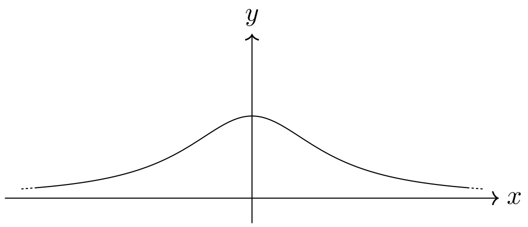
$$f'(x) = -1 \cdot (x^2+1)^{-2} \cdot (2x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Nämnaren är positiv varför täljaren avgör tecknet

$$\begin{aligned} f'(x) &\le 0 \quad \text{om } x \ge 0, \\ f'(x) &\ge 0 \quad \text{om } x \le 0. \end{aligned}$$

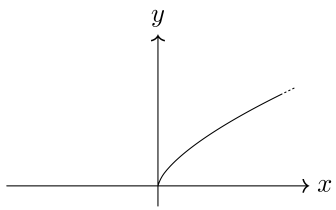
Alltså är f

$$\begin{array}{lll} \text{växande} & \text{på} & (-\infty, 0], \\ \text{avtagande} & \text{på} & [0, \infty). \end{array}$$



Utred om $y = x^{2/3}$ kan definieras för negativa x, och om så är fallet, förklara hur man beräknar funktionen för negativa x.

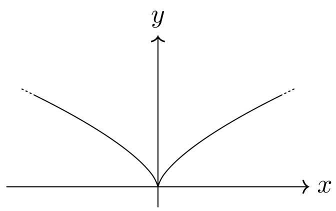
Om vi ritar upp grafen till $y = x^{2/3}$ för $x \ge 0$ så har den utseendet



När vi ska undersöka funktionen $y = x^{2/3}$ är det viktigt att veta att funktionen egentligen definieras av det implicita sambandet

$$y^3 = x^2. \tag{$*$}$$

I detta samband noterar vi att om x ersätts med $-x$ så är sambandet fortfarande uppfyllt. Om vi ritar upp alla punkter (x, y) som uppfyller $(*)$ så får vi därför en figur som är symmetrisk kring y-axeln.



I denna figur ser vi att vi kan definiera $y = x^{2/3}$ även för negativa x.

När vi ska räkna ut denna funktion använder vi symmetrin kring y-axeln, d.v.s. att funktionen är jämn,

$$y(-x) = y(x).$$

Speciellt är $y(-1) = (-1)^{2/3} = (+1)^{2/3} = 1$.

Anm. I allmänhet kan funktionen $x \mapsto x^{\alpha}$ definieras för negativa x om $\alpha = \frac{k}{2n+1}$ för några heltal k och n.

Visa att $f(x) = x^{1/3}$ är strängt växande.

Vi delar först upp den udda funktionen i en del för positiva x och en del för negativa x,

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{om } x > 0, \\ 0 & \text{om } x = 0, \\ -(-x)^{1/3} & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Fördelen med denna formel är att basen alltid är positiv och då kan vi använda potenslagarna utan eftertanke.

Vi gör nu som i tidigare uppgifter och deriverar

$$x > 0: \quad f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} = \tfrac{1}{3}\frac{1}{\left(x^{1/3}\right)^2} > 0,$$

$$x < 0: \quad f'(x) = -\tfrac{1}{3}(-x)^{-2/3} \cdot (-1) = \tfrac{1}{3}\frac{1}{\left((-x)^{1/3}\right)^2} > 0.$$

Alltså är f strängt växande på $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Eftersom f är kontinuerlig är den strängt växande på hela $\mathbf{R}$.

För vilka x gäller olikheten

$$1 - \varepsilon < 1 - (x-2)^3 < 1 + \varepsilon.$$

Detta är den olikhet vi stötte på i det andra exemplet från lektion 1. Denna gång ska vi betrakta lösandet av olikheten ur ett litet annorlunda perspektiv.

$$1 - \varepsilon < 1 - (x-2)^3 < 1 + \varepsilon$$

Det första steget är att vi multiplicerar alla led med -1. Detta kan ses som att vi använder funktionen $x \mapsto -x$ på alla led och betraktar istället den resulterande olikheten mellan funktionsvärdena. Vi kan garantera att denna nya olikhet är ekvivalent med den gamla, om funktionen vi använder är strängt monoton. Eftersom $x \mapsto -x$ är strängt avtagande är den speciellt strängt monoton. Dessutom kastas olikhetstecknen om i den nya olikheten, och vi får

$$-1 + \varepsilon > -1 + (x-2)^3 > -1 - \varepsilon.$$

Sedan adderar vi 1, vilket är detsamma som att vi använder funktionen $x \mapsto x+1$. Eftersom denna funktion är strängt växande blir den ekvivalenta olikheten för funktionsvärdena

$$\varepsilon > (x-2)^3 > -\varepsilon.$$

Det tredje steget är att ta tredje roten ur. Funktionen i detta fall är $x \mapsto x^{1/3}$. I den tidigare uppgiften visade vi att $x \mapsto x^{1/3}$ är strängt växande varför olikheten blir

$$\sqrt[3]{\varepsilon} > x - 2 > -\sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Det sista steget är att addera 2, d.v.s. använda funktionen $x \mapsto x + 2$ (strängt växande),

$$2 + \sqrt[3]{\varepsilon} > x > 2 - \sqrt[3]{\varepsilon}.$$

2.9.4 Räkna ut $\dfrac{dy}{dx}$ i termer av x och y om

$$x^2 + 4(y-1)^2 = 4.$$

Vi betraktar y som en funktion av x och deriverar med avseende på x,

$$2x + 4 \cdot 2(y-1)y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{-2x}{8(y-1)} = \frac{-x}{4(y-1)}.$$

2.9.10 Finn ekvationen för tangenten till kurvan

$$x^2y^3 - x^3y^2 = 12$$

i punkten $(-1, 2)$.

Tangentens lutning ges av $y'(-1)$. Vi deriverar det implicita sambandet med avseende på x,

$$2xy^3 + x^2 3y^2 y' - \bigl(3x^2y^2 + x^3 2yy'\bigr) = 0.$$

Vi samlar ihop y' i ena ledet

$$(3x^2y^2 - 2x^3y)y' = 3x^2y^2 - 2xy^3 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{3x^2y^2 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 2x^3y}.$$

I punkten $(x, y) = (-1, 2)$ är

$$y'(-1) = \frac{3 \cdot (-1)^2 \cdot 2^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 2^3}{3 \cdot (-1)^2 \cdot 2^2 - 2 \cdot (-1)^3 \cdot 2} = 7/4.$$

Alltså har tangenten lutning $7/4$ och därmed ekvationen

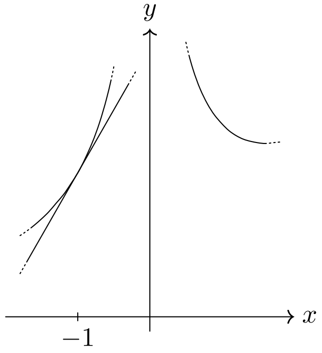
$$y = \tfrac{7}{4}x + m,$$

där m bestäms av att tangentlinjen går genom punkten $(-1, 2)$

$$2 = \tfrac{7}{4} \cdot (-1) + m \quad \Leftrightarrow \quad m = \tfrac{15}{4}.$$

Tangentens ekvation är därmed

$$y = \tfrac{7}{4}x + \tfrac{15}{4}.$$



2.9.12 Finn ekvationen för tangentlinjen till kurvan

$$x + 2y + 1 = \frac{y^2}{x-1}$$

i punkten $(2, -1)$.

Tangentens lutning ges av $y'(2)$. Vi deriverar det implicita sambandet med avseende på x,

$$1 + 2y' = \frac{2yy' \cdot (x-1) - y^2 \cdot 1}{(x-1)^2}.$$

Samla y' i ena ledet

$$\Bigl(2 - \frac{2y}{x-1}\Bigr)y' = -\frac{y^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{-\dfrac{y^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2}}{2 - \dfrac{2y}{x-1}} = -\frac{y^2 + (x-1)^2}{2(x-1)(x-y-1)}.$$

I punkten $(x, y) = (2, -1)$ är

$$y'(2) = -\frac{(-1)^2 + (2-1)^2}{2 \cdot (2-1) \cdot (2-(-1)-1)} = -1/2.$$

Alltså har tangentlinjen ekvationen

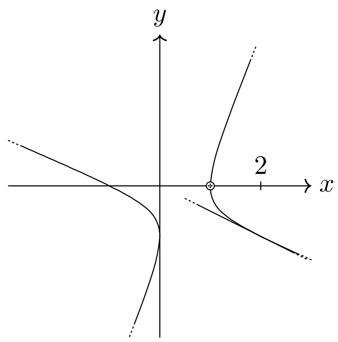
$$y = -\tfrac{1}{2}x + m,$$

där m bestäms av att tangenten går genom punkten $(2, -1)$,

$$-1 = -\tfrac{1}{2} \cdot 2 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = 0.$$

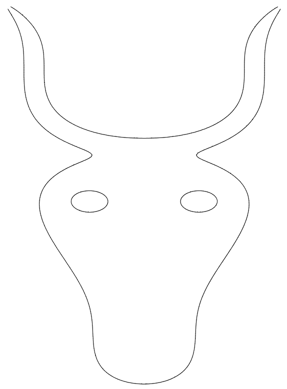
Därmed är tangentens ekvation

$$y = -\tfrac{1}{4}x.$$



Efterord

Med hjälp av implicita funktioner kan man avbilda många olika typer av kurvor, faktiskt fler än vad man kan tro. Nedan är den s.k. *tjuroiden* uppritad.



$$\left(-\frac{97}{252}y^4-\frac{2}{7}y^3+\frac{985}{4032}y^2+\frac{2}{7}y+\frac{9}{64}-x^2\right)\left(2x^2+100\left(\left(y-\frac{439}{250}\right)^3-x^2+\frac{1}{3}\right)^2-1\right)\left(\left(x+\frac{7}{25}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{1}{100}\right)\left(\left(x-\frac{7}{25}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{1}{100}\right)+\frac{1}{100}=0$$

Lektion 5, Envariabelanalys den 7 oktober 1999

Lös ekvationen $\sqrt{x^2+1} = 2x$.

Vi börjar med att kvadrera båda led,

$$x^2 + 1 = 4x^2.$$

Samla x i ena ledet,

$$3x^2 = 1.$$

Lösningarna blir

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Om vi som en extra kontroll sätter in $x = 1/\sqrt{3}$ i ursprungsekvationen får vi att $\text{VL} = \text{HL}$, men om vi däremot sätter in $x = -1/\sqrt{3}$ så får vi istället att

$$\begin{aligned}\text{VL} &= \sqrt{\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\tfrac{1}{3}+1} = 2/\sqrt{3},\\ \text{HL} &= 2\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -2/\sqrt{3},\end{aligned}$$

d.v.s. $\text{VL} \neq \text{HL}$.

Varför stämmer inte den andra lösningen?

För att kunna besvara frågan behöver vi använda ett litet annorlunda synsett på hur vi löser ekvationer.

När vi t.ex. bestämmer oss för att addera talet 1 till båda led i en ekvation

$$\text{VL} = \text{HL}$$

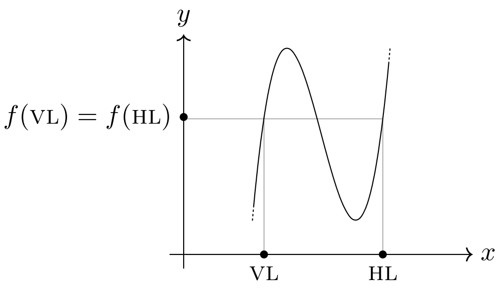
så betyder det att vi ersätter den ekvation vi har med en ny ekvation mellan funktionsvärdena

$$f(\text{VL}) = f(\text{HL})$$

där f är funktionen $x \mapsto x+1$. Denna nya ekvation antar vi, ibland lite aningslöst, att den är ekvivalent med den ursprungliga ekvationen $\text{VL} = \text{HL}$, d.v.s. har samma lösningsmängd. Med andra ord, vi antar och hoppas att

$$\text{VL} = \text{HL} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\text{VL}) = f(\text{HL}). \tag{$*$}$$

För en allmän funktion är detta antagande inte sant. Titta t.ex. på exemplet



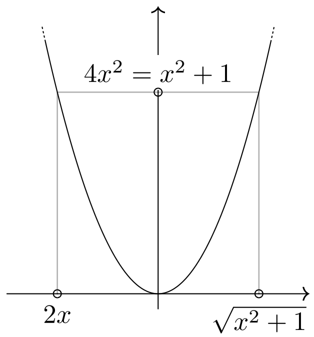
Här kan VL och HL vara olika trots att $f(\text{VL}) = f(\text{HL})$.

Det enda tillfälle då vi kan garantera ekvivalensen $(*)$ är om f är en-entydig, då gäller nämligen $(*)$ per definition.

Vad som skapade den falska roten $x = -1/\sqrt{3}$ i vårt ursprungsexempel,

$$\sqrt{x^2+1} = 2x,$$

var att vi kvadrerade ekvationen. Funktionen $x \mapsto x^2$ är nämligen inte en-entydig vilket man lätt ser genom att rita grafen.



Sensmoralen är *inte* att man ska undvika funktioner som inte är en-entydiga när man löser ekvationer (du gör vad du måste för att lösa ekvationen), utan sensmoralen är att man måste vara beredd på att pröva sina lösningar om man använder icke en-entydiga funktioner.

Visa att $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, för $x > -1$, är en-entydig.

För att f ska vara en-entydig måste följande implikation gälla

$$f(x) = f(y) \qquad \Rightarrow \qquad x = y.$$

Vi börjar med den vänstra delen av implikationen,

$$f(x) = f(y) \quad \text{d.v.s.} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y}}.$$

Vi kvadrerar (kom ihåg att vi med detta steg riskerar att introducera falska rötter),

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+y}.$$

Vi inverterar båda led (funktionen $x \mapsto 1/x$ är en-entydig)

$$1 + x = 1 + y.$$

Slutligen subtraherar vi 1 från båda led ($x \mapsto x - 1$ är en-entydig),

$$x = y.$$

Vi har alltså lyckats visa att

$$f(x) = f(y) \qquad \Rightarrow \qquad x = y,$$

d.v.s. att f är en-entydig.

3.1.8 Visa att funktionen $f(x) = (1-2x)^3$ är en-entydig och bestäm inversfunktionen $f^{-1}(x)$. Bestäm också definitionsmängden och värdemängden till f och f^{-1}.

Funktionen f är sammansatt av två enklare funktioner $f = g \circ h$, där

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3, \\ h(x) &= 1 - 2x. \end{aligned}$$

Både g och h är en-entydiga (g är välkänt strängt växande och h har derivata <0), varför f också är en-entydig.

Vidare har vi att

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) &= x^{1/3}, \\ h^{-1}(x) &= \tfrac{1}{2}(1-x), \end{aligned}$$

vilket ger att

$$f^{-1}(x) = (g \circ h)^{-1}(x) = h^{-1} \circ g^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}(1 - x^{1/3}).$$

Eftersom f är ett polynom är f definierad överallt, d.v.s. $D_f = (-\infty, \infty)$.

Eftersom f är strängt monoton och definitionsmängden saknar ändpunkter är f:s definitionsmängd ett öppet intervall med ändpunkter

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Alltså är $V_f = (-\infty, \infty)$.

Slutligen har vi att

$$\begin{aligned} D_{f^{-1}} &= V_f = (-\infty, \infty), \\ V_{f^{-1}} &= D_f = (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

3.1.10 Visa att funktionen $f(x) = \frac{x}{1+x}$ är en-entydig och bestäm inversfunktionen f^{-1}. Bestäm också definitionsmängden och värdemängden till f och f^{-1}.

Funktionen f är en-entydig om den är strängt monoton, vilket vi kan undersöka med derivatan av f,

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Eftersom derivatans täljare och nämnare alltid är positiva är derivatan alltid positiv, och f är därmed strängt växande. Detta visar att f är en-entydig.

Inversen kan vi få fram genom att lösa ekvationen

$$x = f \circ f^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1 + f^{-1}(x)}$$

med avseende på $f^{-1}(x)$. För enkelhets skull kallar vi $f^{-1}(x)$ för y,

$$x = \frac{y}{1+y}.$$

Vi förlänger med $1 + y$,

$$x \cdot (1 + y) = y.$$

Samla y i ena ledet,

$$x = y \cdot (1 - x) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{x}{1-x}.$$

Inversen är alltså $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

Funktionen f är en rationell funktion och definierad överallt utom i punkter där nämnarpolynomet är noll, d.v.s. f är definierad överallt utom i $x = -1$. Definitionsmängden är $D_f = (-\infty, -1)$ och $(-1, \infty)$.

Eftersom f är strängt monoton och definitionsmängden är två öppna intervall är f:s värdemängd två öppna intervall med ändpunkter

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \quad \text{och} \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = \infty,$$

respektive

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \quad \text{och} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$

Alltså är $V_f = (-\infty, 1)$ och $(1, \infty)$.

Slutligen har vi att

$$\begin{aligned} D_{f^{-1}} &= V_g = (-\infty, 1) \;\; \text{och} \;\; (1, \infty), \\ V_{f^{-1}} &= D_f = (-\infty, -1) \;\; \text{och} \;\; (1, \infty). \end{aligned}$$

3.1.24 Visa att

$$f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1}$$

har en invers och finn $\big(f^{-1}\big)'(2)$.

Vi har att

$$f'(x) = \frac{12x^2 \cdot (x^2+1) - 4x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2 \cdot (x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

Nämnaren är alltid positiv varför derivatans tecken bestäms av täljaren. Täljaren i sin tur är produkten av två faktorer där den andra faktorn x^2+3 alltid är positiv. Den första faktorn $4x^2$ är positiv överallt utom i $x = 0$.
Alltså är

$$f'(x) > 0 \quad \text{utom i } x = 0.$$

Detta betyder att f är strängt växande i intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Eftersom f är kontinuerlig i $x = 0$ är f strängt växande överallt. Därmed får vi att f är en-entydig och har en invers.

Derivatan av inversen f^{-1} ges av formeln

$$\big(f^{-1}\big)'(2) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(2)\big)}.$$

För att kunna använda denna formel behöver vi först bestämma $f^{-1}(2)$. Kancellationsidentiteten ger att

$$2 = f \circ f^{-1}(2) = \frac{4\big(f^{-1}(2)\big)^3}{\big(f^{-1}(2)\big)^2 + 1}.$$

För att underlätta skrivandet sätter vi $y = f^{-1}(2)$.

$$2 = \frac{4y^3}{y^2+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2(y^2+1) = 4y^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2y^3 - y^2 - 1 = 0. \qquad (*)$$

Genom prövning upptäcker vi att denna ekvation har lösningen $y = 1$. Alltså är

$$f^{-1}(2) = 1.$$

Notera att eftersom vi vet att f är en-entydig så kan inte ekvationen $(*)$ har fler än en reell rot.

Vi får nu att

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\dfrac{4\cdot 1^2\cdot(1^2+3)}{(1^2+1)^2}} = 1/4.$$

Hur många rötter har ekvationen $\sin x + \cos 2x = 4x$.

Sätt $f(x) = \sin x + \cos 2x - 4x$. Vi ska bestämma hur många nollställen funktionen f har.

Derivatan av f är

$$f'(x) = \cos x - 2\sin 2x - 4$$

Eftersom både sinus- och cosinusfunktionen ligger mellan -1 och $+1$ är derivatan

$$f'(x) \le (+1) - 2\cdot(-1) - 4 = -1 < 0.$$

Alltså är f strängt avtagande och en-entydig. Detta betyder att f kan högst ha en rot.

För att bestämma om f överhuvudtaget har en rot ska vi undersöka f:s värdemängd. Om talet 0 tillhör värdemängden antar f värdet 0.

Eftersom f är definierad överallt är f:s värdemängd ett öppet intervall med ändpunkterna

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

Alltså är värdemängden $V_f = (-\infty, \infty)$ och eftersom $0 \in V_f$ har ekvationen exakt en rot.

3.3.22 Derivera $y = x^2 e^{x/2}$.

Produktregeln ger att

$$y' = (x^2)'\cdot e^{x/2} + x^2\cdot(e^{x/2})' = 2x\cdot e^{x/2} + x^2\cdot e^{x/2}\cdot \tfrac{1}{2} = e^{x/2}(x^2/2 + 2x).$$

3.3.26 Derivera $y = 2\log\sqrt{x^2+2}$.

Vi skriver först om uttrycket med logaritmlagarna

$$y = \log(x^2+2).$$

Kedjeregeln ger att

$$y' = \frac{1}{x^2+2}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+2}.$$

3.3.40 Derivera $y = 2^{x^2-3x+8}$.

Vi använder deriveringsregeln

$$\frac{d}{dx}\,a^x = a^x \log a$$

och kedjeregeln

$$y' = 2^{x^2-3x+8}\cdot\log 2\cdot(x^2-3x+8)' = 2^{x^2-3x+8}\cdot\log 2\cdot(2x-3).$$

3.3.42 Derivera $h(t) = t^x - x^t$.

Den första termen är en potensfunktion och har derivatan

$$xt^{x-1}.$$

Den andra termen är en exponentialfunktion och har derivatan

$$x^t \cdot \log x.$$

Sammantaget är

$$h'(t) = xt^{x-1} + x^t \log x.$$

3.3.61 Låt $f(x) = xe^{-x}$. Bestäm var f är växande respektive avtagande. Skissera grafen till f.

Produktregeln ger att

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x).$$

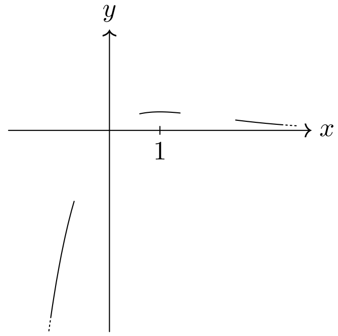
Eftersom exponentialfunktionen alltid är positiv avgörs derivatans tecken av den andra faktorn. Vi får att

$$\begin{aligned} f' &\geq 0 \quad \text{då } x \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ är växande i intervallet } (-\infty, 1]. \\ f' &\leq 0 \quad \text{då } x \geq 1 \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ är avtagande i intervallet } [1, \infty). \end{aligned}$$

När $x \to \infty$ blir funktionen nästan exponentiellt avtagande p.g.a. faktorn e^{-x}. När $x \to -\infty$ växer faktorn e^{-x} exponentiellt och faktorn x ger funktionen ett negativt värde. Vi har alltså att

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty, \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

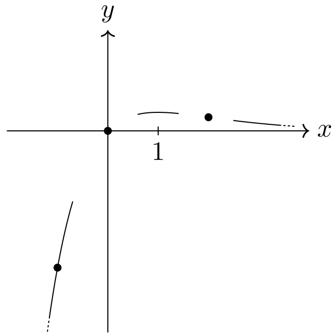
Ritar vi upp det vi vet om funktionen får vi att delar av grafen har utseendet

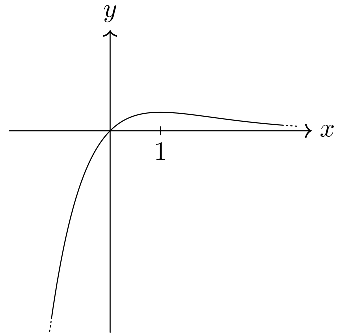


Som stöd när vi ritar grafen kan vi dessutom räkna ut funktionens värde i några punkter

$$\begin{aligned} f(-1) &= -e^1 \approx -2{,}7181, \\ f(0) &= 0, \\ f(2) &= 2e^{-2} \approx 0{,}2707. \end{aligned}$$

Sedan är det bara att fylla i mellanrummen.





UU mars 60 Visa att funktionen $y = \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a}$, där a är en reell konstant > 0, är en avtagande funktion för $x > a$.

För att visa att f är en avtagande funktion undersöker vi dess derivata. Eftersom x förekommer både i basen och exponenten använder vi oss av logaritmisk derivering. Vi har att

$$\log y = (x+a)\cdot\log\left(1+\frac{a}{x}\right).$$

Deriverar vi, fås

$$\frac{y'}{y} = \log\left(1+\frac{a}{x}\right) + (x+a)\cdot\frac{1}{1+\dfrac{a}{x}}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right) = \log\left(1+\frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x}.$$

Funktionen $y(x)$ är positiv för $x > a$ så derivatan y':s tecken bestäms av HL. Vi behöver alltså bara visa att HL är negativ. Vi kan dock inte direkt avgöra om HL är negativt, utan detta kräver en liten utredning. Sätt

$$g(x) = \log\left(1+\frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x}.$$

Vi har att $g(a) = \log 2 - 1 < 0$. Om vi kan visa att g är avtagande i intervallet (a,∞) då följer att $g(x) \le g(a) < 0$ för alla $x > a$.

För att visa att g är strängt avtagande undersöker vi derivatan

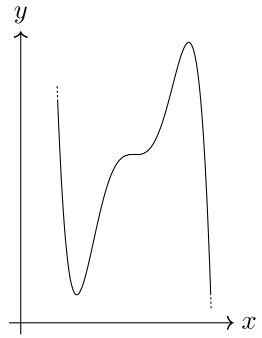
$$g'(x) = \frac{1}{1+\dfrac{a}{x}}\left(-\frac{a}{x^2}\right) - \left(-\frac{a}{x^2}\right) = -\frac{a^2}{x^2\cdot(x+a)}.$$

Eftersom alla faktorer i uttrycket ovan är positiva för $x > a$ har vi att $g'(x) < 0$ för $x > a$. Alltså är $g'(x)$ negativ för $x > a$, och $g(x)$ avtagande för $x > a$. Detta visar att y' är negativ i intervallet (a,∞), d.v.s. att $y(x)$ är avtagande för $x > a$.

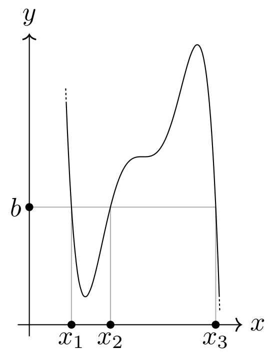
Lektion 6, Envariabelanalys den 14 oktober 1999

Låt f vara en kontinuerligt deriverbar funktion vars graf är återgiven i figuren till höger. Besvara följande frågor

1. Har f en invers?
2. I vilka punkter har f en lokal invers?
3. Vilka är intervallen där f är en-entydig?
4. Vilka grenar finns det till f^{-1}?



1. Säg att vi tar en punkt $y = b$, i f:s värdemängd, som i figuren nedan.

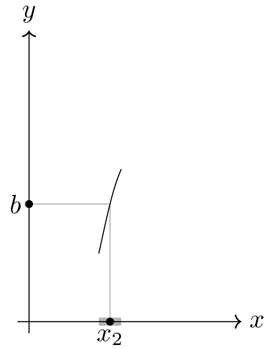


I f:s definitionsmängd finns nu tre punkter x_1, x_2 och x_3 som alla har funktionsvärdet b,

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = b.$$

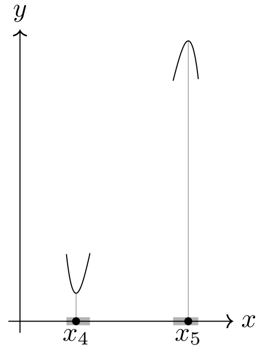
För att en invers ska finnas måste det råda ett 1:1 förhållande mellan punkter i definitionsmängden och värdemängden. Till varje y-värde i värdemängden ska det finnas exakt ett x-värde i definitionsmängden. Med andra ord krävs det att funktionen är en-entydig. För vår funktion råder inget sådant 1:1 förhållande, varför f inte har en invers.

2. Låt oss krympa f:s definitionsmängd till en liten omgivning av $x = x_2$.



I denna omgivning råder ett 1:1 förhållande mellan punkter i definitionsmängden och värdemängden. Vi säger att f är lokalt en-entydig i punkten $x = x_2$ och att den där har en lokal invers.

Det är inte i alla punkter vi kan få funktionen lokalt en-entydig. Betrakta t.ex. punkten $x = x_4$.

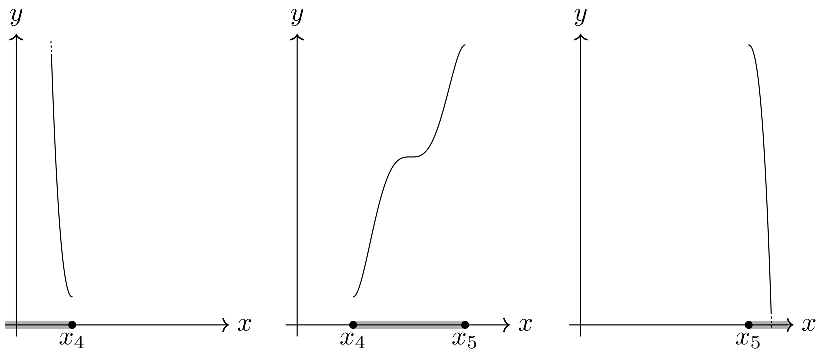


Hur liten vi än väljer omgivningen till $x = x_4$ kommer det alltid att finnas två punkter på varsin sida om x_4 med samma funktionsvärde. I punkten $x = x_4$ är alltså f inte lokalt en-entydig och har ingen lokal invers där. Den andra undantagspunkten är $x = x_5$, där det råder motsvarande situation.

Funktionen f har en lokal invers i alla punkter utom i $x = x_4$ och $x = x_5$.

3. Eftersom f är lokalt en-entydig i hela intervallet (x_4, x_5) följer det att f är en-entydig i samma intervall. Med detta menar vi att om vi inskränker f:s definitionsmängd till (x_4, x_5) så får vi en en-entydig funktion; den funktionen brukar man beteckna med $f|_{(x_4,x_5)}$.

   På samma sätt kan vi visa att f är en-entydig i intervallen $(-\infty, x_4)$ och (x_5, ∞).

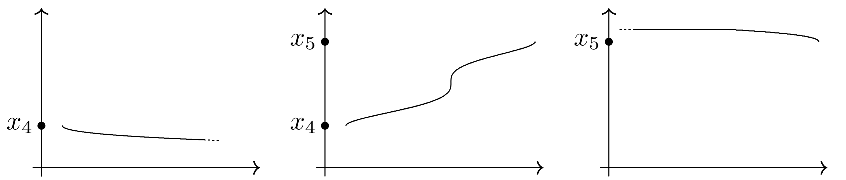


$f|_{(-\infty,x_4)}$ $f|_{(x_4,x_5)}$ $f|_{(x_5,\infty)}$

4. Till funktionerna

$$f|_{(-\infty,x_4)}, \quad f|_{(x_4,x_5)} \quad \text{och} \quad f|_{(x_5,\infty)}$$

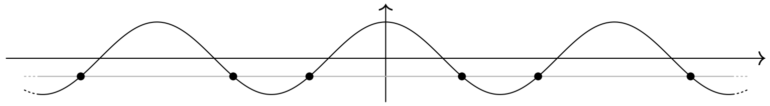
   kan vi definiera inverser. Var och en av dessa inverser kallas för en gren av f^{-1}.



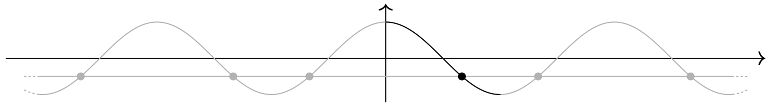
Inversen till $f|_{(-\infty,x_4)}$ Inversen till $f|_{(x_4,x_5)}$ Inversen till $f|_{(x_5,\infty)}$

3.5.2 Bestäm $\arccos(-\frac{1}{2})$.

Vi ska finna ett tal vars cosinus-värde är $-\frac{1}{2}$.



Eftersom funktionen arccos har värdemängden $[0, \pi]$ så ska det sökta talet ligga i detta intervall.



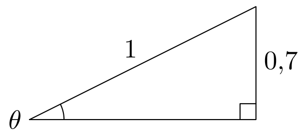
Inlärda cosinus-värden ger oss att $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$.

3.5.6 Bestäm $\cos(\arcsin 0{,}7)$.

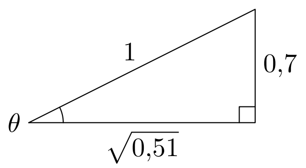
Vi ska lösa uppgiften på två olika sätt. Vilken metod som är ”bäst” beror på situationen.

Metod 1

Sätt $\theta = \arcsin 0{,}7$. Eftersom värdemängden till arcsin är $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ligger θ i detta intervall, och vi kan illustrera vinkeln θ med den rätvinkliga triangeln nedan.



Med Pythagoras sats får vi att den bredvidliggande kateten är $\sqrt{0{,}51}$.



Från triangeln är det nu enkelt att räkna ut $\cos\theta$,

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{0{,}51}}{1} = \sqrt{0{,}51}.$$

Metod 2

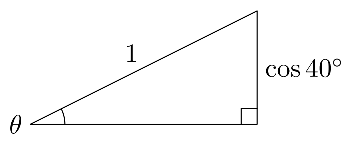
Vi använder den trigonometriska ettan

$$\begin{aligned}\cos(\arcsin 0{,}7) &= |\cos(\arcsin 0{,}7)| = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin 0{,}7)} = \{0{,}7 \in V_{\sin}\}\\ &= \sqrt{1-0{,}7^2} = \sqrt{0{,}51}.\end{aligned}$$

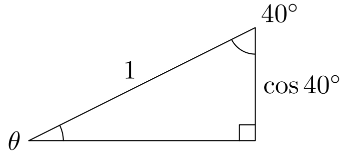
3.5.8 Bestäm $\arcsin(\cos 40^\circ)$.

Metod 1

Vi söker den vinkel som vi betecknat med θ i triangeln nedan.



Med definitionen av cosinus ser vi att komplementvinkeln till θ är 40°.



Eftersom triangelns vinkelsumma är 180° får vi att $\theta = 50^\circ$.

Metod 2

Vi använder att summan av arcsin och arccos är 90°,

$$\begin{aligned}\arcsin(\cos 40^\circ) &= 90^\circ - \arccos(\cos 40^\circ) = \{40^\circ \in [0^\circ, 180^\circ]\}\\ &= 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.\end{aligned}$$

3.5.14 Förenkla $\cos(\arcsin x)$.

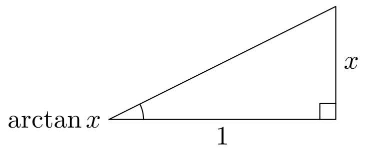
Vi använder den trigonometriska ettan.
För $x \geq 0$ är

$$\cos(\arcsin x) = |\cos(\arcsin x)| = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \{x \in [0,1]\} = \sqrt{1-x^2}.$$

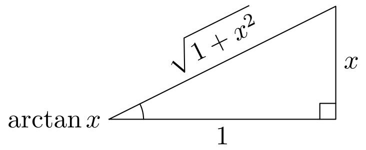
Eftersom arcsin är en udda funktion och cos är en jämn funktion är $\cos(\arcsin x)$ jämn. Högerledet ovan är också en jämn funktion, så formeln ovan gäller även för $x < 0$.

3.5.16 Förenkla $\sin(\arctan x)$.

Låt oss första anta att $x > 0$. Vi ritar upp en hjälptriangel.



Med Pythagoras sats får vi att hypotenusan är $\sqrt{1+x^2}$.



Definitionen av sinus ger att

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Om $x < 0$ så är

$$\sin(\arctan x) = -\sin\bigl(\arctan(-x)\bigr) = -\frac{-x}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3.5.20 Derivera $y = \arctan(ax+b)$.

Kedjeregeln ger att

$$y' = \frac{1}{(ax+b)^2+1} \cdot a.$$

3.5.22 Derivera $f(x) = x \arcsin x$.

Produktregeln ger att

$$f'(x) = (x)' \cdot \arcsin x + x \cdot (\arcsin x)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.5.34 Finn ekvationer för de två linjer som är tangenter till $y = \arcsin x$ och har lutning 2.

En linje med lutning 2 har en ekvation i formen

$$y = 2x + m.$$

En sådan linje kan endast tangera grafen till $y = \arcsin x$ i punkter där derivatan är 2,

$$y'(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Linjerna ska alltså gå genom punkterna

$$\bigl(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \arcsin\tfrac{\sqrt{3}}{2}\bigr) = \bigl(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\pi}{3}\bigr) \quad \text{respektive} \quad \bigl(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \arcsin -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\bigr) = \bigl(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\pi}{3}\bigr).$$

Vi får två fall

1. m anpassas så att linjen går genom $\bigl(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\pi}{3}\bigr)$,

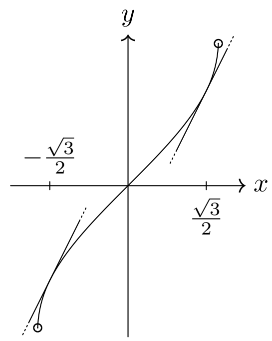
$$\tfrac{\pi}{3} = 2 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = \tfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

2. m anpassas så att linjen går genom $\bigl(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\pi}{3}\bigr)$,

$$-\tfrac{\pi}{3} = 2 \cdot (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}) + mm = -\tfrac{\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

De två linjernas ekvationer är alltså

$$
\begin{aligned}
y &= 2x + \tfrac{\pi}{3} - \sqrt{3},\\
y &= 2x - \tfrac{\pi}{3} + \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$



Förenkla $\arcsin\frac{3}{5} + \arctan\frac{1}{7}$ så långt som möjligt.

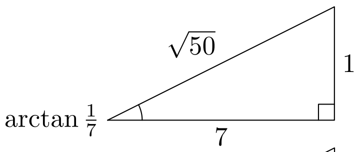
Sätt

$$x = \arcsin\tfrac{3}{5} + \arctan\tfrac{1}{7}. \qquad (*)$$

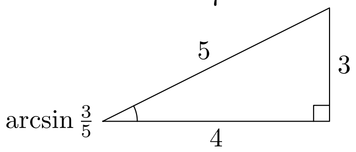
Tag sinus av båda led och använd additionsformeln för sinus,

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sin\bigl(\arcsin\tfrac{3}{5} + \arctan\tfrac{1}{7}\bigr)\\
&= \sin\arcsin\tfrac{3}{5}\cdot\cos\arctan\tfrac{1}{7} + \cos\arcsin\tfrac{3}{5}\cdot\sin\arctan\tfrac{1}{7}.
\end{aligned}
$$

För att beräkna dessa uttryck ritar vi upp hjälptrianglar.



$$
\begin{aligned}
\cos\arctan\tfrac{1}{7} &= \tfrac{7}{\sqrt{50}}\\
\sin\arctan\tfrac{1}{7} &= \tfrac{1}{\sqrt{50}}
\end{aligned}
$$



$$\cos\arcsin\tfrac{3}{5} = \tfrac{4}{5}$$

Alltså är

$$\sin x = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{7}{\sqrt{50}} + \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{50}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Denna ekvation har lösningarna

$$x = \tfrac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \tfrac{3\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{för alla heltal } n. \qquad (\dagger)$$

Om vi åter tittar på $(*)$ är det uppenbart att det finns exakt en lösning och inte oändligt många som i $(\dagger)$. Eftersom vi tog sinus av båda led i $(*)$ och sinusfunktionen inte är en-entydig var det i detta steg vi introducerade alla falska rötter. Vi måste bestämma vilket av alla tal i $(\dagger)$ som är den riktiga roten.

Om vi betraktar värdemängden för arcsin och arctan är de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ respektive $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Summan $x = \arcsin\frac{3}{5} + \arctan\frac{1}{7}$ måste alltså ligga i intervallet $(-\pi, \pi)$. Detta utesluter alla punkter i $(\dagger)$ utom

$$x = \tfrac{\pi}{4} \quad \text{och} \quad x = \tfrac{3\pi}{4}.$$

En av dessa två punkter är fortfarande en falsk rot. Om vi är lite noggrannare ser vi att

$$0 < \tfrac{3}{5} < 1 \quad \text{och} \quad 0 < \tfrac{1}{7} < \tfrac{1}{2}.$$

Eftersom både arcsin och arctan är strängt växande är

$$0 < \arcsin\tfrac{3}{5} < \arcsin 1 = \tfrac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad 0 < \arctan\tfrac{1}{7} < \arctan\tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{4}.$$

Detta betyder att

$$0 < x < \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{3\pi}{4}.$$

Detta visar att $x = \frac{3\pi}{4}$ är en falsk rot. Svaret är alltså $x = \frac{\pi}{4}$.

KTH 27 aug 87 Visa att

$$\arctan\sqrt{x^2-1} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{2x}}$$

för alla $x \geq 1$.

Sätt

$$f(x) = \arctan\sqrt{x^2-1} - 2\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{2x}}.$$

Vi ska visa att $f(x) = 0$ för $x \geq 1$.

Vi ser att funktionen f är kontinuerlig och deriverbar för $x > 1$. Dess derivata är

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2-1)} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2x}\right)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{2x}}} \cdot \frac{1\cdot 2x-(x-1)\cdot 2}{4x^2}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{2x}}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{2x}}\cdot 2x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

Alltså är $f'(x) = 0$ för $x \geq 1$ och detta ger att f är konstant för $x \geq 1$. Eftersom $f(1) = \arctan 0 - 2\arcsin 0 = 0$ har vi visat att

$$f(x) = 0 \qquad \text{för alla } x \geq 1.$$

Anm. Om en funktion f har derivatan $f' = 0$ i ett intervall $[a, b]$ då kan vi använda medelvärdessatsen på f i delintervallet (a, x) och få att

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = f(a).$$

där $a < \xi < x$ varför vi kan vara säkra på att $f'(\xi) = 0$.

Lektion 7, Envariabelanalys den 28 oktober 1999

Visa att funktionerna $y_1 = e^{r_1 t}$ och $y_2 = e^{r_2 t}$, där $r_1 \neq r_2$, är linjärt oberoende.

Vi ska visa implikationen

$$ay_1 + by_2 \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = b = 0.$$

Alltså ska vi undersöka vilka lösningar a och b som ekvationen

$$ay_1 + by_2 \equiv 0 \tag{$*$}$$

kan ha. Om y_1 och y_2 uppfyller identiteten $(*)$ så uppfyller de även identiteten vi får om vi deriverar $(*)$,

$$ay_1' + by_2' \equiv 0.$$

Vi har alltså att

$$ay_1 + by_2 \equiv 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} ay_1 + by_2 & \equiv 0 \\ ay_1' + by_2' & \equiv 0 \end{cases}$$

Ekvationssystemet har bara den trivial lösningen $a = b = 0$ om determinanten av systemmatrisen är skild från 0,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = r_2 e^{(r_1+r_2)t} - r_1 e^{(r_1+r_2)t} \\ &= (r_2 - r_1) e^{(r_1+r_2)t} \not\equiv 0. \end{aligned}$$

Alltså har $(*)$ endast den triviala lösningen, d.v.s. vi har visat implikationen

$$ay_1 + by_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = b = 0.$$

17.7.2 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 2r - 3 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r-1)^2 - 1 - 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 3 \quad \text{och} \quad r = -1.$$

Alltså är $\{e^{3t}, e^{-t}\}$ en bas för lösningsrummet, och den allmänna lösningen kan därmed skrivas

$$y(t) = A\,e^{3t} + B\,e^{-t},$$

där A och B är konstanter.

17.7.6 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r-1)^2 - 1 + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 1 \quad \text{(dubbelrot)}.$$

Den allmänna lösningen är

$$y(t) = (A + Bt)e^t.$$

17.7.10 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r-2)^2 - 4 + 5 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 2 \pm i.$$

Den allmänna lösningen är

$$y(t) = Ae^{2t}\cos t + Be^{2t}\sin t.$$

17.7.14 Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 2. \end{cases}$$

Vi söker en lösning till differentialekvationen som dessutom uppfyller de extra villkoren i uppgiftstexten. Vi tar först fram den allmänna lösningen.

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 10r + 25 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r+5)^2 - 25 + 25 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = -5 \quad \text{(dubbelrot)}.$$

Den allmänna lösningen är

$$y(t) = (At + B)e^{-5t}.$$

Vi ska nu anpassa A och B så att begynnelsevärdena är uppfyllda

$$0 = y(1) = (A+B)e^{-5},$$

$$2 = y'(1) = \frac{d}{dt}\big((At+B)e^{-5t}\big)\Big|_{t=1} = (-4A - 5B)e^{-5}.$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ 4A + 5B &= -2e^5 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A &= 2e^5 \\ B &= -2e^5. \end{cases}$$

Alltså är lösningen

$$y(t) = 2e^5(t-1)e^{-5t}.$$

17.8.2 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' + y' - 2y = x.$$

Den allmänna lösningen är summan av en partikulärlösning och lösningar till den homogena ekvationen.

Homogen lösningar

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + r - 2 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r + 1/2)^2 - 1/4 - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 1 \quad \text{eller} \quad r = -2.$$

Alltså är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$y_{H}(x) = Ae^{x} + Be^{-2x}.$$

Partikulärlösning

Eftersom högerledet är ett förstagradspolynom ansätter vi ett allmänt förstagradspolynom som partikulärlösning $y_P(x) = Cx + D$.

Vänsterledet i differentialekvationen blir

$$y_P'' + y_P' - 2y_P = 0 + C - 2(Cx + D) = (-2C)x + (C - 2D).$$

Identifikation av koefficienter med högerledet i differentialekvationen ger

$$\begin{cases} -2C &= 1 \\ C - 2D &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C &= -1/2, \\ D &= -1/4. \end{cases}$$

En partikulärlösning är alltså

$$y_P(x) = -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}.$$

Allmän lösning

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ae^x + Be^{-2x} - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}.$$

17.8.8 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}.$$

Homogen lösningar

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 4r + 4 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r+2)^2 - 4 + 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = -2 \quad \text{(dubbelrot)}.$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_H(x) = (Ax + B)e^{-2x}.$$

Partikulärlösning

Eftersom högerledet till differentialekvationen är en lösning till den homogena ekvationen måste vi göra en ansats av typen

$$y_P(x) = Cx^m e^{-2x},$$

där m väljs så att $x^m e^{-2x}$ inte är en lösning till den homogena ekvationen. I detta fall måste vi välja $m = 2$. Vi ansätter alltså

$$y_P(x) = Cx^2 e^{-2x}.$$

Vi får

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= 2Cxe^{-2x} + 2Cx^2e^{-2x}(-2) = 2Ce^{-2x}(x - x^2), \\ y_P''(x) &= -4Ce^{-2x}(x - x^2) + 2Ce^{-2x}(1 - 2x) = 2Ce^{-2x}(1 - 4x + 2x^2). \end{aligned}$$

Vänsterledet av differentialekvationen blir

$$y_P'' + 4y_P' + 4y_P = 2Ce^{-2x}(1 - 4x + 2x^2 + 4x - 4x^2 + 2x^2) = 2Ce^{-2x}.$$

Identifikation med högerledet i differentialekvationen ger att $C = 1/2$. Alltså är partikulärlösningen

$$y_P(x) = \tfrac{1}{2}x^2e^{-2x}.$$

Allmän lösning

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = (A + Bx + \tfrac{1}{2}x^2)e^{-2x}.$$

17.8.10 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x.$$

Homogen lösningar

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 2r + 2 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r+1)^2 - 1 + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = -1 \pm i.$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_H(x) = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x.$$

Partikulärlösning

Vi ska ansätta en partikulärlösning av typen

$$y_P(x) = x^m e^{-x}(C\cos x + D\sin x),$$

där heltalet m ska väljas så att ingen av termerna är en lösning till den homogena ekvationen. I detta fall kan vi inte välja $m = 0$ utan måste välja $m = 1$. Vi ansätter alltså

$$y_P(x) = xe^{-x}(C\cos x + D\sin x).$$

Vi får att

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= e^{-x}\cos x\big(C + (-C+D)x\big) + e^{-x}\sin x\big(D - (C+D)x\big),\\ y_P''(x) &= e^{-x}\cos x\big(-2Dx - 2C + 2D\big) + e^{-x}\sin x\big(2Cx - 2C - 2D\big). \end{aligned}$$

Vänsterledet i differentialekvationen blir

$$y_P'' + 2y_P' + 2y_P = e^{-x}(2D\cos x - 2C\sin x).$$

Identifikation med högerledet ger att $C = -1/2$ och $D = 0$. Alltså är partikulärlösningen

$$y_P(x) = -\tfrac{1}{2}xe^{-x}\cos x.$$

Allmän lösning

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = (A - \tfrac{1}{2}x)e^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x.$$

17.8.12 Finn den allmänna lösningen till

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}.$$

Homogen lösningar

Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 2r + 1 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(r+1)^2 - 1 + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = -1 \quad \text{(dubbelrot)}.$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_H(x) = (A + Bx)e^{-x}.$$

Partikulärlösning

Vi ska göra en ansats av typen

$$y_P(x) = x^m e^{-x}(Cx + D),$$

där heltalet m ska väljas så att ingen av termerna är en lösning till den homogena ekvationen. I detta fall måste vi välja $m = 2$. Vi ansätter alltså

$$y_P(x) = e^{-x}(Cx^3 + Dx^2).$$

Vi får att

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= e^{-x}\big(Cx^3 + (-3C+D)x^2 - 2Dx\big),\\ y_P''(x) &= e^{-x}\big(Cx^3 + (6C+D)x^2 + (6C-4D)x + 2D\big). \end{aligned}$$

Vänsterledet i differentialekvationen blir

$$y''_P + 2y'_P + y_P = e^{-x}(6Cx + 2D).$$

Identifikation med högerledet ger att $C = 1/6$ och $D = 0$. Alltså är partikulärlösningen

$$y_P(x) = \tfrac{1}{6}x^3 e^{-x}.$$

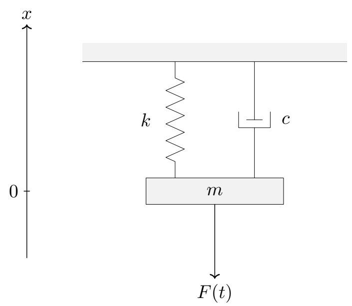
Allmän lösning

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = (A + Bx + \tfrac{1}{6}x^3)e^{-x}.$$

En massa m hänger i en fjäder och i en dämpare, med konstanter k respektive c. Ställ upp massans rörelseekvation och bestäm massans rörelse då den utsätts för en yttre periodisk kraft

$$F(t) = F_0\cos(\omega_1 t).$$



Newtons kraftlag ger oss rörelseekvationen

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -F(t),$$

där x är massans läge på den vertikala koordinataxeln (med lämpligt val av nolläge). Vi delar med m och inför nya omskalade koefficienter

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t).$$

Vi löser nu denna differentialekvation.

Homogen lösning

Om vi antar att dämpningen är liten ($\delta < \omega_0$) så är den homogena lösningen

$$x_H(t) = e^{-\delta t}\big(A\cos\omega t + B\sin\omega t\big),$$

där $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ kallas för egenvinkelfrekvensen.

Eftersom $\delta > 0$ kommer den homogen lösningen ganska snabbt att avklinga och dö ut. Den homogena lösningen beskriver alltså en transient, övergående rörelse.

Partikulärlösning

Eftersom högerledet är $f(t) = f_0\cos(\omega_1 t)$ ansätter vi

$$x_P(t) = C\cos\omega_1 t + D\sin\omega_1 t.$$

Efter en del räknande får vi att

$$x_P(t) = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\delta\omega_1)^2}\Big(\big(\omega_0^2 - \omega_1^2\big)\cos\omega_1 t + 2\delta\omega_1\sin\omega_1 t\Big)$$

Detta uttryck kan vi med hjälp av formeln

$$a\,\cos x + b\,\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\cos(x + \gamma)$$

skriva om till

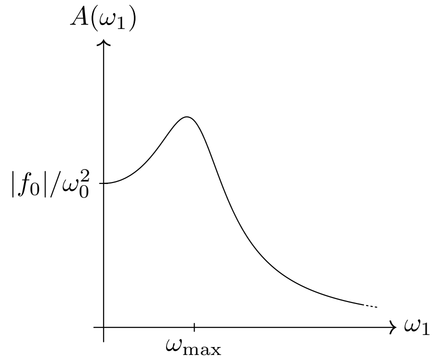
$$x_P(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\delta\omega_1)^2}}\cos(\omega_1 t + \gamma)$$

där γ är en fasförskjutning.

Beroende på vilken vinkelhastighet ω_1 som den yttre kraften har, varierar massklumpens amplitud,

$$A(\omega_1) = \frac{|f_0|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\delta\omega_1)^2}}.$$

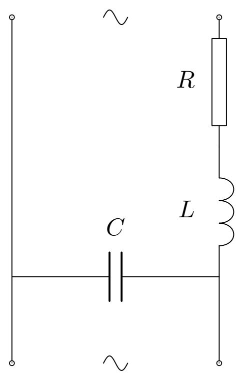
Ritar vi upp ett diagram av amplitudens beroende av ω_1 fås typiskt diagrammet



Amplituden antar ett maximalt värde vid den s.k. resonansfrekvensen $\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$.

Ett enkelt exempel på ett bandpassfilter är serieresonanskretsen till höger. En inspänning u_{in} matas uppifrån och nertill får vi en utspänning u.

Bestäm hur utspänningens amplitud beror på frekvensen av en inspänning som är en sinusformad växelspänning.



Vi inför en ström i som genomlöper kretsen och

$$\begin{aligned} u_1 &= \text{spänningen över resitorn } R, \\ u_2 &= \text{spänningen över spolen } L. \end{aligned}$$

Resistorn, spolen och kondensatorn uppfyller sambanden

$$u_1 = R \cdot i, \quad u_2 = L\,\frac{di}{dt} \quad \text{och} \quad i = C\,\frac{du}{dt}.$$

Ur dessa ekvationer får vi att

$$u_2 = L\,\frac{di}{dt} = LC\,\frac{d^2u}{dt^2} \quad \text{och} \quad u_1 = R\,i = RC\,\frac{du}{dt}.$$

Kirchoffs spänningslag ger att

$$u_{\text{in}} = \hat{u}\cos\omega t = u_1 + u_2 + u,$$

vilket betyder att u uppfyller differentialekvationen

$$LC\,\ddot{u} + RC\,\dot{u} + u = \hat{u}\cos\omega t.$$

Vi vet från mekanikexemplet att den homogena lösningen representerar en transient spänning som kommer snabbt att avklinga. För att bestämma partikulärlösningen ansätter vi

$$u_{\scriptscriptstyle P}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Efter en hel del räkningar får vi att

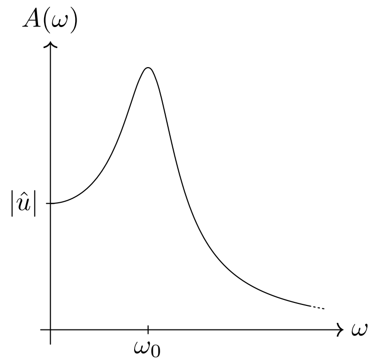
$$\begin{aligned} u_{\scriptscriptstyle P}(t) &= \frac{\hat{u}}{LC\left(\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{R}{L}\right)^2\right)}\left(\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)\cos\omega t + \frac{R}{L}\sin\omega t\right) \\ &= \frac{\hat{u}}{LC\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{R}{L}\right)^2}}\cos(\omega t + \gamma). \end{aligned}$$

Utspänningens amplitud är alltså

$$A(\omega) = \frac{|\hat{u}|}{LC\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{R}{L}\right)^2}}.$$

Om vi plottar amplitudens beroende av ω får vi diagrammet till höger.

Notera att det huvudsakligen är frekvenser kring ω_0 som förstärks medan andra frekvenser dämpas. Detta är förklaringen till namnet bandpassfilter.



Lektion 8, Envariabelanalys den 2 november 1999

4.2.6 Bestäm om funktionen $f(x) = x^2 - 1$, definierad i intervallet $(2, 3)$, har några lokala eller globala extremvärden, och finn i sådant fall dessa.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Kritiska punkter är de punkter där derivatan är noll,
$$f'(x) \equiv 2x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.$$
Eftersom $x = 0$ inte tillhör definitionsmängden finns inga kritiska punkter.
2. Derivatan f' är definierad i hela intervallet $(2, 3)$, och därför finns inga punkter där f inte är deriverbar.
3. Ändpunkterna 2 och 3 tillhör inte intervallet.

Alltså finns inga punkter där ett eventuellt lokalt extremvärde skulle kunna antas. Lokala extremvärden saknas!

Eftersom det inte finns några lokala extremvärden finns heller inga globala extremvärden.

4.2.14 Bestäm om funktionen $f(x) = |x^2 - x - 2|$, definierad i intervallet $[-3, 3]$, har några lokala eller globala extremvärde, och bestäm dessa.

De punkter som är aktuella som lokala eller globala extrempunkter är

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att
$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - x - 2) \cdot (2x - 1).$$
Den första faktorn är aldrig noll, medan den andra faktorn är noll i $x = 1/2$. Derivatan är noll i $x = 1/2$.
2. Beloppsfunktionen är deriverbar överallt utom i punkter där dess argument är noll, d.v.s. utom i punkter där
$$x^2 - x - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -1 \quad \text{eller} \quad x = 2.$$
3. Ändpunkterna $x = -3$ och $x = 3$ tillhör intervallet.

De punkter som är kandidater till att vara extrempunkter är alltså
$$-3, \quad -1, \quad 1/2, \quad 2 \quad \text{och} \quad 3.$$

För att bestämma om dessa punkter är lokala max-, min- eller terasspunkter undersöker vi hur derivatans tecken varierar i intervallet.

$x =$	-3		-1		$1/2$		2		3
$\operatorname{sgn}(x^2 - x - 2)$	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$	$+$
$2x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	$+$
$f(x)$	10	$\searrow$	0	$\nearrow$	$9/4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Ur tabellen kan vi avläsa svaren.

$$\begin{array}{lrl}
\text{Lokalt min:} & 0 & \text{i } x = -1 \text{ och } x = 2. \\
\text{Lokalt max:} & 9/4 & \text{i } x = 1/2, \\
 & 4 & \text{i } x = 3, \\
 & 10 & \text{i } x = -3. \\
\text{Globalt min:} & 0 & \text{i } x = -1 \text{ och } x = 2. \\
\text{Globalt max:} & 10 & \text{i } x = -3.
\end{array}$$

KTH KS 99 Låt

$$f(x) = \begin{cases} 16x - x^2 & \text{för} \quad 0 \le x \le 4, \\ -6x - x^2 & \text{för} \; -6 \le x < 0. \end{cases}$$

Bestäm största och minsta värdet av f på intervallet $-6 \le x \le 4$.

Eftersom intervallet är slutet och funktionen är kontinuerlig har funktionen f ett största och minsta värde, och dessa är dessutom lokala extremvärden.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är definierad,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Derivatan av f är

$$f'(x) = \begin{cases} 16 - 2x & \text{för} \quad 0 < x < 4, \\ -6 - 2x & \text{för} \; -6 < x < 0. \end{cases}$$

Uttrycket $16 - 2x$ är noll då $x = 8$, som ligger utanför intervallet $(0, 4)$.
Uttrycket $-6 - 2x$ är noll då $x = -3$.
Alltså är $x = -3$ en kritisk punkt.

2. Funktionen f ges av polynomuttryck varför f är deriverbar i de öppna delintervallen. I fogen $x = 0$ mellan uttrycken har vi att

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-6 - 2x) = -6,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (16 - 2x) = 16.$$

Eftersom $f'_+(0) \ne f'_-(0)$ är f inte deriverbar i $x = 0$.

3. Ändpunkterna är -6 och 4.

För att bestämma om dessa punkter är lokala max-, min- eller terasspunkter undersöker vi hur derivatans tecken varierar i intervallen.

$x =$	-6		-3		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	48

Ur tabellen kan vi avläsa svaret.

Största värde: 48 i $x = 4$,
Minsta värde: 0 i $x = -6$ och $x = 0$.

4.2.26 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen f.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritisk punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att

$$f'(x) \equiv \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1.$$

2. Derivatan f' är definierad överallt.
3. Eftersom f är definierad på hela tallinjen saknas ändliga ändpunkter.

De enda möjliga kandidaterna är $x = -1$ och $x = +1$.

För att klassificera dessa punkter undersöker vi hur derivatans tecken varierar i intervallet.

$x =$		-1		$+1$	
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$

Ur tabellen kan vi avläsa att

lokalt min:	$-\frac{1}{2}$	i punkten $x = -1$,
lokalt max:	$\frac{1}{2}$	i punkten $x = +1$.

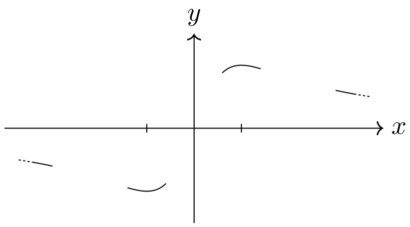
För att kunna avgöra om dessa punkter även är globala extrempunkter måste vi undersöka gränsvärdena

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

Vi ser därmed att

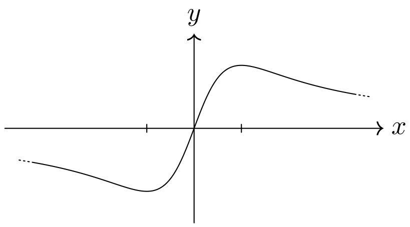
globalt min:	$-\frac{1}{2}$	i punkten $x = -1$,
globalt max:	$\frac{1}{2}$	i punkten $x = +1$.

Vi ritar in extrempunkterna och att funktionen går mot 0 då $x \to \pm\infty$.



Vi vet från teckenstudiet av f' att f är avtagande för $x < -1$, växande för $-1 < x < 1$ och avtagande för $1 < x$. Det är därför bara att fylla i mellanrummen ovan.

En viktig detalj att notera är att funktionen är udda $\big(f(-x) = -f(x)\big)$ och därför anti-symmetrisk kring y-axeln.



4.2.30 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = x + \sin x$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att
$$f'(x) \equiv 1 + \cos x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = (2n+1)\pi \quad \text{för alla heltal } n.$$
2. Derivatan f' är definierad överallt.
3. Ändliga ändpunkter saknas.

Eftersom $\cos x > -1$ för alla $x \neq (2n+1)\pi$ är

$$f'(x) > 0 \qquad \text{för alla } x \neq (2n+1)\pi,$$

och punkterna $\{(2n+1)\pi\}$ är terasspunkter.

lokalt min:	saknas
lokalt max:	saknas

Eftersom det saknas lokala extremvärden och definitionsmängden är obegränsad, så saknas globala extremvärden.

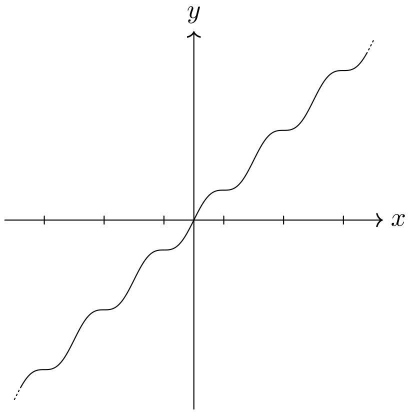
globalt min:	saknas
globalt max:	saknas

Eftersom sinus-funktionen är 2π-periodisk är

$$f(x+2\pi) = x + 2\pi + \sin(x+2\pi) = x + 2\pi + \sin x = f(x) + 2\pi.$$

Detta samband betyder att grafen till f har exakt samma utseende på intervallen $\big((2n-1)\pi, (2n+1)\pi\big)$ men olika höjd.

Funktionen är växande och har terasspunkter i $\{(2n+1)\pi\}$.



4.2.32 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = x - 2\arctan x$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att

$$f'(x) \equiv 1 - \frac{2}{1+x^2} \equiv \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1.$$

2. Derivatan f' är definierad överallt.
3. Ändliga ändpunkter saknas.

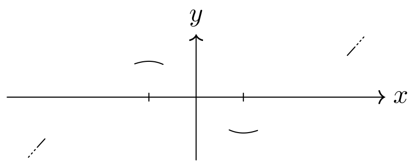
Vi bestämmer punkternas karaktär genom att studera derivatans tecken i olika intervall. Vi tar också med gränsvärdena då $x \to \pm\infty$ eftersom dessa behövs när vi ska bestämma globala extremvärden.

$x =$	$-\infty$		-1		$+1$		∞
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+1		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1+2\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$1-2\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	∞

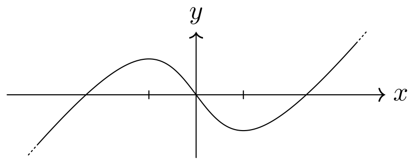
Ur tabellen kan vi avläsa extrempunkterna och deras typ.

Lokalt min:	$1-\frac{\pi}{2}$	i punkten $x=1$.
Lokalt max:	$\frac{\pi}{2}-1$	i punkten $x=-1$.
Globalt min:	saknas.	
Globalt max:	saknas.	

Vi ritar in extrempunkterna. Eftersom vi vet funktionens lokala beteende kring dessa punkter och dess beteende då $x \to \pm\infty$ får vi figuren



Sedan återstår bara att fylla i mellanrummen där funktionen är monoton. Funktionen är dessutom udda.



4.2.36 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = x^2e^{-x^2}$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att

$$\begin{aligned} f'(x) &\equiv 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot (-2x)e^{-x^2} \equiv 2x(1-x^2)e^{-x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow &\qquad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = \pm 1. \end{aligned}$$

2. Derivatan f' är definierad överallt.
3. Ändliga ändpunkter saknas.

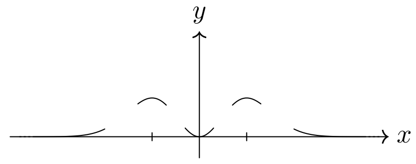
Vi bestämmer punkternas karaktär genom att studera derivatans tecken i olika intervall.

$x =$	$-\infty$		-1		0		$+1$		∞
$2x$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
e^{-x^2}		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

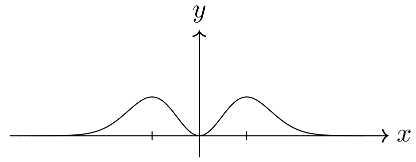
Ur tabellen kan vi avläsa extrempunkterna och deras typ.

Lokalt min:	0	i punkten $x = 0$.
Lokalt max:	e^{-1}	i punkterna $x = -1$ och $x = 1$.
Globalt min:	0	i punkten $x = 0$.
Globalt max:	e^{-1}	i punkterna $x = -1$ och $x = 1$.

Vi ritar in extrempunkterna. Eftersom vi vet funktionens lokala beteende kring dessa punkter och dess beteende då $x \to \pm\infty$ får vi figuren



Sedan återstår bara att fylla i mellanrummen där funktionen är monoton. Funktionen är dessutom jämn, d.v.s. symmetrisk kring y-axeln.



4.2.42 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = (x-1)^{2/3} - (x+1)^{2/3}$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att

$$\begin{aligned} f'(x) &\equiv \tfrac{2}{3}(x-1)^{-1/3} - \tfrac{2}{3}(x+1)^{-1/3} = 0 \\ \Leftrightarrow &\qquad (x-1)^{-1/3} = (x+1)^{-1/3}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Eftersom funktionen $x \mapsto x^{-1/3}$ är monoton kan inte $(*)$ ha någon lösning.

2. Funktionen $x \mapsto x^{2/3}$ är deriverbar utom i $x = 0$. Därför är funktionen f deriverbar utom i $x = -1$ och $x = 1$.

3. Ändliga ändpunkter saknas.

Precis som tidigare ska vi nu göra en tabell över derivatans tecken. Vi får dock lite problem med gränsvärdena $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ som kräver en liten extra insats för att bestämmas.

Det ena gränsvärdet som vi ska beräkna är

$$\lim_{x\to\infty} \Big[(x-1)^{2/3} - (x+1)^{2/3}\Big].$$

Eftersom termerna i differensen har exponent $2/3$ är det ingen mening att använda det vanliga tricket med konjugatförlängning; vi skulle bara få en differens mellan termer med exponent $4/3$. Istället använder vi formeln

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad \Leftrightarrow \qquad a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

för att få bort tredjedelen från exponenterna. Vi får att gränsvärdet blir

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{(x-1)^{4/3}+(x-1)^{2/3}(x+1)^{2/3}+(x+1)^{4/3}}\\
&\quad= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{x^{4/3}\Big[\big(1-\frac{1}{x}\big)^{4/3}+\big(1-\frac{1}{x}\big)^{2/3}\big(1+\frac{1}{x}\big)^{2/3}+\big(1+\frac{1}{x}\big)^{4/3}\Big]}\\
&\quad= \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{x^{1/3}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{[\;\cdots\;]} = 0\cdot\tfrac{1}{3} = 0.
\end{aligned}$$

På samma sätt fås att

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

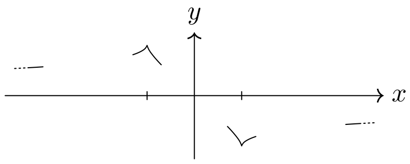
Tabellen över derivatans tecken blir

$x =$	$-\infty$		-1		$+1$		∞
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	$-2^{2/3}$	$\nearrow$	0

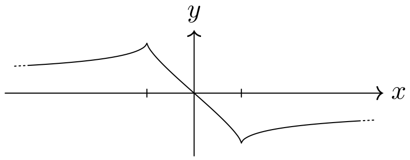
Ur tabellen kan vi avläsa extrempunkterna och deras karaktär.

Lokalt min:	$-2^{2/3}$	i punkten $x = 1$.
Lokalt max:	$+2^{2/3}$	i punkten $x = -1$.
Globalt min:	$-2^{2/3}$	i punkten $x = 1$.
Globalt max:	$+2^{2/3}$	i punkten $x = -1$.

Funktionen $x \mapsto x^{2/3}$ har en neråtvänd spets i $x = 0$. Därför har $f(x)$ ”spetsar” vid $x = -1$ och $x = 1$.



Det återstår bara att fylla i mellanrummen där funktionen är monoton. Funktionen är också udda.



4.2.44 Bestäm och klassificera alla lokala extremvärden till $f(x) = x - x^{1/3}$. Bestäm om något av dessa extremvärden är globalt. Skissera grafen till funktionen.

Ett lokalt extremvärde kan antas i någon av följande punkter:

1. kritiska punkter,

2. punkter där funktionen inte är deriverbar,

3. ändpunkter som tillhör intervallet.

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har att

$$f'(x) \equiv 1 - \tfrac{1}{3}x^{-2/3} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\tfrac{1}{3\sqrt{3}}.$$

2. Derivatan f' är odefinierad i $x = 0$.
3. Ändliga ändpunkter saknas.

För att bestämma gränsvärdena $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ använder vi samma algebraiska trick som i uppgift 4.2.42.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 + x^{4/3} + x^{2/3}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - x^{-1}}{1 + x^{-2/3} + x^{-4/3}} = \pm\infty.\end{aligned}$$

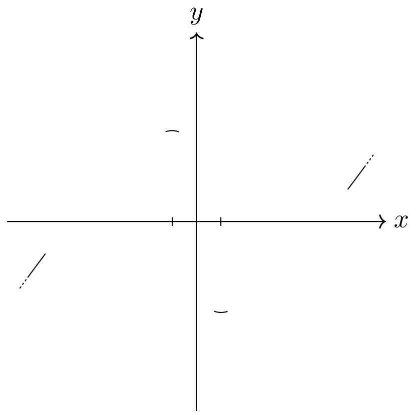
Vi bestämmer punkternas karaktär genom att studera derivatans tecken i olika intervall.

$x =$	$-\infty$		$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{3\sqrt{3}}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	∞

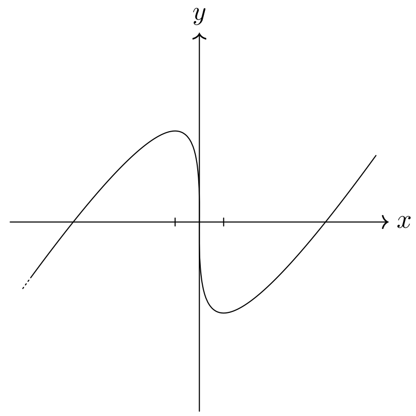
Ur tabellen kan vi avläsa extrempunkterna och deras typ.

Lokalt min:	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	i punkten $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.
Lokalt max:	$+\frac{2}{3\sqrt{3}}$	i punkten $x = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$.
Globalt min:	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	i punkten $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.
Globalt max:	$+\frac{2}{3\sqrt{3}}$	i punkten $x = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Vi ritar in extrempunkterna. Eftersom vi vet funktionens lokala beteende kring dessa punkter och dess beteende då $x \to \pm\infty$ får vi figuren



Sedan återstår bara att fylla i mellanrummen. I punkten $x = 0$ har funktionen en lodrät tangent. Dessutom är funktionen udda.



4.3.26 Klassificera de kritiska punkterna till

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}$$

genom att använda andraderivatan.

De kritiska punkterna ges av

$$f'(x) \equiv 1 - \frac{8}{x^3} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2.$$

Vi har att $f''(x) = \dfrac{24}{x^4} > 0$ för alla x, varför $x = 2$ är en lokal minimipunkt.

4.3.28 Klassificera de kritiska punkterna till

$$f(x) = \frac{x}{2^x}$$

genom att använda andraderivatan.

De kritiska punkterna ges av

$$f'(x) \equiv \frac{1 \cdot 2^x - x \cdot 2^x \log 2}{2^{2x}} \equiv \frac{1 - x \log 2}{2^x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{\log 2}.$$

Vi har

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\log 2 \cdot 2^x - (1 - x \log 2) \cdot 2^x \log 2}{2^{2x}} \\ f''(2) &= -\frac{\log 2}{2^{1/\log 2}} < 0 \end{aligned}$$

vilket betyder att $x = 2$ är en lokal maximipunkt.

4.3.32 Klassificera de kritiska punkterna till

$$f(x) = (x^2 - 4)^2$$

genom att använda andraderivatan.

De kritiska punkterna ges av

$$f'(x) \equiv 2(x^2 - 4) \cdot 2x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -2, \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 2.$$

Vi har att $f''(x) = 12x^2 - 16$ varför

$$\begin{aligned} f''(-2) &= 24 - 16 = 8 > 0 && \Rightarrow \quad \text{lokal minimipunkt,} \\ f''(0) &= -16 < 0 && \Rightarrow \quad \text{lokal maximipunkt,} \\ f''(+2) &= 24 - 16 = 8 > 0 && \Rightarrow \quad \text{lokal minimipunkt.} \end{aligned}$$

Lektion 9, Envariabelanalys den 4 november 1999

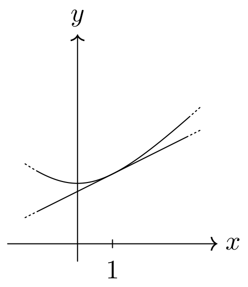
4.7.4 Finn linjäriseringen av $y = \sqrt{3+x^2}$ i punkten $x = 1$.

Linjäriseringen har ekvationen

$$L(x) = y(1) + y'(1)(x-1).$$

Eftersom

$$\begin{aligned} y(1) &= \sqrt{4} = 2, \\ y'(1) &= \frac{d}{dx}\sqrt{3+x^2}\bigg|_{x=1} \\ &= \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$



blir ekvationen

$$L(x) = \tfrac{1}{2}(x-1) + 2.$$

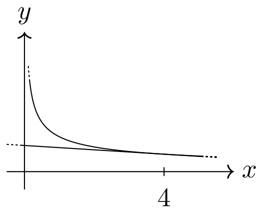
4.7.6 Finn linjäriseringen av $y = 1/\sqrt{x}$ i punkten $x = 4$.

Linjäriseringen har ekvationen

$$L(x) = y(4) + y'(4)(x-4).$$

Eftersom

$$\begin{aligned} y(4) &= 1/\sqrt{4} = 1/2, \\ y'(4) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x}}\bigg|_{x=4} = \frac{-\frac{1}{2}}{x^{3/2}}\bigg|_{x=4} = -\frac{1}{16}, \end{aligned}$$



blir ekvationen

$$L(x) = -\tfrac{1}{16}(x-4) + \tfrac{1}{2}.$$

4.7.16 Använd en lämplig linjärisering för att bestämma en approximation av värdet $\sqrt{47}$.

Bestäm felets tecken och skatta dess storlek. Använd denna information för att bestämma ett intervall som helt säkert innehåller värdet $\sqrt{47}$.

Det verkar naturligt att använda funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Vi ska alltså bestämma $f(47)$. I den närbelägna punkten $x = 49$ vet vi f:s exakta värde, $f(49) = 7$. Vi väljer därför att linjärisera f kring punkten $x = 49$.

Linjäriseringen blir

$$L(x) = f(49) + f'(49)(x-49) = 7 + \tfrac{1}{14}(x-49).$$

Ett approximativt värde på $\sqrt{47}$ är alltså

$$L(47) = 7 + \tfrac{1}{14}\cdot(-2) = \tfrac{48}{7} \approx 6{,}85714.$$

Felet i approximationen ges av uttrycket

$$\frac{f''(\xi)}{2}(x-49)^2,$$

där $x < \xi < 49$. För $x = 47$ har vi alltså att felet är

$$2f''(\xi) = \frac{-2}{4\xi\sqrt{\xi}}.$$

Vi ser att $f'' < 0$ i intervallet $(47, 49)$ så feltermen är alltså negativt.

Vidare ser vi också att f'' är en växande funktion varför vi har att

$$\begin{aligned} f''(\xi) &< f''(49) = \frac{-1}{4\cdot 49\cdot\sqrt{49}} = \frac{-1}{1372}, \\ f''(\xi) &> f''(47) = \frac{-1}{4\cdot 47\cdot\sqrt{47}} > \frac{-1}{4\cdot 47\cdot\sqrt{36}} = \frac{-1}{1176}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$-\frac{1}{588} < 2f''(\xi) < -\frac{1}{686}.$$

Felet ligger alltså inom intervallet $(\frac{-1}{588}, \frac{-1}{686})$ och därmed ligger det sanna värdet av $\sqrt{47}$ inom intervallet

$$\sqrt{47} \in \big(L(74) + \tfrac{-1}{588}, L(47) + \tfrac{-1}{686}\big) = (\tfrac{48}{7} - \tfrac{1}{588}, \tfrac{48}{7} - \tfrac{1}{686}) \approx (6{,}85544;\ 6{,}85568).$$

Jämför detta med det sanna värdet

$$\sqrt{47} = 6{,}85565\cdots$$

4.7.22 Använd en lämplig linjärisering för att bestämma ett approximativt värde av $\sin 33°$.

Bestäm felets tecken och skatta dess storlek. Använd denna information för att bestämma ett intervall som helt säkert innehåller värdet $\sin 33°$.

Sätt

$$f(x) = \sin x.$$

Vi ska bestämma $f(33°)$. Den närmsta punkt vi vet det exakta värdet på f är $x = 30°$. Vi linjäriserar kring denna punkt

$$L(x) = f(\tfrac{\pi}{6}) + f'(\tfrac{\pi}{6})(x - \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x - \tfrac{\pi}{6}) + \tfrac{1}{2}.$$

Ett approximativt värde på $\sin 33° = \sin(\frac{33}{170}\pi)$ är alltså

$$L(\tfrac{33}{180}\pi) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big) + \tfrac{1}{2} \approx 0{,}54534.$$

Den linjära approximationen uppfyller sambandet

$$f\big(\tfrac{33}{180}\pi\big) = L\big(\tfrac{33}{180}\pi\big) + \tfrac{1}{2}f''(\xi)\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big)^2$$

där $\frac{1}{6}\pi < \xi < \frac{33}{180}\pi$. För att skatta feltermen behöver vi alltså bestämma

$$f''(x) = -\sin x.$$

Vi ser att $f'' < 0$ i intervallet $\big(\frac{1}{6}\pi, \frac{33}{180}\pi\big)$ varför felet är negativt.

Eftersom sinusfunktionen är växande i intervallet $\big(\frac{1}{6}\pi, \frac{33}{180}\pi\big)$ är f'' avtagande i samma intervall och vi har att

$$f''(\xi) > f''\big(\tfrac{33}{180}\pi\big) = -\sin\big(\tfrac{33}{180}\pi\big) > -\sin\tfrac{\pi}{4} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}},$$
$$f''(\xi) < f''\big(\tfrac{1}{6}\pi\big) = -\sin\tfrac{\pi}{6} = -\tfrac{1}{2}.$$

Alltså är

$$-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big)^2 < \tfrac{1}{2}f''(\xi)\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big)^2 < -\tfrac{1}{4}\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big)^2,$$

eller med siffror och avrundat

$$-9{,}6929 \cdot 10^{-4} < \tfrac{1}{2}f''(\xi)\big(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\big)^2 < -6{,}8539 \cdot 10^{-4}.$$

Därmed ligger det sanna värdet av $\sin 33°$ inom intervallet

$$\begin{aligned}\sin 33° &\in \big(L(\tfrac{33}{180}\pi) - 9{,}6929 \cdot 10^{-4};\ L(\tfrac{33}{180}\pi) - 6{,}8539 \cdot 10^{-4}\big)\\ &\approx (0{,}5443757;\ 0{,}5446596).\end{aligned}$$

Jämför detta med det sanna värdet $\sin 33° = 0{,}5446390\cdots$

4.8.2 Bestäm Taylorpolynomet till $\cos x$ av grad 3 kring punkten $x = \pi/4$.

Taylors formel säger att

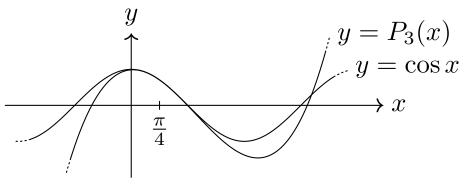
$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3,$$

där $a = \pi/4$. Vi behöver alltså beräkna

$$f(\pi/4) = \cos\tfrac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$f'(\pi/4) = \frac{d}{dx}\cos x\,\Big|_{x=\pi/4} = -\sin\tfrac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$f''(\pi/4) = \frac{d}{dx} - \sin x\,\Big|_{x=\pi/4} = -\cos\tfrac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$f'''(\pi/4) = \frac{d}{dx} - \cos x\,\Big|_{x=\pi/4} = \sin\tfrac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vi får att

$$P_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - (x - \tfrac{1}{4}\pi) - \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^2 + \tfrac{1}{6}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^3\Big).$$



4.8.6 Bestäm Taylorpolynomet av grad n till $\frac{1}{2+x}$ kring punkten $x = 1$.

För att bestämma Taylorpolynomet av grad n kring $x = 1$ behöver vi bestämma derivatorna

$$f'(1), \quad f''(1), \quad \dots, \quad f^{(n-1)}(1) \ \text{ och } \ f^{(n)}(1).$$

Med ett induktivt resonemang får vi att (se anteckningarna till gruppstudium 7)

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\, k!}{(2+x)^{k+1}}.$$

I punkten $x = 1$ fås speciellt

$$f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^k\, k!}{3^{k+1}}.$$

Taylorpolynomet blir

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-1) + \frac{1}{3^3}(x-1)^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n. \end{aligned}$$

4.8.8 Använd Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x) = \sqrt{x}$ kring punkten $x = 64$ för att approximera $\sqrt{61}$. Skatta felet och skriv upp det minsta intervall som säkert innehåller det sanna värdet.

Taylors formel av grad 2 kring $x = a$ lyder

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3$$

där ξ ligger mellan a och x. I vårt fall är

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{och} \quad a = 64.$$

så vi behöver först bestämma

$$\begin{aligned} f(64) &= \sqrt{64} = 8, \\ f'(64) &= \frac{d}{dx}\sqrt{x}\,\bigg|_{x=64} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\bigg|_{x=64} = \frac{1}{16}, \\ f''(64) &= \frac{d}{dx}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\bigg|_{x=64} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\,\bigg|_{x=64} = -\frac{1}{2048}, \\ f'''(\xi) &= \frac{d}{dx} - \frac{1}{4x\sqrt{x}}\,\bigg|_{x=\xi} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}\,\bigg|_{x=\xi} = \frac{3}{8\xi^{5/2}}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\sqrt{x} = 8 + \tfrac{1}{16}(x-64) - \tfrac{1}{4096}(x-64)^2 + \frac{1}{16\xi^{5/2}}(x-64)^3.$$

Om vi sätter $x = 61$ och ignorerar resttermen så får vi approximationen

$$\sqrt{61} \approx 8 + \tfrac{1}{16}(61-64) - \tfrac{1}{4096}(61-64)^2 \approx 7{,}81030.$$

Istället för att göra en noggrann undersökning av resttermens tecken och dess storlek gör vi en ganska grov skattning. Vi vet att $61 < \xi < 64$ och därför är

$$|R_3(61)| = \left|\frac{1}{16\cdot\xi^{5/2}}\cdot(-3)^3\right| < \frac{1}{16\cdot 61^{5/2}}\cdot 3^3 < \frac{1}{16\cdot 61^2\cdot\sqrt{49}}\cdot 3^3 \lessapprox 6{,}48\cdot 10^{-5}.$$

Vi kan därför säga att

$$\sqrt{61} \in (7{,}81030 - 6{,}48\cdot 10^{-5};\ 7{,}81030 + 6{,}48\cdot 10^{-5}) \approx (7{,}81023;\ 7{,}81037).$$

Detta kan jämföras med det sanna värdet

$$\sqrt{61} = 7{,}81024967\ldots$$

Anm. Om termerna har alternerande tecken i Taylorserien kan man visa att felet alltid är mindre än beloppet av den först försummade termen (se sats 9.4.15, sid 549).

4.8.10 Använd Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x) = \arctan x$ kring punkten $x = 1$ för att approximera $\arctan 0{,}97$. Skatta felet och skriv upp det minsta intervall som säkert innehåller det sanna värdet.

Taylors formel av grad 2 kring $x = a$ lyder

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3,$$

där ξ ligger mellan a och x. I vårt fall med $f(x) = \arctan x$ och $a = 1$ är

$$\begin{aligned}
f(1) &= \pi/4,\\
f'(1) &= \frac{d}{dx}\arctan x\,\bigg|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=1} = 1/2,\\
f''(1) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=1} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=1} = -1/2,\\
f'''(\xi) &= \frac{d}{dx}\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=1} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=\xi} = \frac{2(3\xi^2-1)}{(1+\xi^2)^3}.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\arctan x = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{3}\frac{3\xi^2-1}{(\xi^2+1)^3}(x-1)^3.$$

Om vi sätter $x = 0{,}97$ och ignorerar resttermen så får vi approximationen

$$\arctan 0{,}97 \approx \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(0{,}97-1) - \tfrac{1}{4}(0{,}97-1)^2 \approx 0{,}77017.$$

I feltermen vet vi att $0{,}97 < \xi < 1$, varför vi kan skatta feltermen till

$$|R_3(0{,}97)| = \left|\frac{1}{3}\frac{3\xi^2-1}{(\xi^2+1)^3}\cdot 0{,}03^3\right| < \frac{1}{3}\frac{3\cdot 1^2-1}{(0{,}97^2+1)^3}\cdot 0{,}03^3 \lessapprox 2{,}47\cdot 10^{-6}.$$

Vi kan därför säga att

$$\begin{aligned}
\arctan 0{,}97 &\in (0{,}770173 - 2{,}47\cdot 10^{-6};\ 0{,}770173 + 2{,}47\cdot 10^{-6})\\
&\approx (0{,}770170;\ 0{,}770176).
\end{aligned}$$

Detta kan jämföras med det sanna värdet

$$\arctan 0{,}97 = 0{,}770170914\cdots$$

4.8.20 Bestäm Taylorpolynomet $P_8(x)$ till e^{-x^2} kring punkten $x = 0$.

Taylorutvecklingen för e^x kring $x = 0$ lyder

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + O(x^5).$$

Om vi ersätter x med $-x^2$ i formeln ovan får vi att

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{24}x^8 + O(x^{10}).$$

Entydighetssatsen för Taylorpolynom ger att

$$P_8(x) = 1 - x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{24}x^8.$$

4.8.22 Bestäm Taylorpolynomet $P_5(x)$ till $\sin x$ kring punkten $x = \pi$.

Vi skriver om funktionen med hjälp av trigonometriska formler

$$\sin x = \sin\bigl((x-\pi)+\pi\bigr) = \sin(x-\pi)\cdot\cos\pi + \cos(x-\pi)\cdot\sin\pi = -\sin(x-\pi).$$

Sätter vi $s = x - \pi$ ska vi alltså Taylorutveckla $-\sin s$ kring $s = 0$,

$$\begin{aligned}\sin x = -\sin s &= -\Bigl(s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + O(s^7)\Bigr)\\ &= -(x-\pi) + \tfrac{1}{6}(x-\pi)^3 - \tfrac{1}{120}(x-\pi)^5 + O(x-\pi)^7.\end{aligned}$$

Entydighetssatsen för Taylorpolynom ger att

$$P_5(x) = -(x-\pi) + \tfrac{1}{6}(x-\pi)^3 - \tfrac{1}{120}(x-\pi)^5.$$

4.8.29 Vilken är den bästa 2:a gradsapproximationen till $f(x) = (x-1)^2$ kring $x = 0$? Hur stort är felet i denna approximation?

Besvara samma frågor för $g(x) = x^3+2x^2+3x+4$. Kan konstanten $\frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$ i resttermen för andragradsapproximationen förbättras (göras mindre)?

Eftersom f kan skrivas som

$$f(x) = 1 - 2x + x^2 = 1 - 2x + x^2 + O(x^3)$$

ger entydighetssatsen för Taylorpolynom att Taylorpolynomet $P_2(x)$ till f är

$$P_2(x) = 1 - 2x + x^2.$$

Eftersom $P_2(x) = f(x)$ är felet 0.

Funktionen g kan skrivas som

$$g(x) = 4 + 3x + 2x^2 + O(x^3).$$

Taylorutvecklingens unikhet ger att Taylorpolynomet $P_2(x)$ till g är

$$P_2(x) = 4 + 3x + 2x^2.$$

Resttermen i Taylorutvecklingen är

$$R_3(x) = \frac{g'''(\xi)}{3!}(x-0)^3.$$

Eftersom $g'''(x) \equiv 6$ blir restermen

$$R_3(x) = x^3.$$

Vi ska jämföra detta med det exakta felet

$$g(x) - R_3(x) = x^3.$$

Resttermen $R_3(x)$ är alltså lika med det exakta felet, och då finns inte rum för någon förbättring av feluppskattningen.

Bestäm Taylorpolynomet $P_3(x)$ till $e^x \cos x$ kring punkten punkten $x = 0$.

Antag att vi vet Taylorutvecklingen av e^x och $\cos x$ i $x = 0$,

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4),\\ \cos x &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4).\end{aligned}$$

Då är

$$\begin{aligned}e^x\cos x &= \Bigl(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)\Bigr)\Bigl(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\Bigr)\\ &= \bigl\{x^nO(x^m) = O(x^{m+n});\ O(x^n)O(x^m) = O(x^{m+n})\bigr\}\\ &= 1 + x - \tfrac{1}{3}x^3 + O(x^4).\end{aligned}$$

Entydighetssatsen för Taylorpolynom ger att

$$P_3(x) = 1 + x - \tfrac{1}{3}x^3.$$

Lektion 10, Envariabelanalys den 9 november 1999

Visa att $\sin x = O(x)$ då $x \to 0$.

Vi ska visa att det finns ett $C > 0$ så att

$$|\sin x| \le C|x| \quad \text{för alla } x \text{ i en punkterad omgivning av } 0. \tag{$*$}$$

Eftersom

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

så vet vi från gränsvärdesdefinitionen att

$$1 - \varepsilon \le \frac{\sin x}{x} \le 1 + \varepsilon \quad \text{för alla } x \text{ i en punkterad omgivning av } 0,$$

vilket ger speciellt att

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le 1 + \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |\sin x| \le (1+\varepsilon)|x|$$

i en punkterad omgivning av 0. Därmed har vi visat $(*)$.

Anm. Alltså duger $C = 1 + \varepsilon$ som konstant, men omgivningens storlek får vi inte fram med ovanstående resonemang. Vi vet iallafall att det finns en omgivning där $(*)$ är uppfylld, och det räcker i denna uppgift.

Visa att $e^x = 1 + x + O(x^2)$ då $x \to 0$.

Om vi Taylorutvecklar e^x i punkten $x = 0$ får vi

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}e^{\xi}x^2,$$

där ξ ligger mellan 0 och x. Eftersom $x \mapsto e^x$ är en växande funktion så är resttermen

$$\left|\tfrac{1}{2}e^{\xi}x^2\right| \le \tfrac{1}{2}e^{\max\{0,x\}} \cdot |x^2| \le \tfrac{1}{2}e^1 \cdot |x^2| \qquad \text{för alla } |x| < 1.$$

Alltså är resttermen $O(x^2)$ och vi kan skriva

$$e^x = 1 + x + O(x^2) \quad \text{då } x \to 0.$$

Anm. Egentligen räcker det med att konstatera att $\frac{1}{2}e^{\xi}$ är begränsad för ξ nära 0.

Är $e^x = O(x^{10})$ då $x \to \infty$?

Vi ska undersöka om det finns ett $C > 0$ och ett $N > 0$ så att

$$|e^x| < C|x^{10}| \quad \text{för alla } x > N. \tag{$*$}$$

Om detta vore sant skulle

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{10}} \le \lim_{x\to\infty} C = C < \infty.$$

Men eftersom vi vet att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = \infty,$$

så kan inte $(*)$ vara uppfylld, d.v.s.

$$e^x \ne O(x^{10}) \quad \text{då } x \to \infty.$$

Visa att

$$\big(x+1+O(\tfrac{1}{x})\big)^x = ex^x + O(x^{x-1}) \quad \text{då } x\to\infty.$$

I varje steg använder vi antingen räknereglerna för ordo, Maclaurinutveckling eller en vanlig omskrivning, så fundera noga över varje likhet.

$$\begin{aligned}
\big(x+1+O(\tfrac{1}{x})\big)^x &= \exp\Big(x\log\big(x+1+O(\tfrac{1}{x})\big)\Big)\\
&= \exp\Big(x\log x + x\log\big(1+\tfrac{1}{x}+O(\tfrac{1}{x^2})\big)\Big)\\
&= x^x\cdot\exp\Big(x\log\big(1+\tfrac{1}{x}+O(\tfrac{1}{x^2})\big)\Big)\\
&= x^x\cdot\exp\Big(x\big(\tfrac{1}{x}+O(\tfrac{1}{x^2})\big)\Big)\\
&= x^x\cdot\exp\Big(1+O(\tfrac{1}{x})\Big) = x^x\cdot\exp(1)\cdot\exp\Big(O(\tfrac{1}{x})\Big)\\
&= ex^x\Big(1+O(\tfrac{1}{x})\Big) = ex^x+O(x^{x-1}).
\end{aligned}$$

4.9.2 Beräkna $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log(2x-3)}{x^2-4}$.

Vi använder l'Hôpitals regel,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log(2x-3)}{x^2-4} = \big\{\tfrac{0}{0};\ \text{l'Hôpitals regel}\big\} = \lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{2}{2x-3}}{2x} = 1/2.$$

Egentligen är vårt skrivsätt lite oegentligt. Vi vet inte om vi kan använda l'Hôpitals regel förrän vi visat att högerledets gränsvärde existerar (eller är lika med $\pm\infty$).

4.9.4 Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

Vi Maclaurinutvecklar,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\big(1-\tfrac{1}{2}a^2x^2+O(x^4)\big)}{1-\big(1-\tfrac{1}{2}b^2x^2+O(x^4)\big)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tfrac{1}{2}a^2x^2+O(x^4)}{\tfrac{1}{2}b^2x^2+O(x^4)} = \{\text{förkorta med } x^2\}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tfrac{1}{2}a^2+O(x^2)}{\tfrac{1}{2}b^2+O(x^2)} = \frac{a^2}{b^2}.
\end{aligned}$$

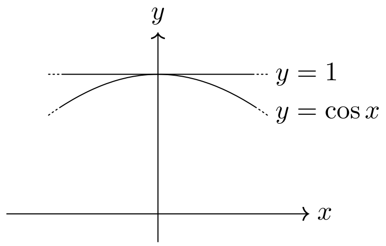
4.9.6 Beräkna $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{1/3}-1}{x^{2/3}-1}$.

I detta exempel ser vi att nämnaren kan faktoriseras så att täljaren kan förkortas bort,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{1/3}-1}{x^{2/3}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^{1/3}-1}{(x^{1/3}-1)(x^{1/3}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^{1/3}+1} = 1/2.$$

4.9.8 Beräkna $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\log(1+x^2)}$.

Om vi tittar på täljaren och kommer ihåg hur cosinus-funktionen ser ut nära 0



så ser vi att uttrycket $1-\cos x$ har ett högre ordningens nollställe i $x=0$. Om vi använder l'Hôpitals regel kommer vi bli tvungna att derivera flera gånger. Eftersom vi vet täljarens och nämnarens Maclaurinutveckling väljer vi att Maclaurinutveckla,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\log(1+x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\bigl(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)\bigr)}{x^2+O(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+O(x^4)}{x^2+O(x^4)}\\ &= \{\text{förkorta med } x^2\} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+O(x^2)}{1+O(x^2)} = 1/2.\end{aligned}$$

Anm. Givetvis går det bra att använda l'Hôpitals regel:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\log(1+x^2)} &= \{\tfrac{0}{0}\} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\\ &= \{\tfrac{0}{0}\} = 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = 1\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

4.9.10 Beräkna $\lim_{x\to 0}\dfrac{10^x-e^x}{x}$.

Nämnaren har ett enkelt nollställe så det lutar kanske åt l'Hôpitals regel. Dessutom är Maclaurinutvecklingen av 10^x inte direkt åtkomlig ur närminnet. Vi använder l'Hôpitals regel!

$$\lim_{x\to 0}\frac{10^x-e^x}{x} = \bigl\{\tfrac{0}{0};\ \text{l'Hôpitals regel}\bigr\} = \lim_{x\to 0}\frac{10^x\cdot\log x - e^x}{1} = \log 10 - 1.$$

4.9.12 Beräkna $\lim_{x\to 1}\dfrac{\log(ex)-1}{\sin\pi x}$.

Nämnaren har ett enkelt nollställe i $x=1$ så det lutar åt l'Hôpitals regel. Dessutom är Taylorutvecklingen av nämnaren och täljaren kring $x=1$ inga inlärda formler. Vi använder l'Hôpitals regel,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(ex)-1}{\sin\pi x} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{\pi\cos\pi x} = -\frac{1}{\pi}.$$

4.9.14 Beräkna $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Nämnaren har ett 3:e ordningens nollställe i $x=0$, så vi använder Maclaurinutveckling.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\bigl(x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\bigr)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\bigl(\tfrac{1}{6}+O(x^2)\bigr) = \tfrac{1}{6}.\end{aligned}$$

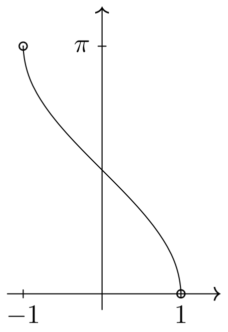
4.9.18 Beräkna $\lim_{r\to\pi/2}\dfrac{\log\sin r}{\cos r}$.

Cosinus-funktionen har bara enkla nollställen varför vi provar med l'Hôpitals regel,

$$\lim_{r\to\pi/2}\frac{\log\sin r}{\cos r} = \lim_{r\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\sin r}\cdot\cos r}{-\sin r} = \lim_{r\to\pi/2}-\frac{\cos r}{\sin^2 r} = 0.$$

4.9.20 Beräkna $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\arccos x}{x-1}$.

Grafen till arccos-funktionen har utseendet



d.v.s. en lodrät tangent vid $x = 1$. Detta utesluter Taylorutveckling. Vi använder l'Hôpitals regel,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{x-1} = \left\{ \tfrac{0}{0};\ \text{l'Hôpitals regel} \right\} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = -\infty.$$

4.9.24 Beräkna $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$.

Gränsvärdet har det obestämda uttrycket 0^0. Det första vi bör göra är att logaritmera för att få uttrycket i en mer "vanlig" form.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \exp\Bigl(\sqrt{x}\cdot\log x\Bigr) = \bigl\{\text{exp är kontinuerlig}\bigr\}\\ &= \exp\Bigl(\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\cdot\log x\Bigr)\end{aligned}$$

Gränsvärdet är fortfarande inte i en form som vi kan använda våra standardtekniker på, men en enkel omskrivning gör susen!

$$\begin{aligned}&= \exp\Bigl(\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/\sqrt{x}}\Bigr) = \bigl\{ \tfrac{\infty}{\infty};\ \text{l'Hôpitals regel} \bigr\}\\ &= \exp\Bigl(\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{\frac{-1/2}{x\sqrt{x}}}\Bigr) = \exp\Bigl(\lim_{x\to 0^+} -2\sqrt{x}\Bigr) = \exp 0 = 1.\end{aligned}$$

Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$.

Om vi använder l'Hôpitals regel fås

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} \overset{?}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} (1+\cos x) \quad \text{divergerar.}$$

Eftersom gränsvärdet i högerledet divergerar kan vi inte använda l'Hôpitals regel.

En alternativ metod ger istället gränsvärdet,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \Bigl(1 + \frac{\sin x}{x}\Bigr) = 1 + 0 = 1.$$

9.8.2 Skatta felet om Maclaurinpolynomet av grad 6 till $\cos x$ används för att approximera $\cos 0{,}1$.

Resttermen är

$$R_7(x) = \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}(x-0)^7,$$

där ξ ligger mellan 0 och x. I vårt fall är $f(x) = \cos x$. Genom att observera att $f'' = -f$ får vi att

$$f^{(7)} = (f'')^{(5)} = -f^{(5)} = -(f'')^{(3)} = +f^{(3)} = (f'')' = -f'.$$

Alltså är

$$f^{(7)}(x) = \sin x.$$

Resttermen är därmed

$$R_7(x) = \frac{\sin \xi}{7!} x^7$$

och felet i vår approximation kan vi skatta till

$$|R_7(1)| = \left| \frac{\sin \xi}{7!} 1^7 \right| \leq \frac{\sin 1}{7!} \leq \frac{1}{7!} \approx 2 \cdot 10^{-4}.$$

9.8.8 Använd Taylors formel för att bestämma Maclaurinserien till funktionen $f(x) = e^{-x}$.

Enligt Taylors formel är

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

där ξ_n ligger mellan 0 och x. Om vi kan visa att resttermen$\to 0$ då $n \to \infty$ så får vi

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n e^{-\xi_n}}{n!} x^n \Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n e^{-\xi_n}}{n!} x^n}_{=0} \\ &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \cdots . \end{aligned}$$

Det återstår alltså att undersöka gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n e^{-\xi_n}}{n!} x^n$$

där ξ_n alltid ligger mellan 0 och x (men varierar med n).

Vi har att

$$\left| \frac{(-1)^n e^{-\xi_n}}{n!} x^n \right| \leq \frac{e^{|x|} |x|^n}{n!}.$$

Uttrycket i högerledet går mot noll då $n \to \infty$ och då följer av instängningsprincipen att resttermen $R_n(x)$ går mot 0 då $n \to \infty$. Maclaurinserien är alltså

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \cdots .$$

9.8.10 Använd Taylors formel för att bestämma Maclaurinserien till funktionen $f(x) = \cos x$.

Enligt Taylors formel är

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{f^{(2n+1)}(\xi_{2n+1})}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

där ξ_{2n+1} ligger mellan 0 och x. Vi ska visa att resttermen $\to 0$ då $n \to \infty$. Eftersom $f'' = -f$ får vi att

$$f^{(2n+1)}(x) = \pm f'(x) = \pm \sin x.$$

Alltså är feltermen

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\pm \sin \xi_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Vi har att

$$|R_{2n+1}(x)| = \left|\frac{\pm\sin\xi_{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right| \le \frac{1}{(2n+1)!}|x|^{2n+1}.$$

Eftersom högerledet $\to 0$ då $n \to \infty$ ger instängningsprincipen att $R_{2n+1}(x) \to 0$ då $n \to \infty$. Maclaurinserien är alltså

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Låt $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ vara de positiva rötterna till ekvationen

$$\tan x = x.$$

Visa att $x_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2} + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ då $n \to \infty$.

Den som löser ovanstående uppgift till lektionen den 16 november 1999 får en present, men detta gäller bara en person. Om flera lösningar inkommer så får den som gjort den bästa lösningen priset.

Lektion 11, Envariabelanalys den 11 november 1999

5.1.2 Uttryck summan $\displaystyle\sum_{j=1}^{100} \frac{j}{j+1}$ utan summasymbolen.

Termerna är indexerade från $j = 1$ till $j = 100$ och varje term är $\frac{j}{j+1}$. Summan blir

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{j}{j+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{3}{3+1} + \cdots + \frac{100}{100+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{100}{101}.$$

Notera att vi med summasymbolen uttrycker summan på ett otvetydigt sätt medan summan i högerledet kräver att man gissar hur de icke utskrivna termerna ser ut.

5.1.4 Uttryck summan $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i+1}$ utan summasymbolen.

Den första termen i summan får vi genom att sätta $i = 0$ i summanden

$$\frac{(-1)^0}{0+1} = 1.$$

Den andra termen svarar mot $i = 1$,

$$\frac{(-1)^1}{1+1} = -1/2.$$

På detta sätt kan vi forsätta att skriva upp termerna. Den sista termen svarar mot $i = n - 1$ och blir

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Skriver vi upp summan utan summasymbolen blir den

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

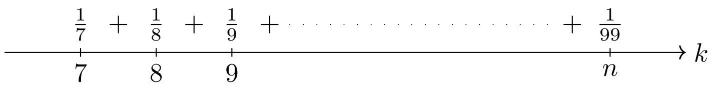
Med detta skrivsätt hoppas vi att man kan gissa sig till vilka de mellanliggande, icke utskrivna, termerna är.

5.1.12 Skriv summan

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{99}$$

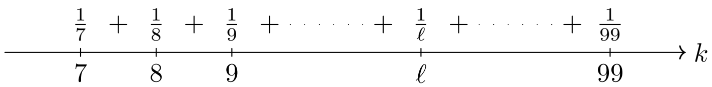
med summasymbolen.

Som ett första steg ska vi indexera summan. Vi kan egentligen välja vårt startindex till vilket heltal som helst, säg 1000000, men det är ofta praktiskt att välja ett ”naturligt” startindex, t.ex. 0 eller 1. I vår summa ser vi att nämnarna verkar växa stegvis med 1 och den första termens nämnare är 7. Vi väljer därför 7 som startindex.



Vi vet från början inte hur många termer summan har, så vi kallar slutindexet för n. Nu gäller det att gissa sig till hur alla mellanliggande termer ser ut. Regelbundenheten i de första termerna antyder att termernas nämnare fortsätter att öka med ett steg i taget.

Om vi gissar att detta är det riktiga mönstret hos termerna så borde den allmänna term med index ℓ vara $1/\ell$,

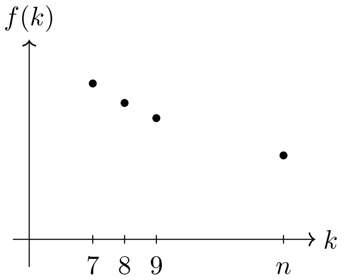


och sista termen $\frac{1}{99}$ borde ha index 99.

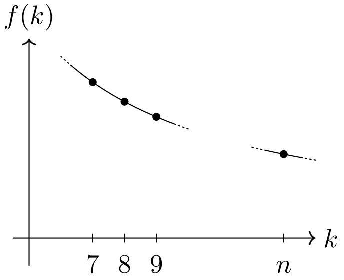
Skriver vi denna summa med summasymbolen får vi

$$\sum_{k=7}^{99} \frac{1}{k}.$$

Notera att allt detta egentligen är en gissning. Givet punkterna



så har vi gissat att summanden $f(k)$ i summan $\sum\limits_{k=7}^{n} f(k)$ är funktionen



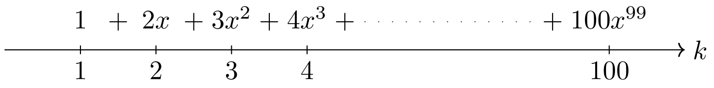
I själva verket skulle det kunna vara en annan funktionen som är det rätta svaret. Denna osäkerhet kan vi inget göra åt. Vi har gjort det enda rätta och valt den enklaste summand som passar mönstret.

5.1.14 Skriv summan

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + 100x^{99}$$

med summasymbolen.

Precis som tidigare börjar vi med att indexera summan. I detta exempel kan vi notera att koefficienterna framför x:na växer stegvis med 1. Den första termen har koefficient 1 så vi väljer 1 som startindex. Vid varje ytterligare term ökar koefficienten med 1 så vi kan gissa att sista termen $100x^{99}$ har index 100.



En allmän term med index ℓ borde, om termerna fortsätter lika regelbundet, ha formen

$$\ell \cdot x^{\text{något}}.$$

Det är inte heller så svårt att se vad exponenten borde vara. Exponenten uppvisar samma regelbundna tillväxt som indexet,

$$\ell \cdot x^{\ell-1}.$$

Med summasymbolen blir alltså summan

$$\sum_{k=1}^{100} kx^{k-1}.$$

Notera att den första termen är

$$1 \cdot x^0 = 1 \qquad \text{om } x \neq 0.$$

Om $x = 0$ så är summaformeln egentligen inte definierad och vi borde då skriva

$$1 + \sum_{k=1}^{100} kx^{k-1},$$

men eftersom detta helt klart är ett undantagsfall så brukar man underförstå vad man menar då $x = 0$.

5.1.22 Beräkna $\sum_{j=1}^{1000}(2j+3)$.

Med räknereglerna för summasymbolen kan vi dela upp summan i enklare summor,

$$\sum_{j=1}^{1000}(2j+3) = 2\sum_{j=1}^{1000} j + \sum_{j=1}^{1000} 3.$$

Den andra summan i högerledet är enkel att räkna ut. Vi adderar tusen 3:or,

$$\sum_{j=1}^{1000} 3 = 3000.$$

Den första summan i högerledet är en aritmetisk serie,

$$\sum_{j=1}^{1000} j = \frac{1001\cdot(1001-1)}{2} = 500500.$$

Alltså är

$$\sum_{j=1}^{1000}(2j+3) = 2\cdot 500500 + 3000 = 1004000.$$

5.1.24 Finn ett slutet uttryck för summan

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2-4).$$

Vi delar upp summan med räknereglerna

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2-4) = 2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} 4.$$

Summan med den kvadratiska summanden skriver vi om till kända summor,

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 &= 2\sum_{k=0}^{n-1} k(k-1) + 2\sum_{k=0}^{n-1} k = \tfrac{2}{3}n(n-1)(n-2) + n(n-1) \\ &= \tfrac{2}{3}n(n-1)(n-\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Summan blir alltså

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(2k^2-4) &= \tfrac{2}{3}n(n-1)(n-\tfrac{1}{2}) - 4(n-1) \\ &= \tfrac{2}{3}n^3 - n^2 - \tfrac{11}{3}n + 4. \end{aligned}$$

Låt $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ vara en punktföljd som är jämnt fördelad i intervallet $[a,b]$ och

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Bestäm ett slutet uttryck för x_i:na.

Vi ska alltså bestämma en formel för x_i:nas x-koordinater. Eftersom punkterna ska ligga på lika avstånd ℓ från varandra måste vi ha att

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= \ell, && (1) \\ x_2 - x_1 &= \ell, && (2) \\ x_3 - x_2 &= \ell, && (3) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots && \\ x_n - x_{n-1} &= \ell. && (n) \end{aligned}$$

Dessutom vet vi att

$$\begin{aligned} x_0 &= a, && (n+1) \\ x_n &= b. && (n+2) \end{aligned}$$

Dessa ekvationer, från (1) till $(n+2)$, bildar tillsammans ett linjärt ekvationssystem där $x_0, x_1, \dots, x_n, \ell$ är de okända.
Vi ska nu försöka lösa detta ekvationssystem. Addera $(1), (2), \dots, (n)$,

$$\begin{array}{rl} & x_1 - x_0 = \ell \\ & x_2 - x_1 = \ell \\ & x_3 - x_2 = \ell \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ + & x_n - x_{n-1} = \ell \\ \hline & x_n - x_0 = n\ell \end{array}$$

Eftersom $x_n = b$ och $x_0 = a$ är

$$b - a = n\ell \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = \frac{b-a}{n}.$$

Genom att nysta upp $(1), (2), \dots, (n)$ får vi

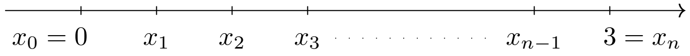
$$\begin{aligned} x_1 &= \ell + x_0 = \tfrac{b-a}{n} + a &&= a + \tfrac{b-a}{n}, \\ x_2 &= \ell + x_1 = \tfrac{b-a}{n} + a + \tfrac{b-a}{n} &&= a + 2\,\tfrac{b-a}{n,} \\ x_3 &= \ell + x_2 = \tfrac{b-a}{n} + a + 2\,\tfrac{b-a}{n} &&= a + 3\,\tfrac{b-a}{n}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\text{o.s.v.} \end{aligned}$$

Induktivt ser vi att

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \qquad \text{för } i = 0, 1, \dots, n.$$

5.2.2 Dela upp intervallet $[0,3]$ i lika stora delintervall och använd rektanglar med dessa delintervall som bas för att beräkna arean av området under $y = 2x+1$, över $y = 0$, samt mellan $x = 0$ och $x = 3$.

Vi delar först upp intervallet $[0,3]$ i n st delintervall med lika längder.

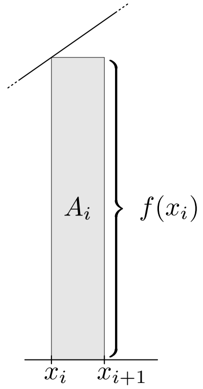


Från den förra uppgiften får vi ett uttryck för delintervallens ändpunkter,

$$x_i = 0 + i \cdot \frac{3-0}{n} = \frac{3i}{n}.$$

Om vi låter arean av delrektangeln, med (x_i, x_{i+1}) som bas, betecknas med A_i, då är

$$A_i = \text{basen} \cdot \text{höjden} = (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i).$$



Eftersom vi har ett explicit uttryck för x_i och x_{i+1} så kan vi även ställa upp ett explicit uttryck för A_i,

$$\begin{aligned} A_i &= \Bigl(\frac{3(i+1)}{n} - \frac{3i}{n}\Bigr) \cdot \Bigl(2 \cdot \frac{3i}{n} + 1\Bigr) \\ &= \frac{3}{n} \cdot \Bigl(\frac{6i}{n} + 1\Bigr) = \frac{18i}{n^2} + \frac{3}{n}. \end{aligned}$$

Områdets exakta area A kan vi approximera med summan av delrektanglarnas area,

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} \Bigl(\frac{18i}{n^2} + \frac{3}{n}\Bigr) \\ &= \frac{18}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \frac{18}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{3}{n} \cdot n = 9\,\frac{n-1}{n} + 3. \end{aligned}$$

Om vi låter antalet delrektanglar n öka så borde vi få en allt bättre approximation av den verkliga arean A. I gränsfallet $n \to \infty$ får vi den exakta arean,

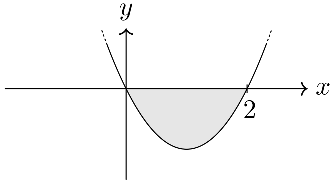
$$A = \lim_{n\to\infty} \Bigl(3 + 9\,\frac{n-1}{n}\Bigr) = 3 + 9 = 12.$$

5.2.10 Dela upp ett intervall i lika stora delintervall och använd rektanglar med dessa delintervall som bas för att beräkna arean av området över $y = x^2 - 2x$ och under $y = 0$.

Låt oss först rita upp området. Funktionen $y = x^2 - 2x$ är en typisk andragradsfunktion. Genom att kvadratkomplettera får vi att

$$y = (x-1)^2 - 1.$$

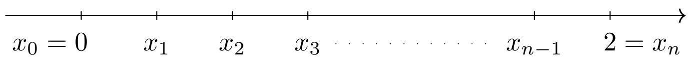
I detta uttryck ser vi direkt att minimum finns i $x = 1$ där $y = -1$ och att $y \to \infty$ då $x \to \pm\infty$. Ritar vi upp grafen har den en typisk parabelform



Vi söker arean av det gråfärgade området ovan. Området begränsas i x-led av de två x-värdena där kurvan $y = x^2 - 2x$ skär $y = 0$, d.v.s.

$$x^2 - 2x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 2.$$

Vi delar upp x-intervallet $[0, 2]$ i n st delintervall med lika längder.



Ett uttryck för delintervallens ändpunkter $\{x_i\}$ är

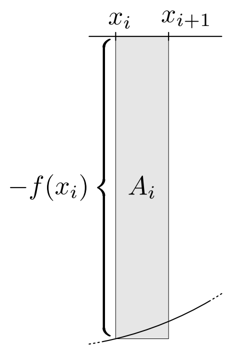
$$x_i = 0 + i \cdot \frac{2-0}{n} = \frac{2i}{n}.$$

Om vi låter A_i beteckna arean av den delrektangel med (x_i, x_{i+1}) som bas, då är

$$A_i = \text{basen} \cdot \text{höjden} = (x_{i+1} - x_i) \cdot \bigl(-f(x_i)\bigr).$$

Ett explicit uttryck för A_i är

$$\begin{aligned} A_i &= \Bigl((i+1)\frac{2}{n} - \frac{2i}{n}\Bigr) \cdot \Bigl(-\Bigl(\frac{2i}{n}\Bigr)^2 + 2\,\frac{2i}{n}\Bigr) \\ &= \frac{2}{n}\Bigl(\frac{4i}{n} - i^2\frac{4}{n^2}\Bigr). \end{aligned}$$



Områdets exakta area A approximerar vi med summan av delrektanglarnas area,

$$\begin{aligned} A \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} \cdot \Bigl(\frac{4i}{n} - i^2\frac{4}{n^2}\Bigr) = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\Bigl(-i(i-1)\frac{4}{n^2} + \Bigl(\frac{4}{n} - \frac{4}{n^2}\Bigr)i\Bigr) \\ &= -\frac{8}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i(i-1) + \Bigl(\frac{8}{n^2} - \frac{8}{n^3}\Bigr)\sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= -\frac{8}{n^3}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \Bigl(\frac{8}{n^2} - \frac{8}{n^3}\Bigr)\frac{n(n-1)}{2} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3n^2}. \end{aligned}$$

När vi låter antalet delrektanglar $n \to \infty$ får vi den exakta arean

$$A = \lim_{n\to\infty}\Bigl(\frac{4}{3} - \frac{4}{3n^2}\Bigr) = \frac{4}{3}.$$

5.3.2 Låt P_n vara partitionen av intervallet $[0, 4]$ i n st delintervall med lika längd $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Beräkna $L(f, P_4)$ och $U(f, P_4)$ för $f(x) = x^2$.

Under- och översumman är

$$L(f, P_4) = \sum_{i=0}^{3} m_i \Delta x_i,$$
$$U(f, P_4) = \sum_{i=0}^{3} M_i \Delta x_i,$$

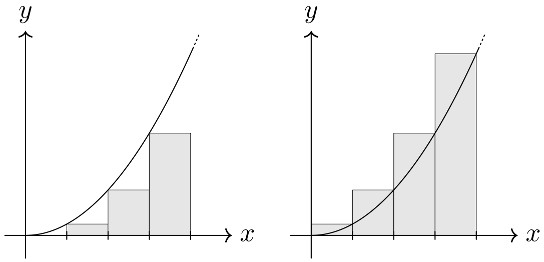
där m_i och M_i är f:s minsta respektive största värde i de olika delintervallen $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ och $[3, 4]$.

Eftersom $f(x) = x^2$ är strängt växande i $[0,4]$ antas m_i och M_i i delintervallens vänstra respektive högra ändpunkter. Vi får

$$\begin{aligned} m_0 &= f(0) = 0 & m_2 &= f(2) = 4 \\ M_0 &= f(1) = 1 & M_2 &= f(3) = 9 \\ m_1 &= f(1) = 1 & m_3 &= f(3) = 9 \\ M_1 &= f(2) = 4 & M_3 &= f(4) = 16 \end{aligned}$$

och summorna blir

$$\begin{aligned} L(f,P_4) &= 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 9\cdot 1 = 14 \\ U(f,P_4) &= 1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 9\cdot 1 + 16\cdot 1 = 30 \end{aligned}$$



$L(f,P_4)$ $\quad$ $U(f,P_4)$

5.3.10 Låt P_n vara partitionen av intervallet $[0,4]$ i n st delintervall med lika längd $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Beräkna $L(f,P_n)$ och $U(f,P_n)$ för $f(x) = e^x$.
Visa att

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n).$$

Därmed är f integrerbar i $[0,3]$. Varför? Vad är $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$?

Under- och översumman är

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \\ U(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i, \end{aligned}$$

där m_i och M_i är f:s minsta respektive största värde i de olika delintervallen. Eftersom $f(x) = e^x$ är en strängt växande funktion antas m_i och M_i i delintervallens vänstra respektive högra ändpunkter. Ändpunkterna är $x_i = 0 + i\frac{3-0}{n} = \frac{3i}{n}$ så vi får

$$\begin{aligned} m_i &= f(x_i) = \exp\Big(\frac{3i}{n}\Big), \\ M_i &= f(x_{i+1}) = \exp\Big((i+1)\,\frac{3}{n}\Big) = \exp\Big(\frac{3i}{n} + \frac{3}{n}\Big) = m_i\, e^{3/n}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \exp\Big(\frac{3i}{n}\Big)\cdot\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\big(e^{3/n}\big)^i \\ &= \{\text{geometrisk serie}\} = \frac{3}{n}\,\frac{1-(e^{3/n})^n}{1-e^{3/n}} = \frac{3}{n}\,\frac{1-e^3}{1-e^{3/n}}, \\ U(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i e^{3/n}\cdot\frac{3}{n} \\ &= e^{3/n}\sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\frac{3}{n} = e^{3/n} L(f,P_n). \end{aligned}$$

Låter vi $n \to \infty$ fås att

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\,\frac{1-e^3}{1-e^{3/n}} = \frac{3(1-e^3)}{\lim\limits_{n\to\infty} n(1-e^{3/n})} \\ &= \{\text{Maclaurinutveckling}\} = \frac{3(1-e^3)}{\lim\limits_{n\to\infty} n\big(1-(1+\frac{3}{n}+O(\frac{1}{n^2}))\big)} \\ &= \frac{3(1-e^3)}{\lim_{n\to\infty}\big(-3+O(\frac{1}{n})\big)} = e^3-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) &= \lim_{n\to\infty} e^{3/n} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} e^{3/n}\cdot \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) \\ &= 1\cdot(e^3-1) = e^3-1.\end{aligned}$$

Alltså är

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = e^3-1.$$

Om vi går tillbaka till definitionen av integral så ser vi att f är integrabel i $[0,3]$ om det finns exakt ett tal I så att

$$L(f,P) \le I \le U(f,P)$$

för alla partitioner P. I vårt fall låter vi

$$I = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n).$$

$L(f,P) \le I$: Eftersom en översumma alltid är större än en undersumma, är

$$L(f,P) \le U(f,P_n).$$

Låter vi $n \to \infty$ fås

$$L(f,P) \le I.$$

$U(f,P) \ge I$: På samma sätt är

$$U(f,P) \ge L(f,P_n).$$

Låter vi $n \to \infty$ fås

$$U(f,P) \ge I.$$

I unik: Gapet mellan alla över- och undersummor måste alltid ligga i intervallet

$$[L(f,P_n), U(f,P_n)] \qquad \text{för alla } n.$$

Eftersom ändpunkterna i detta intervall konvergerar mot I, är gapet exakt en punkt I.

Vi får därmed att f är integrabel i $[0,3]$ och

$$\int_0^3 e^x\,dx = I = e^3-1.$$

5.3.12 Uttryck gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$$

som en bestämd integral.

Dela upp intervallet $[0,1]$ i n st delintervall med lika längd $\frac{1}{n}$. I varje delintervall $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ väljer vi en punkt $c_k = k/n$. Då är Riemannsumman av funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ lika med

$$R(f,P_n,c) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \begin{Bmatrix}\text{indexbyte}\\ i=k+1\\ k=i-1\end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}.$$

Eftersom partitionens finhet går mot noll är

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f,P_n,c) = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx,$$

d.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx.$$

Lektion12, Envariabelanalys, den 16 november 1999

5.4.4 Beräkna integralen

$$\int_0^2 (3x+1)\,dx$$

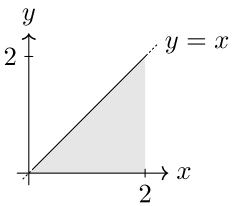
genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Linjäriteten ger att

$$\int_0^2 (3x+1)\,dx = 3\underbrace{\int_0^2 x\,dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_0^2 1\,dx}_{\text{II}}.$$

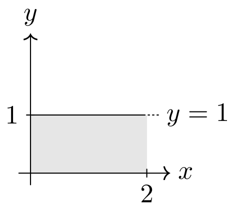
Vi undersöker de två integralerna i högerledet var för sig.

I Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = \tfrac{1}{2}\cdot\text{basen}\cdot\text{höjden} = 2$$

II Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = \text{basen}\cdot\text{höjden} = 2$$

Alltså är

$$\int_0^2 (3x+1)\,dx = 3\cdot 2 + 2 = 8.$$

5.4.10 Beräkna integralen

$$\int_{-a}^a (a-|s|)\,ds$$

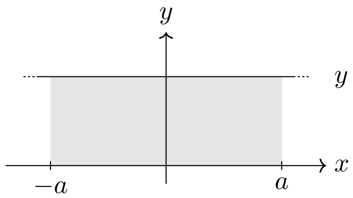
genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Låt oss för enkelhets skull anta att $a \geq 0$. Linjäriteten ger att

$$\int_{-a}^a (a-|s|)\,ds = a\underbrace{\int_{-a}^a 1\,ds}_{\text{I}} - \underbrace{\int_{-a}^a |s|\,ds}_{\text{II}}.$$

Vi undersöker de två integralerna var för sig.

I Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = \text{basen}\cdot\text{höjden} = 2a$$

Alltså är $\text{I} = 2a$.

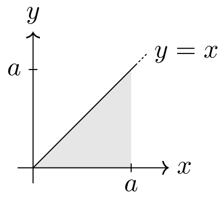
II Sätt $f(s) = |s|$. Vi har att

$$f(-s) = |-s| = |s| = f(s).$$

d.v.s. f är en jämn funktion, och då är

$$\text{II} = 2\int_0^a |s|\,ds = \{|s| = s \text{ för } s \geq 0\} = 2\int_0^a s\,ds.$$

Integralen i högerledet har samma värde som arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = \tfrac{1}{2}\cdot\text{basen}\cdot\text{höjden} = a^2/2$$

Alltså är $\text{II} = a^2$.

Sammantaget får vi att

$$\int_{-a}^{a} (a - |s|)\, ds = a \cdot \text{I} - \text{II} = 2a^2 - a^2 = a^2.$$

Anm. Om $a < 0$ blir svaret $3a^2$.

5.4.11 Beräkna integralen

$$\int_{-1}^{1} (u^5 - 3u^3 + \pi)\, du$$

genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Linjäriteten ger att

$$\int_{-1}^{1} (u^5 - 3u^3 + \pi)\, du = \underbrace{\int_{-1}^{1} u^5\, du}_{\text{I}} - 3\underbrace{\int_{-1}^{1} u^3\, du}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{-1}^{1} \pi\, du}_{\text{III}}$$

Vi undersöker integralerna var för sig.

I Om vi sätter $f(u) = u^5$ så noterar vi att

$$f(-u) = (-u)^5 = -u^5 = -f(u),$$

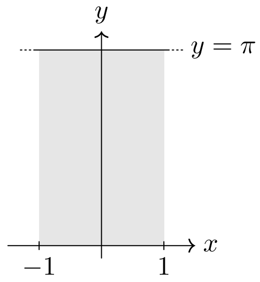
d.v.s. integranden är udda. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen noll.

II Med $f(u) = u^3$ noterar vi att

$$f(-u) = (-u)^3 = -u^3 = -f(u),$$

d.v.s. integranden är udda. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen noll.

III Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = 2 \cdot \pi = 2\pi$$

Alltså är $\text{III} = 2\pi$.

Sammantaget är det bara den tredje integralen som ger ett bidrag

$$\int_{-1}^{1} (u^5 - 3u^3 + \pi)\, du = \text{I} - 3 \cdot \text{II} + \text{III} = 2\pi.$$

5.4.14 Beräkna integralen

$$\int_{-3}^{3} (2 + t)\sqrt{9 - t^2}\, dt$$

genom att använda integralens egenskaper och tolka integraler som areor.

Linjäriteten ger att

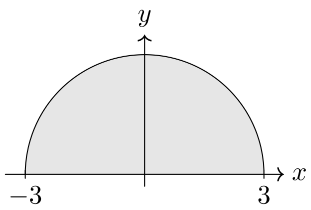
$$\int_{-3}^{3} (2 + t)\sqrt{9 - t^2}\, dt = 2\underbrace{\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - t^2}\, dt}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{-3}^{3} t\sqrt{9 - t^2}\, dt}_{\text{II}}.$$

Vi behandlar integralerna i högerledet separat.

I Om vi kvadrerar funktionen $y = \sqrt{9 - x^2}$ får vi

$$y^2 = 9 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 9.$$

Vår funktion beskriver alltså övre delen av en cirkel med radie 3 och mittpunkt i origo. Integralens värde är arean av det gråfärgade området i figuren nedan.



$$\text{area} = \tfrac{1}{2}\pi \cdot \text{radie}^2 = \tfrac{9}{2}\pi$$

Alltså är $\mathrm{I} = \frac{9}{2}\pi$.

II Sätt $f(t) = t\sqrt{9 - t^2}$. Vi har att

$$f(-t) = (-t)\sqrt{9 - (-t)^2} = -t\sqrt{9 - t^2} = -f(t),$$

d.v.s. integranden är en udda funktion. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen 0.

Sammantaget är

$$\int_{-3}^{3} (2 + t)\sqrt{9 - t^2}\, dt = 2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} = 2 \cdot \tfrac{9}{2}\pi + 0 = 9\pi.$$

5.4.24 Givet att $\int_0^a x^2\, dx = a^3/3$, beräkna

$$\int_{-6}^{6} x^2(2 + \sin x)\, dx.$$

Linjäriteten ger att

$$\int_{-6}^{6} x^2(2 + \sin x)\, dx = 2 \underbrace{\int_{-6}^{6} x^2\, dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{-6}^{6} x^2 \sin x\, dx}_{\mathrm{II}}.$$

Vi beräknar de två integralerna i högerledet separat.

I Sätt $f(x) = x^2$. Vi har då att

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

d.v.s. integranden är jämn. Vi får att

$$\mathrm{I} = 2 \int_0^6 x^2\, dx.$$

Med formeln i uppgiftstexten får vi att

$$\mathrm{I} = 2 \cdot 6^3/3 = 144.$$

II Sätt $f(x) = x^2 \sin x$. Vi har att

$$f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = x^2(-\sin x) = -x^2 \sin x = -f(x),$$

d.v.s. funktionen är udda. Eftersom vi integrerar över ett origosymmetriskt intervall är integralen noll.

Sammantaget är

$$\int_{-6}^{6} x^2(2 + \sin x)\, dx = 2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} = 2 \cdot 144 + 0 = 288.$$

5.4.30 Finn medelvärdet av $g(x) = x + 2$ i intervallet $[a, b]$.

Medelvärdet ges av integralen

$$\hat{g} = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x+2)\,dx.$$

Linjäriteten ger att

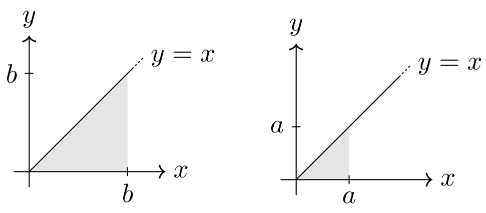
$$\hat{g} = \frac{1}{b-a}\underbrace{\int_a^b x\,dx}_{\text{I}} + \frac{2}{b-a}\underbrace{\int_a^b dx}_{\text{II}}.$$

Vi behandlar de två integralerna separat.

I Vi kan skriva om integralen som

$$\int_a^b x\,dx = \left[\int_0^b - \int_0^a\right] x\,dx = \int_0^b x\,dx - \int_0^a x\,dx.$$

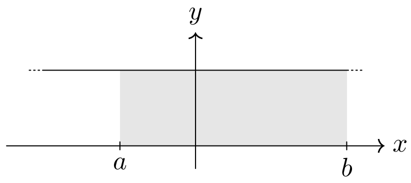
De två integralerna i högerledet har samma värde som arean av respektive triangel i figuren nedan.



Alltså är

$$\text{I} = \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

II Integralens värde är arean av det gråfärgade området nedan.



area $= (b-a)\cdot 1 = b - a$

Alltså är

$$\text{II} = b - a.$$

Medelvärdet är alltså

$$\hat{g} = \frac{1}{b-a}\cdot \text{I} + \frac{2}{b-a}\cdot \text{II} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} + \frac{2(b-a)}{b-a} = \frac{a+b}{2} + 2.$$

5.5.2 Beräkna $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.

Vi vet att

$$\frac{d}{dx}x^{3/2} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Alltså är

$$\frac{d}{dx}\left(\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right) = \sqrt{x}.$$

Detta visar att $\frac{2}{3}x^{3/2}$ är en primitiv funktion till $\sqrt{x}$. Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \Big[\tfrac{2}{3}\sqrt{x}\Big]_0^4 = \tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} - \tfrac{2}{3}\cdot 0\sqrt{0} = 16/3.$$

5.5.6 Beräkna $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$.

En primitiv funktion till $x^{-2} - x^{-3}$ är

$$\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_{-2}^{-1}\Big(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\Big)\,dx=\Big[-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\Big]_{-2}^{-1}$$

$$=-\frac{1}{(-1)}+\frac{1}{2\cdot(-1)^2}-\Big(-\frac{1}{(-2)}+\frac{1}{2\cdot(-2)^2}\Big)$$

$$=1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}=\tfrac{7}{8}.$$

5.5.10 Beräkna $\displaystyle\int_4^9\Big(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\,dx.$

En primitiv funktion till $x^{1/2}-x^{-1/2}$ är

$$\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^{1/2}}{1/2}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_4^9\Big(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\,dx=\Big[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}\Big]_4^9$$

$$=\tfrac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}-2\cdot\sqrt{9}-\Big(\tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4}-2\cdot\sqrt{4}\Big)$$

$$=\tfrac{2}{3}\cdot 9\cdot 3-2\cdot 3-\Big(\tfrac{2}{3}\cdot 4\cdot 2-2\cdot 2\Big)$$

$$=18-6-\tfrac{16}{3}+4=32/3.$$

5.5.16 Beräkna $\displaystyle\int_{-2}^{2}(e^x-e^{-x})\,dx.$

En primitiv funktion till e^x-e^{-x} är

$$e^x-\frac{e^{-x}}{-1}=e^x+e^{-x}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_{-2}^{2}(e^x-e^{-x})\,dx=\Big[e^x+e^{-x}\Big]_{-2}^{2}=e^2+e^{-2}-(e^{-2}+e^2)=0.$$

Anm. Alternativt kan man lägga märke till att integranden är udda och att integrationsintervallet är origosymmetriskt, varför integralen är noll.

5.5.18 Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{1}2^x\,dx.$

Vi har att

$$\frac{d}{dx}2^x=2^x\cdot\log 2\qquad\Leftrightarrow\qquad\frac{d}{dx}\Big(\frac{2^x}{\log 2}\Big)=2^x.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_{-1}^{1}2^x\,dx=\Big[\frac{2^x}{\log 2}\Big]_{-1}^{1}=\frac{2}{\log 2}-\frac{2^{-1}}{\log 2}=\frac{3/2}{\log 2}.$$

5.5.20 Beräkna $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Vi erinrar oss att

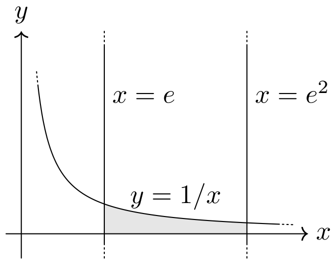
$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\arcsin x\Big]_0^{1/2} = \arcsin\tfrac{1}{2} - \arcsin 0 = \pi/6.$$

5.5.24 Beräkna arean av området som begränsas av $y = 1/x$, $y = 0$, $x = e$ och $x = e^2$.

Vi ritar först upp en skiss av hur området ser ut

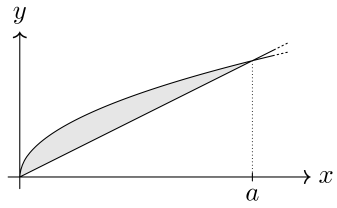


Arean av området ges av integralen

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_e^{e^2} = \log e^2 - \log e = 2\log e - \log e = \log e = 1.$$

5.5.28 Beräkna arean av området under $y = \sqrt{x}$ och över $y = x/2$.

Vi ritar en skiss av området.



Områdets area ges av integralen

$$\int_0^a \big(\sqrt{x} - x/2\big)\,dx,$$

där a är x-koordinaten för den punkt i området som är längst till höger, d.v.s. x-koordinaten för skärningspunkten mellan $y = \sqrt{x}$ och $y = x/2$. Låt oss först bestämma a innan vi ger oss på att beräkna integralen.

I punkten $x = a$ ska kurvorna ha samma y-koordinat, d.v.s.

$$\sqrt{a} = a/2. \qquad (*)$$

Vi kvadrerar.

$$a = a^2/4 \qquad \Leftrightarrow \qquad a(a-4) = 0.$$

Vi ser att $a = 4$ är den lösning vi söker. Eftersom vi som första steg kvadrerade ekvationen finns risken att vi introducerade falska rötter. Vi kontrollerar därför att $a = 4$ verkligen är en riktig lösning till $(*)$.

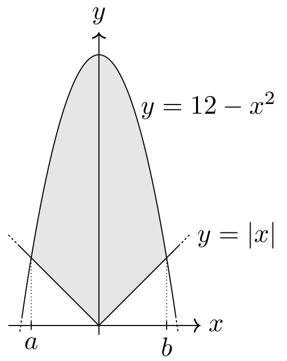
$$\text{VL av } (*) = \sqrt{4} = 2,$$
$$\text{HL av } (*) = 4/2 = 2.$$

Områdets area är alltså

$$\int_0^4 \big(\sqrt{x} - x/2\big)\,dx = \Big[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x} - x^2/4\Big]_0^4 = \tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} - 4^2/4 - \big(0-0\big) = 4/3.$$

5.5.30 Beräkna arean av området över $y = |x|$ och under $y = 12 - x^2$.

Vi ritar först en skiss av området.



Områdets area ges av integralen

$$\int_a^b \bigl(12 - x^2 - |x|\bigr)\,dx,$$

där a och b är x-koordinater för skärningspunkterna mellan $y = |x|$ och $y = 12 - x^2$. Eftersom $y = |x|$ är definierad av två olika uttryck för $x < 0$ resp. $x > 0$ undersöker vi dessa intervall separat.

$x < 0$: I detta intervall är $y = |x| = -x$. Skärningspunkten mellan kurvorna ges av ekvationen

$$12 - x^2 = -x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - x - 12 = 0.$$

Denna andragradare har lösningarna

$$x = 4 \quad \text{och} \quad x = -3.$$

Eftersom endast negativa x ingår i detta intervall är skärningspunktens x-koordinat $a = -3$.

$x > 0$: I detta intervall är $y = |x| = x$. Skärningspunkten mellan kurvorna ges av ekvationen

$$12 - x^2 = x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + x - 12 = 0.$$

Denna andragradsekvation har lösningarna

$$x = 3 \quad \text{och} \quad x = -4.$$

Vi är bara intresserade av positiva x, så skärningspunkten är $b = 3$.

Områdets area ges alltså av integralen

$$\int_{-3}^{3} \bigl(12 - x^2 - |x|\bigr)\,dx.$$

Notera att integranden är en jämn funktion, så integralens värde är lika med

$$2\int_0^3 \bigl(12 - x^2 - |x|\bigr)\,dx = 2\int_0^3 \bigl(12 - x^2 - x\bigr)\,dx$$
$$= 2\Bigl[\,12x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\,\Bigr]_0^3 = 2\Bigl(12\cdot 3 - \tfrac{1}{3}\cdot 3^3 - \tfrac{1}{2}\cdot 3^2 - \bigl(0 - 0 - 0\bigr)\Bigr) = 45.$$

5.5.38 Finn medelvärdet av $f(x) = e^{3x}$ i intervallet $[-2, 2]$.

Medelvärdet ges av integralen

$$\bar{f} = \frac{1}{2 - (-2)}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{3x}\,dx.$$

Integralkalkylens huvudsats ger att

$$\bar{f} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{3x}\,dx = \frac{1}{4}\Bigl[\,\tfrac{1}{3}e^{3x}\,\Bigr]_{-2}^{2} = \frac{e^6 - e^{-6}}{12}.$$

5.5.42 Bestäm $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_t^3 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Om vi låter $F(x)$ beteckna en primitiv funktion till $\dfrac{\sin x}{x}$, då är

$$\frac{d}{dt}\int_t^3 \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{d}{dt}\big(F(3) - F(t)\big) = -F'(t).$$

Enligt integralkalkylens huvudsats är

$$F'(t) = \frac{\sin t}{t},$$

varför vi får att

$$\frac{d}{dt}\int_t^3 \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\sin t}{t}.$$

5.5.46 Bestäm $\dfrac{d}{d\theta}\displaystyle\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\,dx$.

Om $F(x)$ betecknar en primitiv funktion till $\dfrac{1}{1-x^2}$, då är

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{d}{d\theta}\big(F(\cos\theta) - F(\sin\theta)\big)\\ &= F'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta) - F'(\sin\theta)\cdot\cos\theta.\end{aligned}$$

Enligt integralkalkylens huvudsats är

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2},$$

varför vi har att

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{1-\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta) - \frac{1}{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\\ &= \frac{-\sin\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta}.\end{aligned}$$

Lektion 13, Envariabelanalys den 18 november 1999

5.6.4 Bestäm $\displaystyle\int e^{2x}\sin(e^{2x})\,dx$.

När vi ska förenkla en integral med hjälp av en substitution gäller det att kunna känna igen integranden som en uttryckskombination av typen

$$f(u)\cdot u',$$

där u är ett uttryck i x och f någon funktion.

I vår integral kan vi se att med $u = e^{2x}$ så är $u' = 2e^{2x}$ och integranden kan skrivas

$$\tfrac{1}{2}\sin u\cdot u'.$$

Med substitutionen $u = e^{2x}$ får vi alltså

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin(e^{2x})\,dx &= \{u = e^{2x};\ du = 2e^{2x}\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int \sin u\,du = -\tfrac{1}{2}\cos u + C = -\tfrac{1}{2}\cos(e^{2x}) + C.\end{aligned}$$

5.6.6 Bestäm $\displaystyle\int (x+2)(x^2+4x+9)^{1/3}\,dx$.

Genom att bara stirra på integranden ser vi att uttrycket x^2+4x+9 har en derivata $\bigl(= 2(x+2)\bigr)$ som förekommer som en faktor i integranden. Om vi substituerar $u = x^2+4x+9$ så kan integranden skrivas

$$u'\cdot\tfrac{1}{2}u^{1/3}.$$

Vi får

$$\begin{aligned}\int (x+2)(x^2+4x+9)^{1/3}\,dx &= \{u = x^2+4x+9;\ du = 2(x+2)\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int u^{1/3}\,du = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}u^{4/3} + C = \tfrac{3}{8}(x^2+4x+9)^{4/3} + C.\end{aligned}$$

5.6.8 Bestäm $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Låt oss skriva om integranden något,

$$2\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Här ser vi att den högra faktorn är derivatan av deluttrycket $\sqrt{x}$ som förekommer i den vänstra faktorn. Med substitutionen $u = \sqrt{x}$ kan alltså integranden skrivas

$$2\sin u\cdot u',$$

och integralen blir

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= \{u = \sqrt{x};\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\}\\ &= 2\int \sin u\,du = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

5.6.10 Bestäm $\int x^2 2^{x^3+1}\,dx$.

Vi skriver om integranden till

$$\tfrac{1}{3}\,2^{x^3+1}\cdot 3x^2.$$

Vi känner igen den högra faktorn $3x^2$ som derivatan av exponenten x^3+1.

$$\begin{aligned}\int x^2\,2^{x^3+1}\,dx &= \{u = x^3+1;\ du = 3x^2\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{3}\int 2^u\,du = \frac{2^u}{3\log 2}+C = \frac{2^{x^3+1}}{3\log 2}+C.\end{aligned}$$

5.6.16 Bestäm $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$.

Notera att $(x^2+2x+3)' = 2x+2 = 2(x+1)$. Vi kan skriva om integranden som

$$\frac{1/2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,(x^2+2x+3)'.$$

Substitutionen $u = x^2+2x+3$ förenklar alltså integralen dramatiskt.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx &= \{u = x^2+2x+3;\ du = 2(x+1)\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u}+C = \sqrt{x^2+2x+3}+C.\end{aligned}$$

5.6.22 Bestäm $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Uttrycket inom rottecknet har derivatan $-2x$, och det är inte riktigt den faktorn vi har i täljaren. Men om vi delar upp integralen i två delar,

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

så har den första integralen just den önskade derivatan i täljaren (sånär som på en faktor -2). Den första integralen blir

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \{u = 1-x^2;\ du = -2x\,dx\}\\ &= -\tfrac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u}+C = -\sqrt{1-x^2}+C.\end{aligned}$$

Den andra integralen känner vi till den primitiva funktionen till.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C.$$

Alltså är

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

5.6.28 Bestäm $\int \sin^4 t\,\cos^5 t\,dt$.

Som integranden står är det inte lätt att se någon kombination av typen

$$f(u)\cdot u',$$

men om vi använder den trigonometriska ettan och skriver om uttrycket till

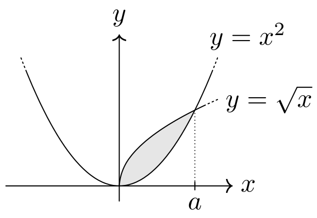
$$\sin^4 t \cdot (1-\sin^2 t)^2 \cdot \cos t$$

så ser vi att $u = \sin t$ är en lämplig substitution.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 t\, \cos^5 t\, dt &= \{u = \sin t;\ du = \cos t\, dt\}\\ &= \int u^4(1-u^2)^2\, du = \int (u^4 + u^8 - 2u^6)\, du\\ &= \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{9}u^9 - \tfrac{2}{7}u^7 + C = \tfrac{1}{5}\sin^5 t + \tfrac{1}{9}\sin^9 t - \tfrac{2}{7}\sin^7 t + C.\end{aligned}$$

5.7.2 Finn arean av området som begränsas av kurvorna $y = \sqrt{x}$ och $y = x^2$.

Vi ritar först upp kurvorna och området.



Vi ser att området begränsas ovanifrån av kurvan $y = \sqrt{x}$ och nertill av kurvan $y = x^2$. Områdets area blir därför

$$A = \int_0^a (\sqrt{x} - x^2)\, dx.$$

För att kunna räkna ut integralen behöver vi bestämma värdet på a som är x-koordinaten för skärningspunkten mellan kurvorna $y = x^2$ och $y = \sqrt{x}$. Talet a ska alltså uppfylla ekvationen

$$\sqrt{a} = a^2. \qquad (*)$$

Vi kvadrerar,

$$a = a^4 \qquad \Leftrightarrow \qquad a^3(a-1) = 0,$$

och ser att $a = 1$ är det sökta värdet. Eftersom vi kvadrerade $(*)$ och funktionen $x \mapsto x^2$ inte är en-entydig så måste vi förvissa oss om att $a = 1$ inte är en falsk rot. Stoppar vi in $a = 1$ i $(*)$ fås

$$\begin{aligned}\text{VL av } (*) &= \sqrt{1} = 1,\\ \text{HL av } (*) &= 1^2 = 1.\end{aligned}$$

Arean ges alltså av

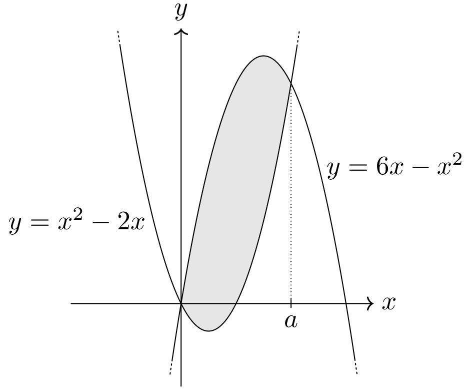
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \Big[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x} - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}.$$

5.7.4 Finn arean av området som begränsas av kurvorna $y = x^2 - 2x$ och $y = 6x - x^2$.

Vi ska först rita upp de två kurvorna och området de innesluter. Kvadratkomplettering ger

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \qquad (1)$$
$$y = 6x - x^2 = -(x-3)^2 + 9 \qquad (2)$$

Alltså har kurvan i (1) ett minimivärde -1 i punkten $x = 1$, och kurvan i (2) har ett maximivärde 9 i punkten $x = 3$. Båda kurvorna är dessutom parabler.



Området begränsas ovanifrån av kurvan $y = 6x - x^2$ och nertill av kurvan $y = x^2 - x$. Områdets area ges av integralen

$$\int_0^a \bigl(6x - x^2 - (x^2 - 2x)\bigr)\,dx = \int_0^a (8x - 2x^2)\,dx,$$

där integrationsgränserna är skärningspunkterna mellan kurvorna. Punkten $x = a$ uppfyller därmed ekvationen

$$a^2 - 2a = 6a - a^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad a(a-4) = 0.$$

Alltså är $a = 4$.

Området area ges alltså av integralen

$$\int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx = \Bigl[\,4x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\,\Bigr]_0^4 = 4\cdot 16 - \tfrac{2}{3}\cdot 64 - (0-0) = 64/3.$$

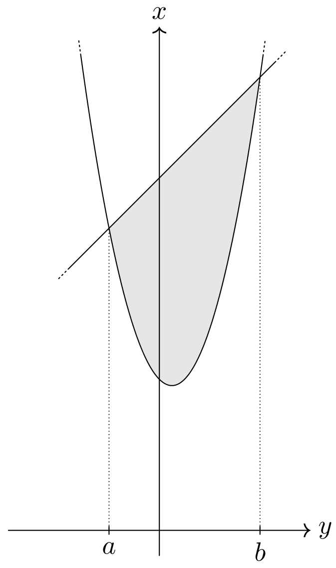
5.7.6 Bestäm arean av området som begränsas av kurvorna $x - y = 7$ och $x = 2y^2 - y + 3$.

Den andra kurvan är uttryckt i formen

$$x = x(y).$$

Det är därför enklare att betrakta y-variabeln som den oberoende variabeln och x-variabeln som den beroende.

För att bestämma den andra kurvans form kvadratkompletterar vi



$$\begin{aligned} x &= 2y^2 - y + 3 = 2(y - \tfrac{1}{4})^2 - \tfrac{1}{8} + 3 \\ &= 2(y - \tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{23}{8}. \end{aligned}$$

Alltså har kurvan ett x-minimum $\frac{23}{8}$ i $y = \frac{1}{4}$ och är parabelformad.

Den första kurvan är en enkel rät linje

$$x = y - 7.$$

Arean ges av integralen

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \bigl(y + 7 - (2y^2 - y + 3)\bigr)\,dy \\ &= \int_a^b (-2y^2 + 2y + 4)\,dy. \end{aligned}$$

Vi behöver bestämma skärningspunkterna $y = a$ och $y = b$. De är båda rötter till ekvationen

$$y + 7 = 2y^2 - y + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 - y - 2 = 0.$$

Denna andragradsekvation har lösningarna $y = -1$ och $y = 2$. Alltså är $a = -1$ och $b = 2$.

Området area blir

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (-2y^2 + 2y + 4)\,dy = \Bigl[\,-\tfrac{2}{3}y^3 + y^2 + 4y\,\Bigr]_{-1}^2 \\ &= -\tfrac{2}{3}\cdot 8 + 4 + 8 - \bigl(\tfrac{2}{3} + 1 - 4\bigr) = 9. \end{aligned}$$

5.7.30 Bestäm arean av den slutna ögla som kurvan $y^2 = x^4(2+x)$ beskriver till vänster om origo.

Om vi betraktar kurvuttrycket

$$y^2 = x^4(2+x) \tag{$*$}$$

kan vi notera att om punkten (x, y) ligger på kurvan så ligger även punkten $(x, -y)$ på kurvan. Kurvan är alltså symmetrisk kring x-axeln.

Vidare ser vi att om $x < -2$ så är HL är negativt och eftersom VL är en kvadrat kan inte $(*)$ vara uppfylld, d.v.s. det finns inga punkter till vänster om $x = -2$.

Från $(*)$ kan vi få två explicita uttryck för y,

$$y = \pm x^2\sqrt{x+2}. \tag{$\dagger$}$$

Kurvan består alltså av grafen till de två funktionerna ovan. Från $(\dagger)$ ser vi också att ändpunkten $x = -2$ är en singulär punkt. I en omgivning av $x = -2$ har kurvan utseendet

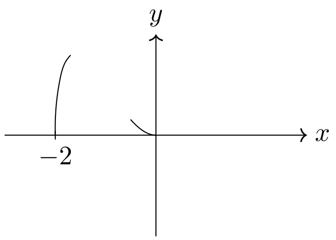
$$y = \pm x^2\sqrt{x+2} = \pm\bigl(4 + O(x+2)\bigr)\sqrt{x+2} = \pm 4\sqrt{x+2} + O(x+2)^{3/2}.$$

Kurvan har alltså en $\sqrt{}$-singularitet i $x = -2$. I grafens andra ändpunkt i $x = 0$ har kurvan utseendet

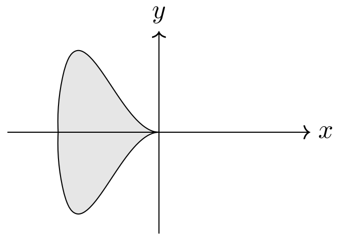
$$y = \pm x^2\sqrt{2+x} = \pm x^2\bigl(\sqrt{2} + O(x)\bigr) = \pm\sqrt{2}\,x^2 + O(x)^3,$$

alltså ett kvadratisk nollställe.

Om vi skisserar delarna av kurvan kring $x = -2$ och $x = 0$, och begränsar oss till positiva y-värden så får vi figuren nedan.



Det finns visserligen en extrempunkt mellan $x = -2$ och $x = 0$ (Rolles sats) men annars är grafen ganska ordinär däremellan. Fyller vi i mellanrummen i figuren ovan får vi ett ungefärligt utseende på området.



Arean ges av integralen

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} \bigl(x^2\sqrt{x+2} - (-x^2\sqrt{x+2})\bigr)\,dx = 2\int_{-2}^{0} x^2\sqrt{2+x}\,dx \\
&= \{u = 2+x;\ du = dx\} = 2\int_{0}^{2} (u-2)^2\sqrt{u}\,du \\
&= 2\int_0^2 (u^{5/2} - 4u^{3/2} + 4u^{1/2})\,du = 2\Bigl[\tfrac{2}{7}u^{7/2} - \tfrac{8}{5}u^{5/2} + \tfrac{8}{3}u^{3/2}\Bigr]_0^2 \\
&= 2\Bigl(\tfrac{2}{7}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2} - \tfrac{8}{5}\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2} + \tfrac{8}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{2} - (0-0+0)\Bigr) = \tfrac{256}{105}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

6.1.2 Bestäm $\displaystyle\int (x+3)e^{2x}\,dx$.

Om vi tittar på formeln för partialintegrering

$$\int u\cdot v\,dx = U\cdot v - \int U\cdot v'\,dx$$

så ser vi att om vi väljer $v = x + 3$ så kommer den faktorn att deriveras bort i högerledets integralterm. Detta förutsätter givetvis att vi kan hitta en primitiv funktion U till den andra faktorn $u = e^{2x}$ och dessutom integrera den. Vi prövar!

$$\begin{aligned}\int (x+3)e^{2x}\,dx &= \tfrac{1}{2}(x+3) - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\cdot 1\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}e^{2x}(x+3) - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}e^{2x} + C = \tfrac{1}{2}e^{2x}(x+\tfrac{5}{2}) + C.\end{aligned}$$

6.1.6 Bestäm $\int x(\log x)^3\,dx$.

Integranden består av två faktorer x och $(\log x)^3$. Om vi ska använda partialintegrering måste vi bestämma vilken faktor vi ska derivera och vilken vi ska integrera. Ofta när logaritmfaktorer förekommer väljer man att derivera dessa.

$$\begin{aligned}\int x(\log x)^3\,dx &= \tfrac{1}{2}x^2\cdot(\log x)^3 - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{3(\log x)^2}{x}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}x^2(\log x)^3 - \tfrac{3}{2}\int x(\log x)^2\,dx.\end{aligned}$$

Trots partialintegreringen är integralen fortfarande knepig, men notera att problemet faktiskt har reducerats något. Istället för $\log x$ upphöjt till 3 har vi $\log x$ upphöjt till 2. Om vi fortsätter att partialintegrera kanske logaritmfaktorn förenklas ytterligare,

$$\begin{aligned}\int x(\log x)^2\,dx &= \tfrac{1}{2}x^2\cdot(\log x)^2 - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{2\log x}{x}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \int x\log x\,dx.\end{aligned}$$

En sista partialintegrering eliminerar $\log x$ helt.

$$\int x\log x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\cdot\log x - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\log x - \tfrac{1}{4}x^2 + C.$$

Sammanställer vi räkningarna fås

$$\begin{aligned}\int x(\log x)^3\,dx &= \tfrac{1}{2}x^2(\log x)^3 - \tfrac{3}{2}\Bigl(\tfrac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \tfrac{1}{2}x^2\log x + \tfrac{1}{4}x^2 + C\Bigr)\\ &= \tfrac{1}{2}x^2(\log x)^3 - \tfrac{3}{4}x^2(\log x)^2 + \tfrac{3}{4}x^2\log x - \tfrac{3}{8}x^2 + C.\end{aligned}$$

6.1.8 Bestäm $\int x^2\arctan x\,dx$.

Vi kan utläsa två faktorer i integranden, x^2 och $\arctan x$. Om vi använder partialintegrering ska vi derivera den ena och integrera den andra. Visserligen skulle x^2:s gradtal sjunka med ett steg om vi deriverade x^2, men att integrera $\arctan x$ verkar motbjudande. Vi deriverar istället $\arctan x$ och integrerar x^2, och hoppas på det bästa.

$$\begin{aligned}\int x^2\arctan x\,dx &= \tfrac{1}{3}x^3\cdot\arctan x - \int \tfrac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \tfrac{1}{3}x^3\cdot\arctan x - \tfrac{1}{3}\int\frac{x\cdot x^2}{1+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Integralen kan förenklas med substitutionen $u = x^2+1$,

$$\begin{aligned}\int\frac{x\cdot x^2}{1+x^2}\,dx &= \{u = x^2+1;\ du = 2x\,dx\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int\frac{u-1}{u}\,du = \tfrac{1}{2}\int\Bigl(1-\frac{1}{u}\Bigr)\,du = \tfrac{1}{2}\bigl(u-\log u\bigr) + C.\end{aligned}$$

Alltså är

$$\int x^2\arctan x\,dx = \tfrac{1}{3}x^3\arctan x - \tfrac{1}{6}\bigl(1+x^2-\log(1+x^2)\bigr) + C.$$

6.1.13 Bestäm $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx$.

Återigen har vi problemet med vilken av faktorerna e^{2x} och $\sin 3x$ som vi ska derivera respektive integrera. I detta fall verkar båda kombinationerna vara lika enkla, så låt oss välja att integrera e^{2x} och derivera $\sin 3x$ (utan speciell anledning).

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin 3x\,dx &= \tfrac{1}{2}e^{2x}\cdot\sin 3x - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\cdot 3\cos 3x\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.\end{aligned}$$

Vi fick nästan tillbaka samma integral; sinus ersatt med cosinus. Kanske vi kan få tillbaka sinus-funktionen om vi partialintegrerar ytterligare en gång.

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos 3x\,dx &= \tfrac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\cdot(-3\sin 3x)\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \tfrac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.\end{aligned}$$

Nu fick vi tillbaka vår ursprungsintegral! Alltså har vi visat att

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \tfrac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Samlar vi integraltermerna i ena ledet fås

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \tfrac{2}{13}e^{2x}\sin 3x - \tfrac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + C.$$

6.1.14 Bestäm $\displaystyle\int xe^{\sqrt{x}}\,dx$.

Faktorn $e^{\sqrt{x}}$ verkar enklast att derivera. Partialintegrering ger att

$$\int xe^{\sqrt{x}}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\cdot e^{\sqrt{x}} - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2e^{\sqrt{x}} - \tfrac{1}{4}\int x^{3/2}e^{\sqrt{x}}\,dx.$$

Tyvärr verkar detta inte förenkla integralen. Vi har fortfarande kvar den besvärliga $e^{\sqrt{x}}$-faktorn och dessutom har exponenten för x-faktorn ökat.

Låt oss istället pröva en annan strategi. Substituera $u=\sqrt{x}$.

$$\int xe^{\sqrt{x}}\,dx = \{u=\sqrt{x};\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\} = 2\int u^3e^u\,du.$$

Denna integral är enklare att partialintegrera. Vi väljer att derivera u^3-faktorn och fortsätta partialintegrera tills vi eliminerat u^3 helt.

$$\begin{aligned}\int u^3e^u\,du &= u^3e^u - \int 3u^2e^u\,du = u^3e^u - 3\Bigl(u^2e^u - \int 2ue^u\,du\Bigr)\\ &= u^3e^u - 3\Bigl(u^2e^u - 2\Bigl(ue^u - \int 1\cdot e^u\,du\Bigr)\Bigr)\\ &= u^3e^u - 3u^2e^u + 6ue^u - 6e^u + C.\end{aligned}$$

Med den ursprungliga variabeln är

$$\int xe^{\sqrt{x}}\,dx = \bigl(2x^{3/2} - 6x + 12\sqrt{x} - 12\bigr)e^{\sqrt{x}} + C.$$

6.1.32 Härled en reduktionsformel för

$$I_n = \int_0^{\pi/2} x^n\sin x\,dx$$

och bestäm I_6.

Idéen är att vi uttrycker I_n i termer av lägre ordningars uttryck i en s.k. reduktionsformel, d.v.s.

$$I_n = f(I_{n-1}, I_{n-2}, \dots).$$

På så sätt har vi förenklat problemet något. Integralerna I_{n-1}, I_{n-2} o.s.v. kan i sin tur, med samma formel, uttryckas i termer av I_{n-2}, I_{n-3} o.s.v.

Genom att fortsätta nysta upp formlerna kommer vi till slut till några integraler av så pass låg ordning att vi direkt kan räkna ut dem.

Låt oss börja med att partialintegrera I_n. Vi deriverar x^n (vars gradtal då sjunker med ett steg) och integrerar $\sin x$.

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[x^n\cdot(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} nx^{n-1}\cdot(-\cos x)\,dx \\ &= -(\pi/2)^n\cos\pi/2 + n\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx = n\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx \end{aligned}$$

Vi fick inte riktigt tillbaka en integral som vi kan uttrycka i termer av I_k:na. Om vi däremot partialintegrerar ytterligare en gång så borde cosinus-faktorn återgå till en sinus-faktor.

$$\begin{aligned} n\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,dx &= n\Big[x^{n-1}\sin x\Big]_0^{\pi/2} - n\int_0^{\pi/2}(n-1)x^{n-1}\sin x\,dx \\ &= n(\pi/2)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}. \end{aligned}$$

Alltså är reduktionsformeln

$$I_n = n(\pi/2)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}.$$

Vi lägger märke till att formeln ovan uttrycker I_n i termer av I_{n-2}, d.v.s. förenklar integralen med två steg i taget.

Genom att succesivt räkna ut I_0, I_2 I_4 och I_6 når vi alltså fram till målet.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = -0-(-1) = 1, \\ I_2 &= 2\cdot\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{2-1} - 2\cdot 1\cdot I_0 = \pi - 2, \\ I_4 &= 4\cdot\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{4-1} - 4\cdot 3\cdot I_2 = \tfrac{1}{2}\pi^3 - 12(\pi-2) = \tfrac{1}{2}\pi^3 - 12\pi + 24, \\ I_6 &= 6\cdot\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{6-1} - 6\cdot 5\cdot I_4 = \tfrac{3}{16}\pi^5 - 30\big(\tfrac{1}{2}\pi^3 - 12\pi + 24\big) \\ &= \tfrac{3}{16}\pi^5 - 15\pi^3 + 360\pi - 720. \end{aligned}$$

Bestäm $\displaystyle\int \arctan x\,dx$.

Vid första påsyn verkar integralen hopplös. Knepet är att se integranden som en produkt,

$$1\cdot\arctan x.$$

Vi partialintegrerar och väljer att derivera $\arctan x$ och integrera 1.

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

I integralen i högerledet använder vi substitutionen $u = 1+x^2$,

$$\begin{aligned} &\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \{u = x^2+1;\ du = 2x\,dx\} \\ &= \tfrac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\log u + C = \tfrac{1}{2}\log(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

Sammantaget får vi

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \tfrac{1}{2}\log(x^2+1) + C.$$

Beräkna $\displaystyle\int \log x\,dx$.

Vi använder tricket från förra uppgiften och ser integranden som en produkt av två faktorer,

$$1\cdot\log x.$$

Vi partialintegrerar och väljer att derivera $\log x$ och integrera 1.

$$\int \log x\,dx = x\cdot\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C.$$

Lektion 14, Envariabelanalys den 23 november 1999

6.2.2 Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Det första vi observerar i integralen är uttrycket i nämnaren,

$$\sqrt{1-4x^2}. \tag{$*$}$$

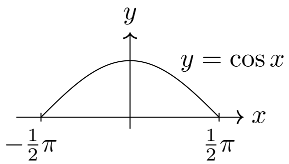
När ett uttryck av den här typen förekommer i en rationell integrand kan vi förenkla uttrycket med en substitution av typen

$$x = a\sin\theta, \tag{$\dagger$}$$

där vi anpassar talet a så att uttrycket $(*)$ kan förenklas med den trigonometriska ettan. I vårt fall väljer vi $a = 1/2$ för då blir

$$\sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-4(\tfrac{1}{2}\sin\theta)^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = |\cos\theta|.$$

I substitutionen $(\dagger)$ svarar x-värdena mellan $-a$ och a mot θ-värden mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$. På detta θ-intervall är $\cos\theta$ positiv, så vi kan ta bort beloppstecknen i formeln ovan.



Med substitutionen $x = \frac{1}{2}\sin\theta$ är alltså

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \bigl\{x = \tfrac{1}{2}\sin\theta;\ dx = \tfrac{1}{2}\cos\theta\,d\theta\bigr\}\\ &= \int \frac{\frac{1}{4}\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\tfrac{1}{2}\cos\theta\,d\theta = \int \tfrac{1}{8}\sin^2\theta\,d\theta.\end{aligned}$$

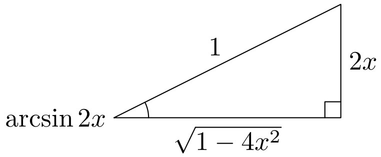
Den sista integralen skriver vi om med formeln för dubbla vinkeln,

$$= \int \tfrac{1}{16}\bigl(1-\cos 2\theta\bigr)\,d\theta = \tfrac{1}{16}\bigl(\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\bigr) + C$$

För att uttrycka den primitiva funktionen i den ursprungliga variabeln sätter vi in $\theta = \arcsin 2x$.

$$\begin{aligned}&= \tfrac{1}{16}\arcsin 2x - \tfrac{1}{32}\sin\bigl(2\arcsin 2x\bigr) + C\\ &= \bigl\{\text{formeln för dubbla vinkeln}\bigr\}\\ &= \tfrac{1}{16}\arcsin 2x - \tfrac{1}{16}\sin(\arcsin 2x)\cdot\cos(\arcsin 2x) + C\end{aligned}$$

Uttrycket $\sin(\arcsin 2x)$ kan vi direkt förenkla till $2x$, men för att förenkla uttrycket $\cos(\arcsin 2x)$ behöver vi en hjälptriangel.



$$\cos(\arcsin 2x) = \sqrt{1-4x^2}$$

Alltså är den primitva funktionen

$$= \tfrac{1}{16}\arcsin 2x - \tfrac{1}{8}x\sqrt{1-4x^2} + C.$$

6.2.10 Beräkna $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}\,dx$.

Uttrycket $\sqrt{9+x^2}$ är en annan typ av uttryck som också kan förenklas med en trigonometrisk substitution. Denna gång använder vi formeln

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

som inspiration till en substitution av typen

$$x = a\tan\theta, \tag{$\dagger$}$$

där a väljs lämpligt. Med $a = 3$ blir vårt uttryck

$$\sqrt{9+x^2} = \sqrt{9+(3\tan\theta)^2} = 3\sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{3}{|\cos\theta\,|}.$$

Precis som i förra uppgiften svarar x-värden i substitutionen (†) mot θ-värden mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$, så beloppstecknen kring $\cos\theta$ kan tas bort i formeln ovan.

Med substitutionen $x = 3\tan\theta$ blir integralen

$$\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}\,dx = \bigl\{x = 3\tan\theta;\ dx = 3(1+\tan^2\theta)\,d\theta\bigr\}$$

$$= \int \frac{3}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{3^4\tan^4\theta}\cdot 3(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

Vi kan skriva om integralen något med de trigonometriska formlerna

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{och} \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

till

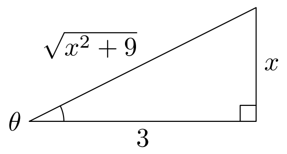
$$= \frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta}{\sin^4\theta}\,d\theta.$$

I den här integralen känner vi igen täljaren $\cos\theta$ som derivatan av $\sin\theta$, så vi substituerar $t = \sin\theta$,

$$= \bigl\{t = \sin\theta;\ dt = \cos\theta\,d\theta\bigr\}$$

$$= \frac{1}{9}\int\frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{27\,t^3} + C = -\frac{1}{27\sin^3\theta} + C$$

För att uttrycka den primitiva funktionen i den ursprungliga variabeln x, ritar vi en hjälptriangel.



$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

Alltså är den primitiva funktionen

$$= -\frac{(x^2+9)^{3/2}}{27\,x^3} + C.$$

6.2.16 Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$.

Det här är ett exempel på den tredje och sista typen av ”roten ur ett andragradsuttryck”. I detta fall ska vi substituera

$$x = \frac{a}{\cos\theta},$$

får då övergår vårt kvadratrotsuttryck till

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\theta} - a^2} = a\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = a\sqrt{\tan^2\theta} = a|\tan\theta\,|.$$

Tyvärr kan vi i detta fall inte ta bort beloppstecknen kring $\tan\theta$, utan när $x \le -a$ så har vi minustecken och när $x \ge a$ så har vi plustecken.

För att slippa beloppstecknet när vi integrerar behandlar vi de båda fallen $x \ge a$ och $x \le -a$ separat.

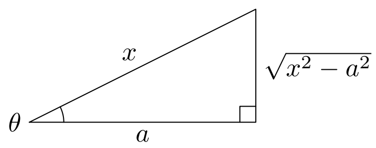
$x \ge a$: Med substitutionen $x = \dfrac{a}{\cos\theta}$ blir integralen

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \Bigl\{x = \frac{a}{\cos\theta};\ dx = \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta\Bigr\}$$

$$= \int\frac{\cos^2\theta}{a^2}\cdot\frac{1}{a\tan\theta}\cdot\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\cos\theta\,d\theta = \frac{\sin\theta}{a^2} + C.$$

För att skriva integralen med den ursprungliga variabeln x använder vi en hjälptriangel.



$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$$

Alltså är den primitiva funktionen

$$= \frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C.$$

$x \le -a:$ Räkningarna blir som i fallet ovan, förutom att vi hela tiden har med ett minustecken från tangensfunktionen. En primitiv funktion är alltså

$$-\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C.$$

I de olika x-intervallen $(-\infty,-a)$ och (a,∞) har vi olika primitiva funktioner. Detta är inget underligt utan helt naturligt.

6.2.22 Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}}$.

Vi skriver om nämnaren till ett kvadratiskt uttryck med hjälp av kvadratkomplettering,

$$4x-x^2 = 4-(x-2)^2.$$

Med en enkel substitution $t = x-2$ kan integralen skrivas

$$\int \frac{dx}{\big(4-(x-2)^2\big)^{3/2}} = \big\{t = x-2\big\} = \int \frac{dt}{(4-t^2)^{3/2}}.$$

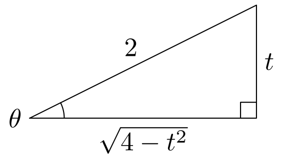
Standardsubstitutionen i detta fall är

$$t = 2\sin\theta.$$

Integralen blir

$$\begin{aligned}
&= \big\{t = 2\sin\theta;\ dt = 2\cos\theta\,d\theta\big\}\\
&= \int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{2^3\,\cos^3\theta} = \frac{1}{4}\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\
&= \Big\{\frac{d}{d\theta}\tan\theta = 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\Big\}\\
&= \tfrac{1}{4}\tan\theta + C.
\end{aligned}$$

Vi använder en hjälptriangel för att uttrycka den primitiva funktionen i t-variabeln, och därmed i x-variabeln.



$$\tan\theta = \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$$

Alltså är den primitiva funktionen

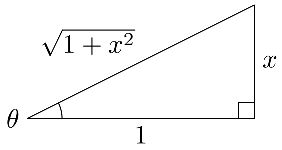
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\frac{t}{\sqrt{4-t^2}} + C = \{t = x-2\}\\
&= \frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}} + C.
\end{aligned}$$

6.2.26 Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$.

I integrandens nämnare känner vi igen uttrycket $1+x^2$ som är ett av dessa kvadratiska uttryck som, trots att vi inte har någon kvadratrot, lämpar sig för en trigonometrisk substitution.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} &= \Big\{x = \tan\theta;\ dx = (1+\tan^2\theta)\,d\theta \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dx}{1+x^2} = d\theta\Big\}\\
&= \int \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\,d\theta = \Big\{1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta};\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Big\}\\
&= \int \sin^2\theta\,d\theta = \{\text{formeln för dubbla vinkeln}\}\\
&= \int \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta + C\\
&= \{\text{formeln för dubbla vinkeln}\}\\
&= \tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{2}\cos\theta\cdot\sin\theta + C
\end{aligned}$$

För att uttrycka den primitiva funktionen i den ursprungliga variabeln x ritar vi en hjälptriangel.



$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Alltså är den primitiva funktionen

$$= \tfrac{1}{2}\arctan x - \frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2} + C.$$

Bestäm n:te derivatan av $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-2}$.

Istället för att sätta igång och derivera funktionen för att uttyda ett enkelt mönster, ska vi först förenkla funktionen med en partialbråkuppdelning.

Det första steget är att vi faktoriserar nämnaren, och det kräver att vi vet nämnarens rötter

$$x^2 - x - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -1 \quad \text{eller} \quad x = 2.$$

Faktorsatsen ger att

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)}.$$

Enligt partialbråkuppdelningen kan uttrycket skrivas i formen

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2},$$

där A och B är två konstanter. För att ta reda på vad A och B ska vara kan vi använda en teknik som brukar kallas handpåläggning.

Vi tar handen och täcker över den faktor i vänsterledet som svarar mot A,

$$\frac{1}{\qquad (x-2)},$$

och stoppar sedan istället för x in nollstället till den faktor vi täckt över. Vi får då värdet på A.

$$A = \frac{1}{\qquad (-1-2)} = -\tfrac{1}{3}.$$

På samma sätt får vi fram B,

$$B = \frac{1}{(2+1) \qquad} = \tfrac{1}{3}.$$

Alltså är

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}.$$

Vi kan nu derivera termerna separat. Det är någorlunda enkelt att induktivt se vad n:te derivatan blir,

$$f^{(n)}(x) = \bigl(-\tfrac{1}{3}\bigr)\frac{(-1)^n\, n!}{(x+1)^{n+1}} + \tfrac{1}{3}\frac{(-1)^n\, n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

(Se anteckningarna till gruppstudium 7.)

6.3.6 Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{5-x^2}$.

Standardsättet att räkna ut en primitiv funktion till en rationell funktion föreskriver att vi först faktoriserar nämnarpolynomet,

$$\frac{1}{5-x^2} = \frac{-1}{(x-\sqrt{5}\,)(x+\sqrt{5}\,)},$$

för att sedan partialbråkuppdela uttrycket. Ansätt

$$\frac{-1}{(x-\sqrt{5}\,)(x+\sqrt{5}\,)} = \frac{A}{x-\sqrt{5}} + \frac{B}{x+\sqrt{5}},$$

där A och B är okända koefficienter. Eftersom nämnarfaktorerna är av första graden kan vi använda handpåläggning,

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1}{\qquad(\sqrt{5}+\sqrt{5})} = \frac{-1}{2\sqrt{5}},\\ B &= \frac{-1}{(-\sqrt{5}-\sqrt{5})\qquad} = \frac{1}{2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\frac{1}{5-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Bigl(\frac{-1}{x-\sqrt{5}} + \frac{1}{x+\sqrt{5}}\Bigr)$$

och vi får att

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5-x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\int\Bigl(\frac{1}{x+\sqrt{5}} - \frac{1}{x-\sqrt{5}}\Bigr)\,dx\\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\Bigl(\log|x+\sqrt{5}| - \log|x-\sqrt{5}|\Bigr) + C\\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\log\Bigl|\frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}}\Bigr| + C. \end{aligned}$$

6.3.10 Beräkna $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3x^2+8x-3}$.

För att faktorisera nämnarpolynomet behöver vi veta dess rötter

$$3x^2+8x-3=0.$$

Kvadratkomplettera!

$$3(x+\tfrac{4}{3})^2 - \tfrac{16}{3} - 3 = 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x=-3 \quad\text{eller}\quad x=1/3.$$

Faktorsatsen ger nu att

$$\frac{x}{3x^2+8x-3} = \frac{x}{3(x+3)(x-\frac{1}{3})}.$$

Vi partialbråkuppdelar. Ansätt

$$\frac{x}{3(x+3)(x-\frac{1}{3})} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-\frac{1}{3}}.$$

Handpåläggning ger att

$$\begin{aligned} A &= \frac{-3}{3\qquad(-3-\frac{1}{3})} = \frac{3}{10},\\ B &= \frac{1/3}{3(\frac{1}{3}+3)\qquad} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Integralen blir nu

$$\begin{aligned} \int\frac{x\,dx}{3x^2+8x-3} &= \int\Bigl(\frac{\frac{3}{10}}{x+3} + \frac{\frac{1}{30}}{x-\frac{1}{3}}\Bigr)\,dx\\ &= \tfrac{3}{10}\log|x+3| + \tfrac{1}{30}\log|x-\tfrac{1}{3}| + C. \end{aligned}$$

6.3.12 Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+9x}$.

Nämnarpolynomet kan vi faktorisera direkt

$$x(x^2+9).$$

Eftersom den högra faktorn inte har några reella rötter kan den inte faktoriseras ytterligare.

Vi partialbråkuppdelar. Ansätt

$$\frac{1}{x(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9}$$

Vi skriver högerledet med gemensam nämnare och jämför sedan uttrycket med vänsterledet,

$$\begin{aligned} &= \frac{A(x^2+9)+x(Bx+C)}{x(x^2+9)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+Cx+9A}{x(x^2+9)}. \end{aligned}$$

Identifikation av koefficienter ger att

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ C&=0 \\ 9A&=1 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} A&=1/9 \\ B&=-1/9 \\ C&=0 \end{aligned}$$

Integralen blir nu

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+9x} &= \frac{1}{9}\int\Big(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+9}\Big)\,dx = \tfrac{1}{9}\log x - \frac{1}{18}\int\frac{2x}{x^2+9}\,dx \\ &= \tfrac{1}{9}\log x - \tfrac{1}{18}\log(x^2+9)+C. \end{aligned}$$

6.3.16 Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{12+7x+x^2}\,dx$.

Eftersom täljarpolynomet har högre grad än nämnarpolynomet förenklar vi integranden med en polynomdivision.

$$\begin{array}{rl} x\ -7 & \\ \hline x^3+1 & \big|\ x^2+7x+12 \\ -\ x^3+7x^2+12x & \\ \hline -\ 7x^2-12x+1 & \\ -\ -7x^2-49x-84 & \\ \hline 37x+85 & \end{array}$$

Alltså är

$$\frac{x^3+1}{x^2+7x+12} = x-7+\frac{37x+85}{x^2+7x+12}.$$

Vi ska nu koncentrera oss på det rationella uttrycket i högerledet. Dess nämnare har rötterna

$$x^2+7x+2=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x=-4 \quad\text{eller}\quad x=-3.$$

Faktorsatsen ger att

$$\frac{37x+85}{x^2+7x+12} = \frac{37x+85}{(x+4)(x+3)}.$$

Vi partialbråkuppdelar. Ansätt

$$\frac{37x+85}{(x+4)(x+3)} = \frac{A}{x+4}+\frac{B}{x+3}.$$

Handpåläggning ger att

$$\begin{aligned} A &= \frac{37\cdot(-4)+85}{(-4+3)} = 63, \\ B &= \frac{37\cdot(-3)+85}{(-3+4)} = -26. \end{aligned}$$

Vi får nu att

$$\int \frac{x^3+1}{12+7x+x^2}\,dx = \int \Big(x - 7 + \frac{63}{x+4} - \frac{26}{x+3}\Big)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2 - 7x + 63\log|x+4| - 26\log|x+3| + C.$$

6.3.20 Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x}$.

Vi undersöker rötterna till nämnarpolynomet. Vi ser direkt att $x=0$ är en rot. De övriga två är rötter till

$$x^2+2x+2=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x+1)^2+1=0,$$

och är inte reella. Alltså är

$$\frac{1}{x^3+2x^2+2x} = \frac{1}{x(x^2+2x+2)}.$$

Vi partialbråkuppdelar. Ansätt

$$\frac{1}{x(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2)+x(Bx+C)}{x(x^2++2x+2)}$$
$$= \frac{(A+B)x^2+(2A+C)x+2A}{x(x^2+2x+2)}.$$

Identifikation av koefficienter ger att

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ 2A+C&=0 \\ 2A&=1 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} A&=1/2 \\ B&=-1/2 \\ C&=-1 \end{aligned}$$

Vi får att

$$\int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x} = \tfrac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{x} - \frac{x+2}{(x+1)^2+1}\Big)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\log x - \tfrac{1}{4}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx - \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$
$$= \tfrac{1}{2}\log x - \tfrac{1}{4}\log\big((x+1)^2+1\big) - \tfrac{1}{2}\arctan(x+1) + C.$$

Lektion 16, Envariabelanalys den 30 november 1999

9.1.2 Avgör om följden

$$\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$$

är

a) begränsad (ovanifrån eller underifrån),

b) positiv eller negativ (så småningom),

c) växande, avtagande eller alternerande,

d) konvergent, divergent eller divergent mot $\pm\infty$.

a) Vi kan skriva om formeln något

$$\frac{2n}{n^2+1} = \frac{2}{n+1/n}.$$

Eftersom indexet n går från 1 och uppåt så får vi någontig större om vi ersätter n med 1,

$$\frac{2}{n+1/n} \le \frac{2}{1+1/n}.$$

Termen $1/n$ i nämnaren är alltid positiv, så den kan vi ersätta med 0 och få ett större uttryck,

$$\frac{2}{1+1/n} \le \frac{2}{1+0} = 2.$$

Alltså har vi visat att

$$\frac{2n}{n^2+1} \le 2 \quad \text{för alla } n,$$

d.v.s. talföljden är begränsad ovanifrån av 2. Å andra sidan är täljaren och nämnaren alltid positiva, varför vi har att

$$\frac{2n}{n^2+1} \ge 0 \quad \text{för alla } n,$$

d.v.s. talföljden är begränsad underifrån av 0. Talföljden är alltså begränsad.

b) Enligt a-uppgiften är följden alltid positiv.

c) I exempel 3 avsnitt 9.1 undersöks just denna följd och där visas att följden är avtagande, men låt oss istället gå tillbaka till definitionen av en avtagande följd och visa att definitionen är uppfylld.

Vi vill alltså visa att

$$a_{n+1} \le a_n \qquad \text{för alla } n \ge N,$$

där N är något lämpligt heltal. Skriver vi ut vad denna olikhet betyder i vårt fall så får vi

$$\frac{2(n+1)}{(n+1)^2+1} \overset{?}{\le} \frac{2n}{n^2+1} \qquad \text{för alla } n \ge N. \tag{$*$}$$

Vi har skrivit ett frågetecken ovanför olikhetstecknet för att markera att det är denna olikhet vi vill visa. Vi får en ekvivalent olikhet om vi förlänger med $(n+1)^2+1$ och n^2+1 (båda är positiva),

$$2(n+1)(n^2+1) \overset{?}{\le} 2n\big((n+1)^2+1\big).$$

Vi förenklar och samlar termerna i ena ledet,

$$2n^2+2n-2 \overset{?}{\ge} 0.$$

För att se om denna olikhet är uppfylld kvadratkompletterar vi

$$2\big(n+\tfrac{1}{2}\big)^2 - \tfrac{5}{2} \overset{?}{\ge} 0. \tag{$\dagger$}$$

Av denna formel ser vi att vänsterledet har ett minimum i $n = -\frac{1}{2}$, men är växande för $n > -\frac{1}{2}$. Om därför ($\dagger$) gäller för ett visst positivt n så gäller olikheten även för alla index större än n. I detta fall gäller olikheten fr.o.m. $n = 1$,

$$\big(1+\tfrac{1}{2}\big)^2 - \tfrac{5}{4} = \tfrac{9}{4} - \tfrac{5}{4} = 1 > 0,$$

så ($*$) är uppfylld för alla $n \ge 1$.

d) Vi har

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = \{\text{förläng med } 1/n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1/n} = 0.$$

9.1.18 Beräkna gränsvärdet av följden

$$a_n = \frac{n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2}.$$

Vi beräknar gränsvärdet precis på samma sätt som när vi har gränsvärden av funktioner.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2} = \{\text{förläng med } 1/n^2\}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2\,n^{-3/2} + n^{-2}}{n^{-2} - n^{-1} - 3} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 0 - 3} = -1/3.\end{aligned}$$

9.1.24 Beräkna gränsvärdet av följden

$$a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}.$$

Om vi tittar på formeln för a_n,

$$a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n},$$

så ser vi att den är en differens mellan två termer varav den ena är ett kvadratrotsuttryck. Standardtricket i dessa fall är att förlänga med uttryckets konjugat,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{\bigl(n - \sqrt{n^2 - 4n}\,\bigr)\bigl(n + \sqrt{n^2 - 4n}\,\bigr)}{n + \sqrt{n^2 - 4n}}\\ &= \frac{n^2 - (n^2 - 4n)}{n + \sqrt{n^2 + 4n}} = \frac{4n}{n + \sqrt{n^2 - 4n}}.\end{aligned}$$

Vi får alltså att

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n + \sqrt{n^2 - 4n}} = \bigl\{\text{ förläng med } 1/n\,\bigr\}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - 4/n}} = \frac{4}{1 + 1} = 2.\end{aligned}$$

9.1.26 Beräkna gränsvärdet av följden

$$a_n = \Bigl(\frac{n-1}{n+1}\Bigr)^n.$$

För stora n går basen i potensuttrycket mot 1 medan exponenten går mot ∞. Vi har alltså en tävlan mellan hur snabbt basen går mot 1 och exponenten mot ∞. Utgången av denna tävlan avgör gränsvärdet.

Ett vanligt trick när man har stora produkter eller potensuttryck är att logaritmera. Vi skriver alltså om uttrycket till

$$a_n = \Bigl(\frac{n-1}{n+1}\Bigr)^n = \exp\Bigl\{n\log\Bigl(\frac{n-1}{n+1}\Bigr)\Bigr\}.$$

Argumentet till logaritmen går mot 1 och det kan vi se tydligare om vi skriver om argumentet något,

$$\begin{aligned}&= \exp\Bigl\{n\log\Bigl(\frac{n+1-2}{n+1}\Bigr)\Bigr\}\\ &= \exp\Bigl\{n\log\Bigl(1 - \frac{2}{n+1}\Bigr)\Bigr\}.\end{aligned}$$

Den andra termen i logaritmens argument går mot 0. För argument nära 1 vet vi enligt Maclaurinutvecklingen att logaritmen har utseendet

$$\log(1+\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

I vårt fall innebär detta att

$$\log\Bigl(1-\frac{2}{n+1}\Bigr) = -\frac{2}{n+1} + O\Bigl(\frac{1}{(n+1)^2}\Bigr).$$

Därmed är

$$\begin{aligned} a_n &= \exp\Bigl\{n\Bigl(-\frac{2}{n+1} + O\Bigl(\frac{1}{(n+1)^2}\Bigr)\Bigr)\Bigr\} \\ &= \exp\Bigl\{-2\,\frac{n}{n+1} + O\Bigl(\frac{n}{(n+1)^2}\Bigr)\Bigr\}. \end{aligned}$$

Låter vi $n \to \infty$ fås

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \exp\Bigl\{-2\,\frac{n}{n+1} + O\Bigl(\frac{n}{(n+1)^2}\Bigr)\Bigr\} \\ &= \bigl\{\text{exp är kontinuerlig}\bigr\} \\ &= \exp\Bigl\{\lim_{n\to\infty}\Bigl(-2\,\frac{n}{n+1} + O\Bigl(\frac{n}{(n+1)^2}\Bigr)\Bigr)\Bigr\} \\ &= \exp\{-2+0\} = e^{-2}. \end{aligned}$$

9.2.2 Beräkna $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\bigl(-\frac{1}{4}\bigr)^{n-1}$ eller visa att serien divergerar.

Serien är en geometrisk serie med basen $-\frac{1}{4}$. Summan är

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\bigl(-\tfrac{1}{4}\bigr)^{n-1} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(-\tfrac{1}{4}\bigr)^{n-1} = 3\,\frac{1}{1-\bigl(-\frac{1}{4}\bigr)} = \tfrac{12}{5}.$$

9.2.4 Beräkna $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{5}{10^{3n}}$ eller visa att serien divergerar.

Serien är faktiskt en geometrisk serie, vilket vi lättare ser om vi skriver om summanden lite,

$$\frac{5}{10^{3n}} = \frac{5}{\bigl(10^3\bigr)^n}.$$

Innan vi sätter igång och använder formeln för en geometrisk serie noterar vi att vår serie inte riktigt överensstämmer med formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1} = \frac{a}{1-x}.$$

Vårt startindex är 0 istället för 1 och dessutom har vi n i exponenten istället för $n-1$. För att få rätt startindex gör vi en indexförskjutning

$$5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\bigl(10^3\bigr)^n} = \left\{\begin{array}{l} k=n+1 \\ n=k-1 \end{array}\right\} = 5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\bigl(10^3\bigr)^{k-1}}.$$

Problemet med exponenten löste sig själv. Summan av serien är nu

$$5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\bigl(10^3\bigr)^{k-1}} = \frac{5}{1-1/10^3} = \frac{5000}{999}.$$

9.2.10 Beräkna $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3+2^n}{3^{n+2}}$ eller visa att serien divergerar.

Summanden består av två termer, så vi kan dela upp summan i två delar

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{3^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+2}}. \qquad (*)$$

Eftersom serierna är positiva så är uppdelningen $(*)$ alltid giltig. Den första serien i högerledet är en geometrisk serie med summan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}.$$

Den andra serien är också en geometrisk serie, vilket vi enklare kan se efter en omskrivning,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^2} \Big(\frac{2}{3}\Big)^n = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{3}.$$

Sammanlagt har vi alltså

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6}.$$

9.2.16 Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$ eller visa att serien divergerar.

Termerna verkar misstänksamt stora. Vi har att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2/n} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

I en konvergent serie måste termerna gå mot 0, så vår serie måste vara divergent.

9.2.18 Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$ eller visa att serien divergerar.

I detta fall ser vi att termerna går mot 0 då $n \to \infty$, så vi kan inte direkt avfärda serien som divergent.

Serien är dock misstänkt lik den harmoniska serien, som vi vet är divergent. Eftersom den harmoniska serien ligger nära gränsen till att konvergera så måste vi vara försiktiga när vi ska jämföra serien med den harmoniska serien. Vi har

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Vi gör en indexförskjutning så att summanden ser exakt ut som den harmoniska serien

$$= \left\{ \begin{aligned} k &= n+1 \\ n &= k-1 \end{aligned} \right\} = 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Vår serie är alltså den harmoniska serien utan den första termen. Alltså är serien divergent.

9.3.2 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2}$ konvergerar eller divergerar.

När man får en serie av den här typen brukar man börja med en informell undersökning av termernas storleksordning för stora n. I en sådan undersökning försummar man deluttryck som man vet är mycket mindre än de mera dominerande delarna av uttrycket. I vårt fall är

$$\begin{aligned} n &\approx n \\ n^4 - 2 &\approx n^4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{n^4-2} \approx \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3},$$

d.v.s. för stora n liknar termerna i vår serie termerna i den konvergenta p-serien $\sum \frac{1}{n^3}$. Eftersom konvergensen av en serie avgörs av utseendet av termer för stora n, så borde vår serie också vara konvergent.

Ett sätt att realisera detta resonemang är att använda jämförelseprincipen. Vi ska då undersöka gränsvärdet av kvoten mellan termerna i vår serie och den välkänt konvergenta serien,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{n^4-2}}{\dfrac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-2/n^4} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Eftersom gränsvärdet är ändligt och jämförelseserien är konvergent, så är vår serie konvergent enligt jämförelseprincipen.

9.3.4 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$ konvergerar eller divergerar.

Precis som i förra uppgiften gör vi först en informell undersökning av termernas storleksordning för stora n. För stora n är

$$\begin{aligned} \sqrt{n} &\approx \sqrt{n} \\ n^2+n+1 &\approx n^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1} \approx \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Termerna är alltså jämförbara med termerna i den konvergenta serien $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$. Gränsvärdet av kvoten mellan våra termer och $1/n^{3/2}$ är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n+1/n^2} = \frac{1}{1+0+0} = 1.$$

Jämförelseprincipen ger nu att eftersom gränsvärdet är ändligt och serien vi jämför med är konvergent så är vår serie konvergent.

9.3.8 Bestäm om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 3n}$ konvergerar eller divergerar.

Man måste ha en känsla för olika funktioners storleksordningar. Logaritmfunktionen växer alltid långsamt i jämförelse med termer av typen n^{ε}, oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer. Alltså är termerna i serien $\sum 1/\log 3n$, för stora n, större än termerna i t.ex. den harmoniska serien $\sum 1/n$. Eftersom den harmoniska serien är divergent så borde vår serie också divergera.

Vi jämför därför vår serie med den harmoniska serien,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\log 3n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n + \log 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{\log n}{n} + \dfrac{\log 3}{n}} = \infty.$$

Jämförelseprincipen ger nu att vår serie är divergent.

9.3.10 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}$ konvergerar eller divergerar.

För stora n är

$$\frac{1+n}{2+n} \approx \frac{n}{n} = 1,$$

d.v.s. termerna går inte ens mot 0 och serien kan då inte vara konvergent. Alltså: Eftersom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n+1}{2/n+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

är serien divergent.

9.3.12 Bestäm om $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$ konvergerar eller divergerar.

Vi undersöker termernas storleksordning för stora n,

$$\frac{n^2}{1+n\sqrt{n}} \approx \frac{n^2}{n\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Inte nog med att termerna inte går mot noll, de går mot ∞, och då kan inte serien vara konvergent.

Sammanfattningsvis, eftersom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \infty,$$

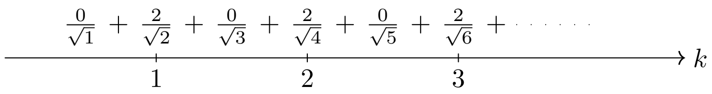
så är serien divergent.

9.3.16 Bestäm om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergerar eller divergerar.

Uttrycket $(-1)^n$ alternerar mellan -1 och $+1$, så summandens täljare $1+(-1)^n$ alternerar mellan 0 och 2. Varannan term är alltså noll,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{0}{\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{0}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{0}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \cdots$$

För att få en serie med rent positiva termer tar vi bort alla noll-termer och indexerar om serien



Med denna indexering blir serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2k}} = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Detta är en välkänd p-serie, och den är divergent.

9.3.18 Bestäm om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$ konvergerar eller divergerar.

Det här talet handlar om vilken storleksordning som $n!$ har i jämförelse med n^4. En tumregel är hierarkin

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^a \gg 1, \tag{$*$}$$

där $a > 1$. Med beteckningen $\gg$ menar vi att det vänstra ledet växer fortare än det högra ledet, så fort att kvoten mellan dem går mot 0. I vårt fall är alltså

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n!} = 0.$$

Frågan blir då om termerna avtar tillräckligt fort för att serien ska konvergera.

För att besvara denna fråga ska vi använda jämförelseprincipen och vårt hierarki ($*$). Vi ska jämföra vår serie med den konvergenta p-serien $\sum 1/n^2$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^4}{n!}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6}{n!}$$

Eftersom vi vet att $n! \gg n^6$ blir gränsvärdet ovan 0. Jämförelseprincipen ger nu att vår serie är konvergent.

Lektion 17, Envariabelanalys den 2 december 1999

9.4.4 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$ är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

Eftersom exponenten $2n$ alltid är ett jämnt tal så är täljaren $(-1)^{2n} = 1$. Serien är alltså en positiv geometrisk serie med kvoten $\frac{1}{2}$ och är konvergent.

Eftersom serien är positiv så sammanfaller begreppen konvergens och absolutkonvergens. Svaret måste alltså bli att serien är absolutkonvergent.

9.4.6 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

Vi börjar med att undersöka om serien är absolutkonvergent. Den positiva serien är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-2)^n}{n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}. \qquad (*)$$

Vi vet sedan tidigare att $n!$ växer mycket snabbare än potensuttryck av täljarens typ. T.ex. har vi att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Om vi därför jämför vår serie $(*)$ med den konvergenta geometriska serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

så har vi att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n/n!}{(2/3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Jämförelseprincipen ger att $(*)$ är konvergent, vilket betyder att serien i uppgiftstexten är absolutkonvergent.

9.4.8 Bestäm om $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{n^2+1}$ är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

Serien är absolutkonvergent om den positiva serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{-n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \qquad (*)$$

är konvergent. För stora n är

$$\frac{n}{n^2+1} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

så termerna i serien $(*)$ avtar lika långsamt som termerna i den divergenta harmoniska serien. Vi jämför därför $(*)$ med den harmoniska serien,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n^2} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Jämförelseprincipen ger att $(*)$ är divergent, d.v.s. serien i uppgiftstexten är inte absolutkonvergent.

Det återstår alltså att undersöka om serien är betingat konvergent eller divergent. Att visa att en serie är betingat konvergent är ofta en delikat uppgift, så låt oss ta ett steg tillbaka och betrakta serien trunkerad till en ändlig summa,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{-n}{n^2+1}.$$

På denna ändliga summa kan vi använda de vanliga räknereglerna och bryta ut en faktor -1,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{-n}{n^2+1} = -\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n^2+1}.$$

Om vi är observanta ser vi att summan i högerledet blir den positiva serien $(*)$ om $N \to \infty$. Vi har alltså att

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{-n}{n^2+1} = -\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n^2+1} \quad \text{är divergent.}$$

Alltså måste serien i uppgiftstexten vara divergent.

9.5.2 Bestäm mittpunkt, konvergensradie och konvergensområde till potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3n(x+1)^n.$$

Om vi skriver potensserien som

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3n\bigl(x-(-1)\bigr)^n$$

så ser vi direkt att mittpunkten är i $x=-1$.

Konvergensradien kan vi räkna ut med d'Alemberts kvotformel,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3(n+1)}{3n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Alltså är konvergensradien $R=1$.

Från denna information kan vi dra slutsatsen att för alla x i intervallet $(-1-R, -1+R) = (-2,0)$ så konvergerar potensserien, och för alla x i intervallen $(-\infty,-2)$ och $(0,\infty)$ divergerar potensserien. Vi måste göra en speciell undersökning av om ändpunkterna $x=-2$ och $x=0$ tillhör konvergensområdet.

$x=-2:$ När $x=-2$ är potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3n(-1)^n.$$

Vi ser direkt att termerna inte går mot noll, så potensserien är divergent för $x=-2$.

$x=0:$ Potensserien är nu

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3n\cdot 1^n.$$

Även i detta fall går inte termerna mot noll, så potensserien är divergent för $x=0$.

Sammanfattningsvis har vi att

mittpunkt	-1,
konvergensradie	1,
konvergensområde	$(-2,0)$.

9.5.4 Bestäm mittpunkt, konvergensradie och konvergensområde till potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4\,2^{2n}}\,x^n.$$

Vi ser direkt att potensserien är centrerad kring $x=0$.

Konvergensradien får vi från d'Alemberts kvotformel,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^4\, 2^{2(n+1)}}}{\dfrac{(-1)^n}{n^4\, 2^{2n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 \cdot 2^{2n}}{(n+1)^4 \cdot 2^{2n} \cdot 2^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{2^{2n}\cdot 2^2} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^4 \cdot \frac{1}{2^2} \\
&= \big\{\, x \mapsto x^4 \text{ är kontinuerlig} \,\big\} \\
&= \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \Big)^4 \cdot \tfrac{1}{4} = 1^4 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Alltså är konvergensradien $R = 4$.

Konvergensområdet är alltså intervallet från -4 till $+4$, men vi måste avgöra om ändpunkterna -4 och $+4$ också tillhör konvergensområdet.

$x = -4:$ För $x = -4$ blir potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4\, 2^{2n}} \cdot (-4)^n = \big\{\, (-4)^n = (-1)^n \cdot 2^{2n} \,\big\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Serien i högerledet är välkänt konvergent, så potensserien är konvergent för $x = -4$.

$x = 4:$ Potensserien är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4\, 2^{2n}} \cdot 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$

som är absolutkonvergent enligt fallet $x = -4$. Alltså är potensserien konvergent för $x = -4$.

Om vi sammanfattar har vi alltså

mittpunkt	0,
konvergensradie	4,
konvergensområde	$[-4, 4]$.

9.5.6 Bestäm mittpunkt, konvergensradie och konvergensområde till potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} (4-x)^n.$$

Vi skriver först om potensserien i standardform,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} \big((-1)(x-4)\big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} (-1)^n (x-4)^n.$$

Nu kan vi avläsa att mittpunkten är $x = 4$.

Konvergensradien är enligt d'Alemberts kvotformel

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{e^{n+1}}{(n+1)^3}(-1)^{n+1}}{\dfrac{e^n}{n^3}(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} e \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3} \\
&= e \cdot \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^3 = \big\{\, x \mapsto x^3 \text{ är kontinuerlig} \,\big\} \\
&= e \cdot \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \Big)^3 = e \cdot 1^3 = e,
\end{aligned}
$$

vilket ger att $R = e^{-1}$.

Slutligen ska vi undersöka om de två ändpunkterna $x = 4 - e^{-1}$ och $x = 4 + e^{-1}$ tillhör konvergensområdet.

$x = 4 - e^{-1}:$ Då $x = 4 - e^{-1}$ är potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} \Big(\frac{1}{e}\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

som är välkänt konvergent.

$x = 4 + e^{-1}:$ Potensserien blir i detta fall

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} \Big(-\frac{1}{e}\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}.$$

Denna serie är absolutkonvergent, som vi såg i den andra ändpunkten.

Svaret blir alltså

mittpunkt	4,
konvergensradie	e^{-1},
konvergensområde	$[4-e^{-1}, 4+e^{-1}]$.

9.5.8 Bestäm mittpunkt, konvergensradie och konvergensområde till potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}.$$

Vi skriver om potensserien i standardform,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bigl(4(x-\frac{1}{4})\bigr)^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^n}(x-\tfrac{1}{4})^n.$$

Här ser vi att mittpunkten är $x = \frac{1}{4}$.

d'Alemberts kvotformel ger oss konvergensradien

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{4^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{4^n}{n^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

I gränsvärdet ser vi att nämnaren har en faktor mer än täljaren. Det verkar alltså som om gränsvärdet går mot noll. Vi kan visa detta med följande skattning

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \\ &\le \lim_{n\to\infty} 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Alltså är konvergensradien $R = \infty$.

Svaret blir

mittpunkt	$\frac{1}{4}$ (men vilket annat reellt tal duger),
konvergensradie	∞,
konvergensområde	alla reella tal.

9.5.18 Givet potensserien

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad (-1 < x < 1).$$

Utnyttja denna formel för att bestämma potensserien för

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

i potenser av x, och bestäm för vilka x formeln är giltig.

Vad vi ska göra är att vi ska skriva om funktionen $f(x)$ så att vi kan uttrycka den i termer av potensserieformeln i uppgiftstexten,

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = -\frac{x-1}{x+1} = -\frac{x+1-2}{x+1} = -1 + \frac{2}{x+1}.$$

Den sista termen i högerledet är nästan uttryckt i potensserieformeln. En ytterligare omskrivning ger

$$\begin{aligned} &= -1 + \frac{2}{1-(-x)} = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n. \end{aligned}$$

9.5.28 Bestäm summan av serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

Om vi tittar lite närmare på serien så ser vi att uttrycket $\frac{1}{2^n}$ skulle kunna komma från x^n i serien

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

om vi stoppar in $x = 1/2$.

Faktorn $(n+1)$ är typiskt en faktor som dyker upp när man deriverar en potensserie,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}.$$

Serien i högerledet är en vanlig geometrisk serie, så vi har att

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}. \qquad (*)$$

Det är viktigt att notera att ovanstående formel gäller bara för x inom konvergensområdet till den geometriska serien. Om vi vill stoppa in $x = 1/2$ så måste vi därför försäkra oss om att $x = 1/2$ verkligen tillhör konvergensområdet.

Den geometriska serien har konvergensområdet $(-1, 1)$, så vi kan lugnt stoppa in $x = 1/2$ i $(*)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4.$$

Visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$

Lösningen till den här uppgiften är lite invecklad, med några steg och delresultat. För att inte förlora överblicken redovisar vi först en skiss av lösningen som hoppar över allt smått och koncentrerar sig på huvuddragen.

1. Visa Maclaurinserien $\displaystyle\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n$ för $|x| < 1$.

2. Visa att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ är konvergent.

3. Använd Abels kontinuitetssats,

$$\begin{aligned}
\log 2 = \lim_{x\to 1^-} \log(1+x) &= \lim_{x\to ^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 1^-} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.
\end{aligned}$$

Punkt 3 är redan ganska välförklarad så det räcker om vi visar punkt 1 och 2.

1. Maclaurinutvecklingen av $\log(1+x)$ är välkänd,

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n + R_N(x), \qquad (*)$$

där resttermen ges av

$$R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\xi_N)}{N!} x^N \qquad (0 < \xi_N < x).$$

Med ett relativt enkelt induktivt resonemang kan vi få fram att

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Så resttermen är

$$R_N(x) = \frac{(-1)^{N-1}}{N}\, \xi_N^N\, x^N.$$

Om vi låter $N \to \infty$ så ser vi att

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} R_N(x) &= \lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^{N-1}}{N}\, \xi_N^N\, x^N \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^{N-1}}{N} \cdot \lim_{N\to\infty} \xi_N^N \cdot \lim_{N\to\infty} x^N \\
&= \left\{ \xi_N \in (0,x) \quad\Rightarrow\quad \lim \xi_N^N \le \lim x^N = 0 \right\} \\
&= 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Alltså ger $(*)$, om vi låter $N \to \infty$, att

$$\log(1+x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n + \lim_{N\to\infty} R_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

2. Vad vi ska notera i serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad (*)$$

är att den är alternerande. För att en alternerande serie ska konvergera räcker det om beloppet av termerna avtar monotont mot 0, och i vårt fall är

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

strängt avtagande, så Leibniz test ger att serien $(*)$ är konvergent.

Lektion 18, Envariabelanalys den 7 december 1999

App. III.2 Antag att $f(x) \leq K$ i intervallen $[a, b)$ och $(b, c]$, och $\lim_{x\to b} f(x) = L$. Visa att $L \leq K$.

I vanliga fall skulle vi bara hänvisa till instängningsprincipen och uppgiften skulle vara löst, men i detta fall ska vi gå tillbaka till definitionen av gränsvärde och med den som utgångspunkt visa uppgiften.

I en mera teoretisk uppgift av den här typen kan det vara bra att först tydligt skriva upp vad vi vet och vad vi vill visa.

Vi vet:
1. $f(x) \leq K$ överallt i $[a, c]$ utom möjligtvis i $x = b$,
2. $\lim_{x\to b} f(x) = L$,

Vill visa:
3. $\lim_{x\to b} f(x) = L \leq K$.

Punkt 2 översätter vi med gränsvärdesdefinitionen till

2*. Oavsett hur litet vi väljer $\varepsilon > 0$ så finns alltid ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon, \qquad (*)$$

för alla x i en punkterad δ-omgivning av $x = b$.

Om vi plockar ut den viktiga informationen ur punkt 1 och 2* så säger den att i en punkterad δ-omgivning av $x = b$ så är

$$f(x) \leq K, \qquad (1)$$
$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \qquad (2)$$

Om det nu vore så att $L > K$, så skulle den vänstra olikheten i (2) vålla problem. För, säg att vi väljer $\varepsilon > 0$ så pass liten att $L-\varepsilon > K$ (vilket vi kan). Då säger (1) och (2) att

$$K < L - \varepsilon < f(x) \leq K,$$

vilket helt klart är orimligt. Alltså måste antagandet att $L > K$ vara fel, d.v.s. vi måste ha att $L \leq K$. VSB

App. III.4 Visa att följande funktioner är kontinuerliga,

a) $f(x) = C$,

b) $g(x) = x$.

Vi ska visa att

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad (*)$$

för alla reella tal a.

a) Om vi skriver $(*)$ med gränsvärdesdefinitionen ska vi alltså visa att:

Oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer så finns det alltid ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{för alla } x : 0 < |x - a| < \delta. \qquad (\dagger)$$

Eftersom $f(x) = C$ för alla x så blir $(\dagger)$,

$$0 < \varepsilon \quad \text{för alla } x : 0 < |x - a| < \delta.$$

Denna olikhet är alltid uppfylld om $\varepsilon > 0$.

b) I detta fall ska vi visa att:

Oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer så finns det alltid ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

$$|g(x) - g(a)| < \varepsilon \quad \text{för alla } x : 0 < |x - a| < \delta. \qquad (\dagger)$$

Med $g(x) = x$ blir $(\dagger)$,

$$|x - a| < \varepsilon \quad \text{för alla } x : 0 < |x - a| < \delta.$$

Om vi väljer $\delta = \varepsilon$ så ser vi att $(\dagger)$ är uppfylld.

App. IV.2 Låt

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x = 1/n \text{ för } n = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Visa att f är integrabel över $[0, 1]$ och beräkna

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Låt oss först rekapitulera Riemannintegralens definition.
Till varje partition (indelning) P av intervallet $[0, 1]$ bildar vi en över- och undersumma,

$$U(P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

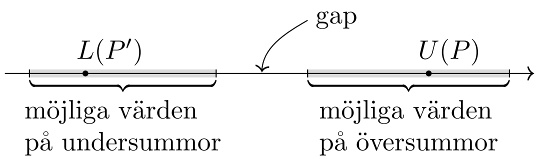
$$L(P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i,$$

där M_i är f:s största värde i det i:te delintervallet och m_i är f:s minsta värde i samma delintervall.

Oberoende av vilka partitioner P och P' vi väljer så kommer alltid en översumma vara större än en undersumma,

$$L(P') \leq U(P).$$

Om vi därför ritar ut de möjliga värdena för över- och undersummor på en tallinje, så kommer de typiskt att ha utseendet



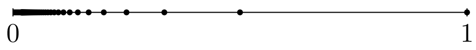
Om det inte finns något gap mellan de två mängderna av möjliga värden på över- och undersummor eller om detta gap endast består av ett värde I, då är funktionen integrabel på intervallet och

$$\int_0^1 f(x)\,dx = I.$$

För att visa att gapet i vårt exempel högst består av ett värde ska vi ta fram en följd av partitioner $\{P_n\}$ så att

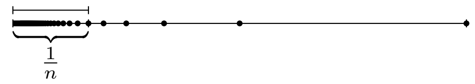
$$\lim_{n\to\infty} U(P_n) = \lim_{n\to\infty} L(P_n) = I.$$

Vi ska inte direkt skriva upp partitionen P_n, utan ta hjälp av en annan partition $P_{m,n}$. Partitionen $P_{m,n}$ ska vi bygga upp genom att stegvis lägga till delintervall som ska kapsla in de punkter där funktionen antar värdet 1; låt oss kalla dessa punkter för 1-punkter.

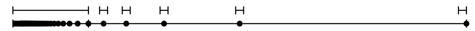


1-punkter

Det första delintervallet som vi lägger till är $[0, \frac{1}{n}]$, som ska fungera som ett ihopsamlingsintervall för alla 1-punkter som hopar sig kring $x = 0$.



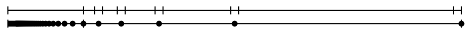
Kring varje 1-punkt utanför $[0, \frac{1}{n}]$ skapar vi ett intervall med längd $\frac{1}{m}$ och centrerad kring punkten. Punkten $x = 1$ blir här ett undantag, där vi istället skapar ett intervall med $x = 1$ som höger ändpunkt.



Antalet sådana $\frac{1}{m}$-delintervall blir $(n-1)$ (kom ihåg att fr.o.m. $x = \frac{1}{n}$ så tillhör 1-punkterna delintervallet $[0, \frac{1}{n}]$).

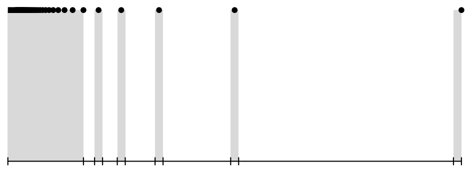
Slutligen låter vi mellanrummen mellan de hittills definierade intervallen vara de sista delintervallen som vi lägger till vår partition $P_{m,n}$.

$P_{m,n}$:



Översumman till $P_{m,n}$ blir

$$U(P_{m,n}) = \sum M_i \Delta x_i = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + (n-1) \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{m}$$



Låt nu P_n vara partitionen $P_n = P_{n^2,n}$. Då får vi att

$$U(P_n) = U(P_{n^2,n}) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n^2} \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$

Eftersom funktionen är positiv så måste vi ha att

$$0 \le L(P_n) \le U(P_n).$$

Instängningsprincipen ger att

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n) = 0.$$

Vi har därmed visat att f är integrabel på $[0,1]$, och att

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

App. IV.6 Använd definitionen av likformig kontinuitet för att visa att $f(x) = \sqrt{x}$ är likformigt kontinuerlig på $[0,1]$.

Vi ska visa följande:

> Oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer och oberoende av $a \in [0,1]$ så finns ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att
>
> $$|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| < \varepsilon \quad \text{för alla } x : 0 < |x-a| < \delta. \qquad (*)$$

Det som tillkommit jämfört med gränsvärdesdefinitionen är att nu ska δ vara oberoende av a. Vi vill alltså kunna välja ett $\delta > 0$ så att vi utgående från

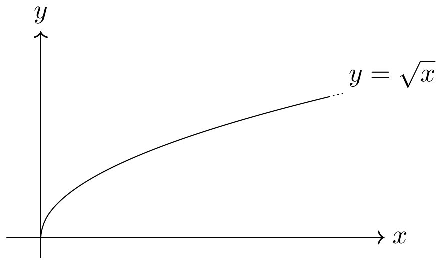
$$0 < |x-a| < \delta \qquad (1)$$

kan härleda olikheten

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| < \varepsilon, \qquad (1)$$

helt oberoende av vilket värde a har.

Om vi ritar upp grafen till $y = \sqrt{x}$,



så ser vi att grafen har en lodrät tangent i $x = 0$. Det betyder att två punkter x och a som ligger nära varandra, $|x-a| < \delta$, i närheten av 0 kommer ha sina funktionsvärden på betydligt större avstånd än δ. Vi måste därför välja δ mycket mindre än ε, d.v.s. i en annan storleksordning än ε.

Välj därför $\delta = \varepsilon^2$. För att visa (2) delar vi upp härledningen i två delar.

$x > \varepsilon^2$: Vi har

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| = \frac{|x-a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}\,|} < \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2} + 0} = \varepsilon.$$

$x \le \varepsilon^2$: Vi har

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}\,| \le |\sqrt{x} - 0\,| = \sqrt{x} \le \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Alltså har vi utgående från (1) visat (2) med $\delta = \varepsilon^2$ (som är oberoende av a).