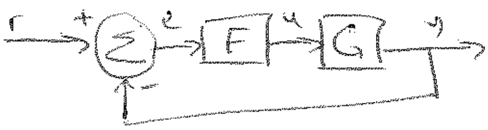
Övning 9 Robusthet & Tillståndsbeskrivning [6.7, 8.2, 8.3, 8.4, 8.6]

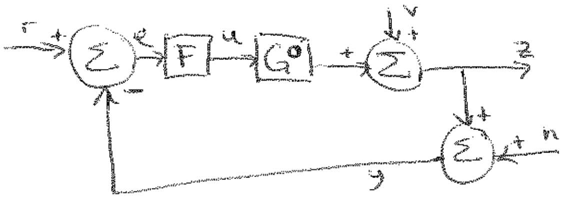
Fel i vårt system

* Störning (förra övningen – känslighet) "Hur känsligt är systemet för störningar?"
* Mätfel "Hur känsligt är systemet för mätfel?"
* Modellfel "Hur robust är systemet för modellfel?"

Modell



Verklighet (med mätfel & störning)



n = mätfel = brus

z = utsignal = 'det vi vill styra'

y = signalen vi kan mäta

Från blockdiagram 2: $Z = G^0 U + V$ ← verklighet → $Y = Z + N$

Från block diagram 1: $Y = GU$ ← modell

G är vår modell av systemets överföringsfunktion

G^0 är den verkliga överföringsfunktionen

Förra övningen kom vi fram till att S säger hur mycket störningen v påverkar utsignalen: $S = \frac{1}{1+G_0}$

Hur påverkar mätfelet?

Överföringsfunktion från n till z!

$$Z = V + G^0F(R - Z - N) \Rightarrow Z = \frac{V + G^0F(R-N)}{1+G^0F}$$

$$\Rightarrow Z = \underbrace{\frac{1}{1+G^0F}}_{S} V + \underbrace{\frac{G^0F}{1+G^0F}}_{G_c} R - \underbrace{\frac{G^0F}{1+G^0F}}_{T} N$$

$T = \frac{G^0F}{1+G^0F} = G_c$ är komplementära känslighetsfunktionen & säger hur mätfel påverkar utsignalen!

$\boxed{\text{Notera: } T = 1 - S}$

Slutsatser

1) Vi vill att S ska va liten för att störningar ska ha liten effekt
2) Vi vill att T ska va liten så att mätfel har liten effekt
3) $S+T=1$ ⇒ Vi kan inte ha litet T & S samtidigt

Vi måste prioritera om störningar eller mätfel ska påverka mest

OBS! S & T är båda funktioner av ω ⇒ en kan alltså vara mindre för ett givet ω_1 & större för ett annat ω_2.

Robusthet – Modellfels påverkan

G^0 - verklighet G - modell

$\Rightarrow \quad G^0 = G(1+\Delta_G)$ för något Δ_G

Δ_G - relativa modellfelet
- okänt (annars vet vi ju G^0!)

Hur påverkar Δ_G stabiliteten?

Om vårt verkliga system G^0 ligger på stabilitetsgränsen gäller: $G^0(i\omega_c)F(i\omega_c) = -1$ (Nyquist skär -1)

$$\Rightarrow \quad G^0(i\omega_c)F(i\omega_c) = G(i\omega_c)F(i\omega_c)(1+\Delta_G) = -1$$

$$\Rightarrow \quad G(i\omega_c)F(i\omega_c) + G(i\omega_c)F(i\omega_c)\Delta_G = -1$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_G = \frac{-1-G(i\omega_c)F(i\omega_c)}{G(i\omega_c)F(i\omega_c)} = \frac{-1}{T(i\omega_c)}$$

stabilitetsgränsen är alltså $\Delta_G(i\omega_c) = \dfrac{-1}{T(i\omega_c)}$

Slutsats: Det verkliga systemet är stabilt om modellen är stabil & $|\Delta_G(i\omega)| < \dfrac{1}{|T(i\omega)|}$

Robusthetskriteriet s125

Om $F(s)$ stabiliserar $G(s)$, det verkliga systemet ges av $G^0 = G(1+\Delta_G)$, G & G^0 har samma antal poler i HHP (origo inräknat), & både FG & FG^0 går mot noll då $|s| \to \infty$, då stabiliserar F även G^0 om

$$|\Delta_G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall \omega$$

OBS! Systemet G^0 kan vara stabilt för F även om kriteriet inte är uppfyllt! Det är tillräckligt inte nödvändigt!

Tillståndsbeskrivning

Dynamiskt system: $y(t)$ beror på $u(t)$ & $u(\tau)$ $\tau < t$
dvs. utsignalen beror på tidigare & nuvarande insignal
(från övning 1)

⇒ Vi kan skriva högre ordningens linjära Diff. Ekv $\Big\}$ $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = bu(t)$ (*)

Vi kan införa $x_{i+1} = y^{(i)}$ & skriva (*) som ett system av första ordningens diff. ekvationer!

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

A, B, C & D är matriser: $\left.\begin{matrix} A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ C \in \mathbb{R}^{1 \times n} \\ D \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\}$ för *

Att gå från A, B, C, D till G

s 162

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow G(s) \Rightarrow Y = G(s)U$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}: \begin{cases} Xs = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \Rightarrow (sI - A)X = BU \Rightarrow X = (sI-A)^{-1}BU$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow Y = \underbrace{\left(C(sI-A)^{-1}B + D\right)}_{G(s)} U$$

$$\boxed{G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D}$$

Att gå från G till A, B, C, D

Det finns ett oändligt antal tillståndsbeskrivningar för ett givet G!

Men det finns standardmetoder för att ta fram ett par av dem:
styrbar kanonisk form & observerbar kanonisk form

Styrbar kanonisk form   s.158

$$G(s)=\frac{b_1 s^{n-1}+\dots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\dots+a_{n-1}s+a_n} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\quad C=[b_1\ b_2 \dots b_n]\quad D=0$$

Observerbar kanonisk form   s.159

$G(s)$ som ovan

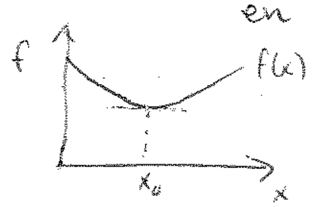
$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-a_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

$$C=[1\ 0 \dots 0]\qquad D=0$$

Linjärisering

: Approximera olinjära funktioner som linjära runt en given punkt.

ex



$f(x)$ är olinjär

men vid x_0 kan vi approximera f som linjär

På tillståndsform: $\dot{x}=f(x,u)$ ← OBS! f är kolonnvektor med dim n

$y=h(x,u)$

s.155

Vi linjäriserar runt en stationär punkt (x_0,u_0) : $\begin{cases} f(x_0,u_0)=0\\ h(x_0,u_0)=y_0\end{cases}$

Det gäller då att: $A=f_x(x_0,u_0)$ $\quad C=h_x(x_0,u_0)$ $\quad$ där $\Delta\dot{x}=A\Delta x+B\Delta u$

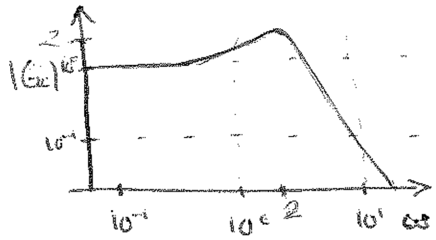
$B=f_u(x_0,u_0)$ $\quad D=h_u(x_0,u_0)$ $\quad \Delta y=C\Delta x+D\Delta u$

Där elementen i $f_x(x_0,u_0)$ är $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ utvärderad i (x_0,u_0)

Dvs $A=\left.\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\right|_{(x_0,u_0)}$ etc

(6.7) $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ $\qquad U = F(R-Y) \qquad F = 4$

$|G_c(i\omega)| = \left|\frac{F(i\omega)G(i\omega)}{1+F(i\omega)G(i\omega)}\right| \Rightarrow$



Verkliga systemet: $G^0(s) = G(s)\frac{\alpha}{s+\alpha} \qquad \alpha > 0$

a) Rita rotort map α för karaktäristiska ekvationen av det slutna systemet. För vilket α är G_c asymptotiskt stabilt?

Lösning

① G_c! $\qquad G_c = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{4\alpha/s(s+1)(s+\alpha)}{1+4\alpha/s(s+1)(s+\alpha)} = \frac{4\alpha}{s(s+1)(s+\alpha)+4\alpha}$

Karaktäristiska ekv: $s(s+1)(s+\alpha)+4\alpha=0$

② P & Q!

$s(s+1)(s+\alpha)+4\alpha=0$

$\Rightarrow s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha s+4\alpha=0$

$\Rightarrow s^3+s^2+\alpha(s^2+s+4)=0$

$\begin{cases} P = s^3+s^2 & n=3 \\ Q = s^2+s+4 & m=2 \end{cases}$

③ $K\to 0$ dvs $P\to 0$! $\qquad s^3+s^2 = s^2(s+1)=0$

$\Rightarrow s_1=0,\ s_2=0,\ s_3=-1$

④ $K\to\infty$ dvs $Q\to 0$! $\qquad s^2+s+4=0 \Rightarrow s=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-4} = \frac{-1\pm i\sqrt{15}}{2}$

⑤ asymptoter! $\quad$ antal: $n-m=3-2=1$

skärpunkt: $\frac{\sum \text{start} - \sum \text{änd}}{n-m} = \frac{(-1)-\left(\frac{-1}{2}+\frac{-1}{2}\right)}{1} = 0$

riktning: $n-m-1=0 \Rightarrow k=0$

$\frac{\pi}{n-m}+2k\frac{\pi}{n-m} = \frac{\pi}{1} = \pi$ (negativa realaxeln)

⑥ Im-axeln! $\qquad -i\omega^3-(1+\alpha)\omega^2+\alpha i\omega+4\alpha=0$

$\Rightarrow (\alpha-\omega^2)\omega i + 4\alpha-(1+\alpha)\omega^2=0$

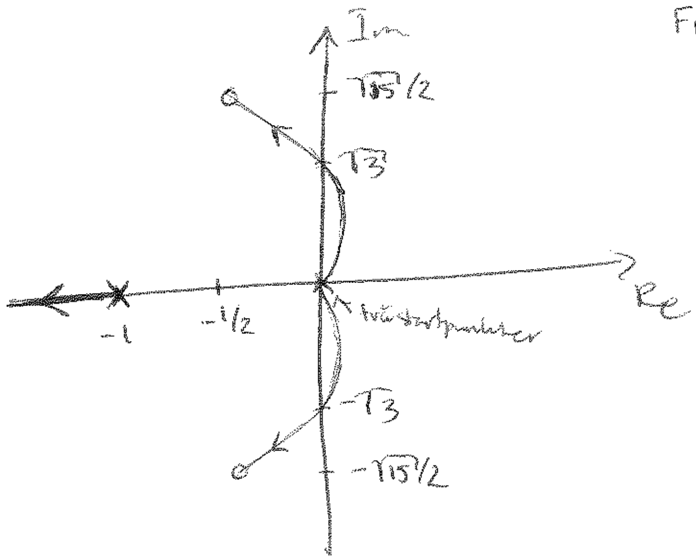
Im: $(\alpha-\omega^2)\omega=0 \qquad \omega=0$ eller $\omega=\pm\sqrt{\alpha}$

Re: $4\alpha-(1+\alpha)\omega^2=0 \qquad \Downarrow$

$\Rightarrow \omega=0 \Rightarrow \alpha=0$ och

$\omega=\pm\sqrt{\alpha} \Rightarrow \alpha=3$

⑦ Första start/änd i origo $\Rightarrow$ $0\to\infty$ ej med!
2 start i origo, en start i -1 $\Rightarrow$ $-1\to 0$ ej med! $\quad -\infty\to -1$ med!



Från (7) vet vi att endast $-\infty \to 1$ på reella axeln är med: polen som startar i -1 går mot $-\infty$ (asymptoten)

Från (6) vet vi att rotorten skär Im-axeln för $\alpha = 0$ i origo samt för $\alpha = 3$ i $\pm\sqrt{3}$
$\Rightarrow$ polerna som startar i origo tar varsitt håll, in i HHP & tillbaka till VHP i $\pm\sqrt{3}$ för att sluta i ändpunkterna.

Alla poler är i VHP för $\underline{\alpha > 3}$

b) Använd Robusthetskriteriet för att bestämma för vilka α systemet är stabilt!

Lösning

Kan vi använda det? $\Rightarrow$ Har G^0 & G lika många poler i HHP?

$G = \frac{1}{s(s+1)}$ poler: $s_1 = 0$, $s_2 = -1$ — poler i HHP: $s_1 = 0$

$G^0 = \frac{1}{s(s+1)} \frac{\alpha}{s+\alpha}$ poler: $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, $s_3 = -\alpha$ — poler i HHP: $s_1 = 0$

} ok!

Vi har att $|\Delta G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall \omega$

Hitta ΔG! Vet att $G^0 = G(1+\Delta G)$ samt $G^0 = G\frac{\alpha}{\alpha+s}$

$\Rightarrow \Delta G + 1 = \frac{\alpha}{\alpha+s} \Rightarrow \Delta G = \frac{-s}{\alpha+s}$

$\Rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}} < \frac{\sqrt{\omega^2+(4-\omega^2)^2}}{4}$ $\Leftarrow$ svår löst...

Använd Bode!

Vi har Bode $|G_c|$ & vet att $T=G_c \Rightarrow$ Vi har Bode för $|T|$

kriterie: $|\Delta_G| < \frac{1}{|T|} \Leftrightarrow |T| < \left|\frac{1}{\Delta_G}\right|$

Skissa på Bode för $\left|\frac{1}{\Delta_G}\right|$!

$\Delta_G = \frac{-s}{s+\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\Delta_G} = \frac{s+\alpha}{-s} = \frac{1+s/\alpha}{-s/\alpha}$

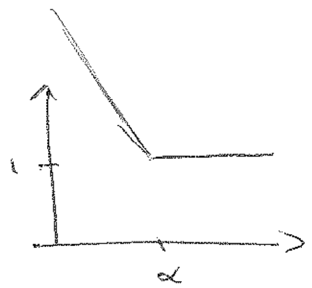
$\lim_{s\to 0} \frac{1}{\Delta_G} = \infty \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{1}{\Delta_G} = -1$ } lågfrekvens-, högfrekvensasymptoter

$\left|\frac{1}{\Delta_G}\right|_{lf} = \infty \qquad \left|\frac{1}{\Delta_G}\right|_{hf} = 1$

brytpunkter:

punkt	0	α
typ	pol	noll
bidrag	-1	+1
lutning	-1	0

$\left|\frac{1}{\Delta_G}\right|$ börjar i ∞ med lutning -1
vid $\omega=\alpha$ ändras lutningen till 0
& $\left|\frac{1}{\Delta_G}\right|$ konvergerar till 1



Titta på Bode för $|T|$

$|T|<1$ överallt $(\forall \omega)$ utom i spannet runt peaken

$\Rightarrow$ Om området runt peaken är under $\left|\frac{1}{\Delta_G}\right|$ så är kriteriet ok!

Lutningen efter peaken är större än 1

$\Rightarrow$ Om $|T(i\omega')| < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega')|}$ för $\omega'=2 \leftarrow$ peakens frekvens

så är $|T(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \quad \forall \omega$

Från Bode av $|T|$: $|T(i2)| = 2$

$$\left|\frac{1}{\Delta_0(i\omega)}\right| = \frac{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}{\omega}$$

OK <u>om</u> $\frac{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}{\omega} = \{\omega=2\} = \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{2} > 2$

$\Rightarrow \quad \alpha > \sqrt{12}$

c) Kommentera på skillnaden i krav från a & b

<u>Lösning</u>

Rotorten ger ett <u>om o endast om</u> kriterie

Robusthetskriteriet är tillräckligt men inte nödvändigt

$\Rightarrow$ konservativt

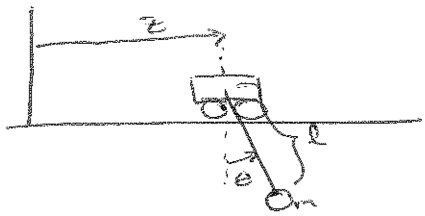
$\sqrt{12} > 3$

$\alpha > 3$ är det nödvändiga kravet

$\alpha > \sqrt{12}$ är tillräckligt

Dvs $3 < \alpha < \sqrt{12}$ är också stabilt!

8.2



$$\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta + \ddot{z}\cos\theta = 0$$

$x_1 = \theta$

$x_2 = \dot{\theta}$

$u = \frac{\ddot{z}}{\ell}$

$y = \theta$

$\omega_0^2 = g/\ell$

Linjärisera runt jämviktspunkten: $x_1 = \pi$
$x_2 = 0$
$u = 0$

Lösning

① Skriv på formen: $\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases}$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{\ddot{z}}{\ell}\cos\theta = -\omega_0^2 \sin x_1 - u\cos x_1 = f_2(x_1, x_2, u) \\ y = \theta = x_1 = h(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

② Kolla jämviktspunkten (given här - men kontrollera!)

$f_1(\pi, 0, 0) = 0$

$f_2(\pi, 0, 0) = -\omega_0^2 \sin\pi - 0\cdot\cos\pi = -\omega_0^2 \cdot 0 - 0\cdot 1 = 0$

$h(\pi, 0, 0) = \pi = y_0$

ok!

③ Bestäm A, B, C, D (Jacobianerna)

$A = f_x(x_0, u_0)$

$f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,u_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2\cos(x_1^0) + u_0\sin(x_1^0) & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = f_u(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial u \\ \partial f_2/\partial u \end{bmatrix}\Bigg|_{x_0,u_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos x_1^0 \end{bmatrix} = \cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = h_x(x_0, u_0)$$

$$h = x_1$$

$$C = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2}\right] = \left[1 \quad 0\right]$$

$$D = h_u(x_0, u_0) = \left[\frac{\partial h}{\partial u}\right] = 0$$

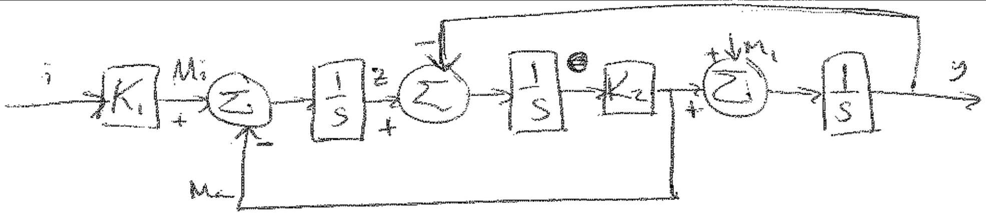
5 Linjäriserade Ekv

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u \\ Ay = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta x \end{cases}$$

OBS! Vi skriver Δx istället för x (etc) eftersom linjäriseringen gäller för små avvikelser från det stationära läget!

(Från Taylorutveckling se s. 155)

8.3



i = ström
M_i : Moment
z : varvhastighet motor
y : varvhastighet last
θ : axelvinkel
$M_a = K_2\theta$: Moment från axeln
M_l : lastens Moment

Ge en tillståndsbeskrivning av systemet med M_l o i som insignaler o y som utsignal
(Flera lösningar finns)

Lösning

Insignal $u = \begin{bmatrix} i \\ M_l \end{bmatrix}$ utsignal y ← givet

① Välj tillstånd! (dvs x s.a. $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$)

Finns flera möjliga val...
Tips! Välj signalerna som följer $\frac{1}{s}$ de ger 1:a ordningens diff. ekv. för tillstånden

$\Rightarrow x_1 = y, \ x_2 = \theta, \ x_3 = z \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ z \end{bmatrix}$

Använd Blockschemat för tillstånds ekvationer

② $X_1 = Y = \frac{1}{s}(M_l + K_2\theta) = \frac{1}{s}(M_l + K_2 X_2) = \frac{1}{s}(U_2 + K_2 X_2)$

$X_2 = \theta = \frac{1}{s}(Z - Y) = \frac{1}{s}(X_3 - X_1)$

$X_3 = Z = \frac{1}{s}(K_i i - K_2\theta) = \frac{1}{s}(K_i U_1 - K_2 X_2)$

③ Hitta $\dot{x}$ (Laplace invers) ← Lätt för vårt val av tillstånd! pga $\frac{1}{s}$

$\dot{x}_1 = u_2 + K_2 x_2$

$\dot{x}_2 = x_3 - x_1$

$\dot{x}_3 = K_i u_1 - K_2 x_2$

④ Matrisform : $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & K_2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -K_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ K_i & 0 \end{bmatrix} u$

$y = [1 \ 0 \ 0]\, x$ ← eftersom $x_1 = y$

(8.4) Skriv systemen på tillståndsform

a) $\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6y = 6u$

Lösning 3 ordningens diff.ekv. $\Rightarrow$ 3 tillstånd

tillstånd $x_1 = y$
$x_2 = \dot{y}$ $\Rightarrow$ $x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$
$x_3 = \ddot{y}$

derivata $\Rightarrow$ $\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$
$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3$
$\dot{x}_3 = y^{(3)} = 6u - 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u - 6x_3 + 11x_2 - 6x_1$

matris $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} u$

$y = [1 \; 0 \; 0] x$

b) $\dddot{y} + \ddot{y} + 5\dot{y} + 3y = 4\ddot{u} + \dot{u} + 2u$

Lösning: 3 ordningens diff.ekv. $\Rightarrow$ 3 tillstånd – men hur hanterar man $\ddot{u}$ & $\dot{u}$?

överföringsfunktion: $(s^3 + s^2 + 5s + 3)Y = (4s^2 + s + 2)U$

$$G = \frac{4s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + 5s + 3}$$

Gå från G till A,B,C,D!

Ex: välj Observerbar kanonisk form $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$C = [1 \; 0 \; 0]$ $D = 0$

$\Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$

$y = [1 0 0] x$

c) $G(s) = \dfrac{2s+3}{s^2+5s+6}$

Lösning Från G till A, B, C, D

Styrbar kanonisk form: $A = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$ $D = 0$

Observerbar kanonisk form: $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = 0$

$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx$

för båda valen av matriser är en lösning

(8.6) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$

$y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x$

Beräkna G!

Lösning: $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

för $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ & $D = 0$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}B + \underbrace{D}_{0} = C(sI-A)^{-1}B = (-1\ 2)\frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1\ 2)\frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} s+3+1 \\ s+2 \end{pmatrix} = \frac{-(s+4) + 2(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{s}{(s+2)(s+3)}$$