Övning 8 Lead-Lag & Känslighet [5.20, 6.1, 6.3]

Lead-Lag Kompensering

Använd Bodediagram för att designa vår regulator!

Vad vill vi uppnå? Det ideala systemet är...

- Stabilitet
- Inget fel
- Snabbt
- Inte svängigt

För Bode av slutna system

Stabilitet $\omega_c < \omega_p$ (övning 6)

Inget fel felkoefficienter e_0, e_1, e_2

$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)$ för referenssignaler motsvarande steg, ramp & kvadratisk funktion

$e_0 = \frac{1}{1+G_o(0)}$ ⇒ inget fel för referens=steg om $G_o(0) \to \infty$

Snabbt $T_r \sim \frac{1}{\omega_B}$ (övning 6)

lågt ω_B (bandbredd) ⇔ stort T_r ⇔ långsamt system
stort ω_B ⇔ litet T_r ⇔ snabbt system

Inte svängigt $\zeta \sim \frac{1}{M_p}$ (övning 6)

lågt M_p (resonanstopp) ⇔ stort ζ ⇔ bra dämpat ⇔ lite svängigt
stort M_p ⇔ litet ζ ⇔ dåligt dämpat ⇔ mycket svängigt

För Bode av öppna system (s. 100)

För stora ω gäller $G_c(i\omega) \approx G_o(i\omega)$

Grov uppskattning: $\omega_B \approx \omega_c$ ⇒ $\begin{cases} \text{litet } \omega_c \Leftrightarrow \text{långsamt} \\ \text{stort } \omega_c \Leftrightarrow \text{snabbt} \end{cases}$

$$\begin{cases} \varphi_m = \arg G_o(i\omega_c) + 180^\circ \\ |G_o(i\omega_c)| = 1 \end{cases} \Rightarrow |G_c(i\omega_c)| = \frac{|G_o(i\omega_c)|}{|1+G_o(i\omega_c)|} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)}$$

M_p högsta topp ⇒ $M_p = \max(|G_c(i\omega)|)$

$$\Rightarrow M_p \geq \frac{1}{2\sin(\varphi_m/2)} \Rightarrow \begin{cases} \text{litet } \varphi_m \Leftrightarrow \text{mycket svängigt} \\ \text{stort } \varphi_m \Leftrightarrow \text{lite svängigt} \end{cases}$$

Lead "praktisk PD-reglering"

$F_{PD} = K(\tau_D s + 1)$ men derivering funkar inte i verkligheten pga idealiseringarna det bygger på

Använd $\boxed{F_{lead} = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}}$

Hur påverkar Lead-länken?

$\varphi_{max} = \max(\arg(F_{lead}(i\omega))) = \arctan\left(\frac{1-\beta}{2\beta}\right)$ [s. 105]

lead-länken ger en fasförskjutning som maximalt är $\arctan\left(\frac{1-\beta}{2\beta}\right)$ för $\omega = \frac{1}{\tau_D \sqrt{\beta}}$

$\left|F_{lead}\left(\frac{1}{\tau_D\sqrt{\beta}}\right)\right| = K/\sqrt{\beta}$

förstärkningen vid den maximala fasförskjutningen är $K/\sqrt{\beta}$

$F_{lead}(0) = K$, $F_{lead}(\infty) = K/\beta$ * [lim $s \to 0$ samt lim $s \to \infty$]

- Vi kan använda lead-länken för att ...
  - Höja fasen vid frekvensen vi vill ska vara skärfrekvens: ω_{cd} (för att få bättre φ_m)

Hur?

Välj **K** s.a. $|F_{lead}(i\omega_{cd})G(i\omega_{cd})| = 1$ ⇐ ω_{cd} är nya skärfrekvensen!

Välj **β** litet för stor fasavancering ⇒ mindre $\beta \Leftrightarrow$ större φ_m

men för litet β ger praktiska problem ($\beta = 0 \Rightarrow F_{lead} = F_{PD}$)
förstärkningen vid höga frekvenser $\sim 1/\beta$ * , påfrestande för utrustning

Välj $\tau_D = \frac{1}{\omega_{cd}\sqrt{\beta}}$

Varför?

$\arg(F_{lead}(i\omega)) = \arctan\left(\frac{(1-\beta)\tau_D\omega}{1+\beta\tau_D^2\omega^2}\right)$

Vi vill att maximala fasavanceringen ske vid ω_{cd}

Vi vet att φ_{max} uppnås för $\omega = 1/\tau_D\sqrt{\beta}$

Sätt $\omega = \omega_{cd}$ (där vi vill ha φ_{max}) ⇒ $\tau_D = 1/\omega_{cd}\sqrt{\beta}$

Lag "stabil" PI-reglering"

$F_{PI} = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} = 1 + \frac{1}{\tau_I s}$ men F_{PI} har en pol i origo ⇒ ej strikt i VHP stabilitet osäkert

Använd $\boxed{F_{lag} = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}}$

Hur påverkar lag?

$|F_{lag}(0)| = \frac{1}{\gamma}$ förstärker med faktor $1/\gamma$ för små ω ⇒ minskar stationära felet! $\omega \to 0 \Leftrightarrow t \to \infty$

$\arg F_{lag}(i\omega) = -\arctan\left(\frac{(1-\gamma)\tau_I\omega}{\gamma + \tau_I^2\omega^2}\right)$ ger en negativ fasförskjutning $\omega = \omega_c$ ger hur mycket φ_m minskar

Vi kan använda lag för att...
- minska fel!

Hur?

- Välj γ s.a. felet blir litet nog (större $\gamma \Leftrightarrow$ mindre fel) men $\gamma = 0 \Rightarrow F_{lag} = F_{PI} \Rightarrow$ implementations svårigheter
- Välj τ_I litet nog för att fasretarderingen inte ska bli för stor men stort nog för att insvängningen till stationärt reglerfel inte ska vara för långsam (τ_I påverkar hur långt upp i frekvens förstärkningen sträcker sig)

  standardval: $\tau_I = \frac{10}{\omega_c}$

Fasökning i PD, fasminskning i PI – Hur gör jag?

Ta hänsyn till fasminskningen som PI kommer att ge när du designar PD

Om du använder $\tau_I = 10/\omega_c$ gäller $\arg F_{lag} \underset{\text{vid } \omega_c}{\approx} \arg F_{PI} = -5.7°$

⇒ Öka φ_m med 5.7° extra när du designar F_{lead}

Designa Lead-Lag mha Bode [s 115]

1) Räcker P-reg? Uppnås specifikationerna om amplitudskurvan höjs (eller sänks)?

2) Om du önskar ett snabbare system utan att förlora stabilitetsmarginal
LEAD

a) Välj β s.a. $\varphi_{max} = -\arg(G(i\omega_{cd})) - 180° + \varphi_m^{ny} + \delta$
där φ_m^{ny} är den önskade fasmarginalen
o $\delta = 0$ om endast lead ska användas
$\delta > 0$ om lag används dessutom
(ex $\delta = 5.7°$ om $\tau_I = 10/\omega_c$)

b) Välj τ_D s.a. fasavanceringen kommer nära ω_{cd} $\Rightarrow \tau_D = \frac{1}{\omega_{cd}\sqrt{\beta}}$

c) Välj K s.a. $\omega_c = \omega_{cd}$ dvs $|F_{lead}G| = 1$ för $\omega = \omega_{cd} \Rightarrow \frac{K}{\sqrt{\beta}}|G(i\omega_{cd})| = 1$

3) Om du önskar mindre stationärt fel
LAG

a) Välj γ s.a. felet blir litet nog: större $\gamma \Rightarrow$ mindre fel $e \sim 1/\gamma$

b) Välj τ_I s.a. insvängningen är snabb nog (större)
o stabilitetsmarginalen är stor nog (mindre) $\Rightarrow \tau_I = \frac{10}{\omega_c}$

4) Titta på det nya Bodediagrammet för $G_o = FG$, $G_c = \frac{G_o}{1+G_o}$ o S
för att kontrollera om frekvens-specifikationerna är uppfyllda.
Iterera tills du är nöjd.

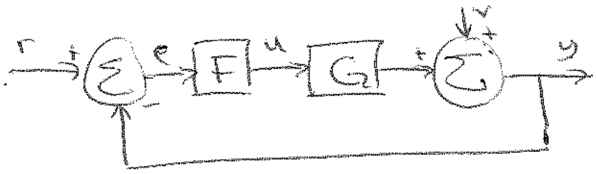
5) Titta på stegsvar för att kontrollera om tids-specifikationerna är uppfyllda.

Känslighetsfunktionen S

Hur känsligt är systemet för störningar?

⇒ Hur påverkas utsignalen $y(t)$ av störningssignalen $v(t)$?

⇒ Titta på överföringsfunktionen från v till y



$$\begin{cases} Y = V + GU \\ U = FE \\ E = R - Y \end{cases} \Rightarrow \quad Y = V + GF(R-Y) \Rightarrow Y = \underbrace{\frac{1}{1+GF}}_{G_{vy}=S} V + \frac{GF}{1+GF} R$$

Vi kallar överföringsfunktionen från v till y för känslighetsfunktionen S

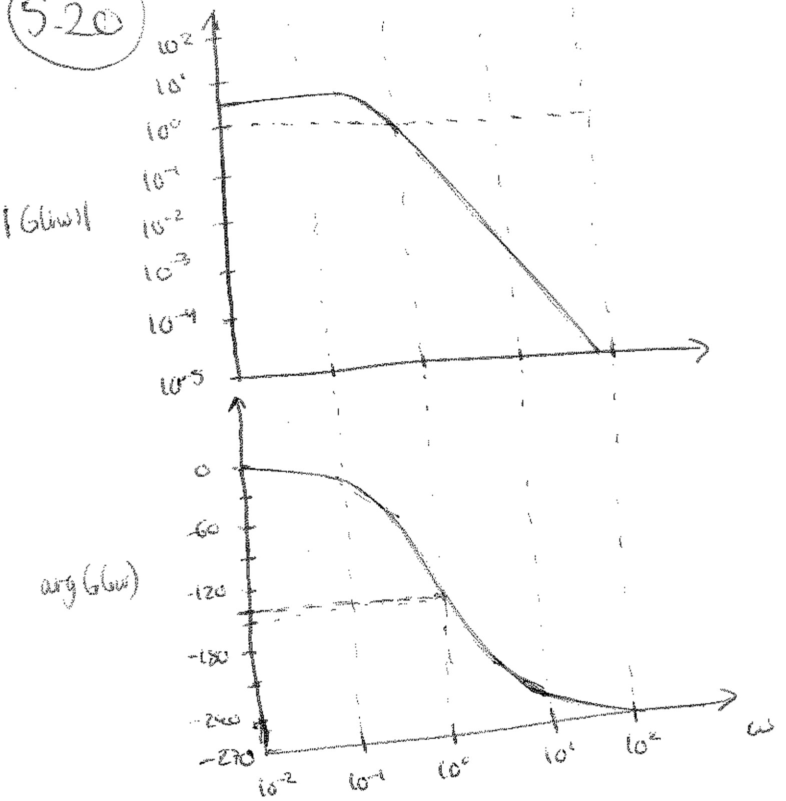
$$S = \frac{1}{1+GF} = \frac{1}{1+G_o}$$

Om $|S| < 1$ så undertrycks störningen

om $|S| > 1$ så förstärks störningen

Om $|S| \to 0$ så har störningen ingen effekt på utsignalen

5.20



- $Y = GU$
- Vi använder regulatorn F s.a $U = F(R-Y)$

a) Hitta G_c s.a. $Y = G_c R$

b) $F=K$. Räkna ut ω_c & φ_m för $K=1$. Är det slutna systemet stabilt för $K=1$?

c) $F=K$. För vilket K är det slutna systemet 2ggr snabbare än för $K=1$?

d) Vad har vi förlorat i (c) jmf med (b)?

e) $F_{lead} = K \dfrac{\tau_D s+1}{\tau_D \beta s+1}$ designa s.a. det slutna systemet är 2ggr snabbare än (b), & har approx. samma överslängning

f) Räkna ut det stationära felet när $R(s)=\frac{1}{s}$.
Vad måste hända med $F(0)$ om vi vill minska stationära felet?

g) $F = F_{lead} F_{lag}$, $F_{lag} = \dfrac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}$ För vilket värde på γ elimineras det stationära felet? Vad är $F(0)$ då?

h) För att undvika problemet i g bestämmer vi oss för att $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0.01$ är ok när insignalen är ett steg.
Välj γ så att det uppfylls. Välj lämpligt τ_I.
Vad kan hända om vi väljer ett olämpligt τ_I?

Lösning

a) $G_c = \dfrac{G_o}{1+G_o} = \dfrac{FG}{1+FG}$ från info: $\begin{cases} Y = GU = GF(R-Y) \\ Y(1+GF) = GFR \\ Y = \dfrac{GF}{1+GF} R = G_c R \end{cases}$

b) ω_c : $|F(i\omega_c)G(i\omega_c)| = 1$ (1) def av ω_c

$F=K \Rightarrow |F(i\omega_c)G(i\omega_c)| = K\,|G(i\omega_c)| = \{K=1\} = |G(i\omega_c)|$ (2)

(1) & (2) $\Rightarrow$ ω_c är oförändrad! Från Bode: $\omega = 10^0 = 1$ rad/s

$\varphi_m = \arg(G(i\omega_c)F(i\omega_c)) + 180° = \arg G(i\omega_c)\big|_{\omega_c=1} + 180° = -130° + 180° = 50°$

Stabilt eftersom $\varphi_m > 0$

c) $\omega_B \sim \frac{1}{T_r}$ för slutna systemets Bode

$\omega_B \sim \omega_c$ för öppna systemets Bode

$\Rightarrow$ Dubbelt så snabbt om ω_c dubblas!

$\omega_{cd} = 2\omega_c$

$\Rightarrow |K\, G(i\omega_{cd})| = 1 \Rightarrow |K\, G(i\omega_c 2)| = K|G(i2\omega_c)| = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{|G(i2\omega_c)|}$

från Bode: $|G(i2\omega_c)| = |G(i2)| = 0.3$

$\Rightarrow K = \frac{1}{0.3} \approx 3.33$

d) $\varphi_m = \arg(G(i\omega_c)) + 180° = -175° + 180° = 5° \Rightarrow$ svängigare system!

e) Lika snabbt som c $\Rightarrow$ behåll ω_c!

Vill ha $\varphi_m^{ny} = 50°$ har $\varphi_m = 5° \Rightarrow \varphi_{max} = \varphi_m^{ny} - \varphi_m = 45°$

$\varphi_{max} = \arctan\left(\frac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}}\right) \Rightarrow \beta = 0.18$

$\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2\sqrt{0.18}} = 1.18$

$|F_{lead}\, G| = K\left|\frac{\tau_D i\omega_c + 1}{\tau_D \beta i \omega_c + 1}\right| \underbrace{|G(i\omega_c)|}_{0.3} = 1 \Rightarrow K = 1.4$

f) $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+FG}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+FG} = \frac{1}{1+KG(0)} = 0.17$

$\lim_{s\to 0} F(s) = K$

$\left\{\begin{array}{l} E(s) = R(s) - Y(s) \\ Y = FGE \end{array}\right. \Rightarrow E = \frac{1}{1+FG} R$

$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ om $F(0) = K = \infty$ e(t) minskar när F(0) ökar.

g) $F(0) = F_{lead}(0)\, F_{lag}(0) = K\, F_{lag}(0) = K/\gamma$

$F(0) = \infty$ för $\gamma = 0$ $\leftarrow$ problem!

h) $\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+KG(0)/\gamma} = 0.01 \Rightarrow \gamma = \frac{0.01\, K G(0)}{1-0.01} = 0.048$

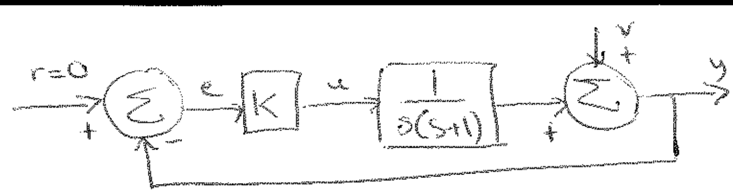
$\tau_I = \frac{1}{\omega_c} = 5$

mindre $\tau_I \Rightarrow \varphi_m$ minskar mer

större $\tau_I \Rightarrow$ stationära värdet nås bara för väldigt små ω

$\Rightarrow$ stora tider $\Rightarrow$ långsamt!

6.1



$v(t) = \sin(t)$

Beräkna absolutbeloppet av känslighetsfunktionen för $\omega = 1$ rad/s som en funktion av K!

Hur ska K väljas om amplituden av y(t) ska va mindre än amplituden av v(t) vid frekvensen $\omega = 1$ rad/s?

<u>Lösning</u>

- Hitta S!

$$S = \frac{1}{1+GK}$$ (från blockschemat) eftersom $Y = SV$

$$G = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s+1)}} = \frac{s(s+1)}{s(s+1)+K}$$

- Absolutbelopp av S för ω

$$|S(i\omega)| = \left| \frac{i\omega(i\omega+1)}{i\omega(i\omega+1)+K} \right| = \left| \frac{i\omega - \omega^2}{i\omega - \omega^2 + K} \right| = \frac{\sqrt{\omega^2+\omega^4}}{\sqrt{\omega^2+(K-\omega^2)^2}} = \frac{\omega\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{\omega^2+(K-\omega^2)^2}}$$

För $\omega = 1$: $$|S(i)| = \frac{1 \cdot \sqrt{1+1}}{\sqrt{1+(K-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+(K-1)^2}}$$ (delsvar)

- Välj K!

Amplituden av v(t) är 1 eftersom $v(t) = \sin(t)$

Vill att: $|S(i)| < 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+(K-1)^2}} < 1$

$$\Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{1+(K-1)^2}$$

$$\Rightarrow 2 < 1+(K-1)^2$$

$$\Rightarrow 1 < (K-1)^2$$

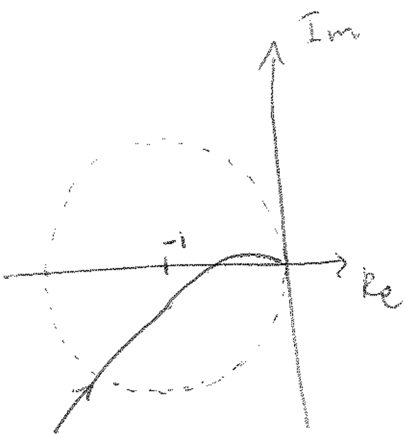
$$\Rightarrow 1 < K^2 - 2K + 1$$

$$\Rightarrow 0 < K(K-2)$$

Om $K > 0 \Rightarrow K-2 > 0 \Rightarrow K > 2$ konventionen är $K > 0$

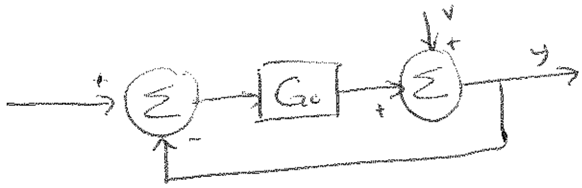
(Om $K < 0 \Rightarrow K < 2$) — Välj $K > 2$

6.3



Nyquistkurva för G_o

Visa, i en figur för vilka frekvenser additativa störningar på utsignalen är förstärkta i meningen att utsignalens amplitud är större än störningens amplitud



Lösning

Titta på känslighetsfunktionen! Utsignalen är förstärkt om $|S(i\omega)|>1$

$$|S(i\omega)| = \frac{1}{|1+G_o(i\omega)|} \qquad \text{eftersom } S = \frac{1}{1+G_o}$$

Vi får att $|S(i\omega)|>1$ om $|1+G_o(i\omega)|<1$

$|G_o(i\omega)|$: Nyquistkurvans avstånd till origo

$|1+G_o(i\omega)|$: Nyquistkurvans avstånd till -1

$\Rightarrow$ $|1+G_o(i\omega)|<1$ om Nyquistkurvan är i den streckade cirkeln i figuren (enhetscirkel med center i -1)