Övning 6 Frekvensbeskrivning & Bode

Frekvensbeskrivning

Vi beskriver våra insignaler som summor av cos & sin med olika frekvenser.

Frekvenssvar:

Sätter $s = i\omega$, $\omega: 0 \to \infty$ $\Rightarrow G(i\omega)$

Kom ihåg Nyquist: vi plottade $G(i\omega)$, $\omega: 0 \to \infty$ i komplexa talplanet

Här plottar vi det som funktion av ω istället!

Linjärt Tidsinvariant System (LTI)

Linjärt: superposition gäller

$u_1 + 2u_2 \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y_1 + 2y_2$ där $u_1 \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y_1$

$u_2 \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y_2$

$\Rightarrow$ linjär kombo av insignaler $\longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow$ linjär kombo av utsignaler

Tidsinvariant: Starttid spelar ingen roll, men hur länge gör det

ex: Positionen på skottkärran är densamma efter 5 timmars arbete, oavsett om jag började jobba 8^{00} eller 12^{00}.

ex ej tidsinvariant: Jag är hemma efter 2 timmar om jag lämnar jobbet vid midnatt, men efter 30 min om jag lämnar vid 17^{00}.

Sinusfunktion som insignal

$u(t) = A \sin(\omega t)$

transient
lösning till homogena diff. ekv. som beror på initialvärdena

Om $G(s)$ är LTI & ~~transienter~~ har försvunnit

$\Rightarrow \quad y(t) = |G(i\omega)| A \sin(\omega t + \phi)$

$\phi = \arg(G(i\omega))$

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau) u(t-\tau)\, d\tau = \int_0^\infty g(\tau) A \sin(\omega(t-\tau))\, d\tau =$$

$$= \mathrm{Im} \int_0^\infty g(\tau) A e^{-i\omega\tau} e^{i\omega t}\, d\tau = \mathrm{Im} \underbrace{\int_0^\infty g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau}_{G(i\omega)} A e^{i\omega t} =$$

$$= \mathrm{Im}\, G(i\omega) A e^{i\omega t} =$$

$G(i\omega) = |G(i\omega)| e^{i \arg(G(i\omega))}$ fr $z = |z| e^{i \arg z}$ komplext tal på polär form

$$= \mathrm{Im}\, |G(i\omega)| A e^{i(\omega t + \arg(G(i\omega)))} =$$

$$= |G(i\omega)| A \underbrace{\mathrm{Im}\, e^{i(\omega t + \phi)}}_{\sin(\omega t + \phi)} = |G(i\omega)| A \sin(\omega t + \phi)$$

$\Rightarrow$ y blir en sinusfunktion med samma frekvens som u, men fasförskjuten med ϕ & förstärkt med $|G(i\omega)|$
(ökad amplitud)

(detsamma gäller om $u = \cos(\omega t)$)

Bode diagram

Vi ritar upp $|G(i\omega)|$ & $\arg(G(i\omega))$ som funktion av ω (i två olika diagram) ← men med samma ω-skala

$|G(i\omega)|$ brukar oftast plottas med logaritmisk skala
vi kallar den för beloppskurva eller amplitudskurva
vanligt att $|G(i\omega)|$ anges i decibel : $20 \log_{10} |G(i\omega)|$

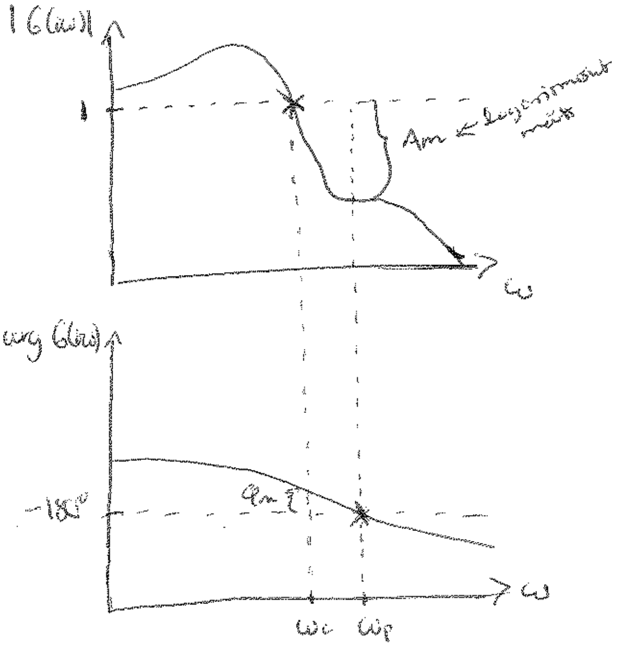
$\arg(G(i\omega))$ kallas faskurva

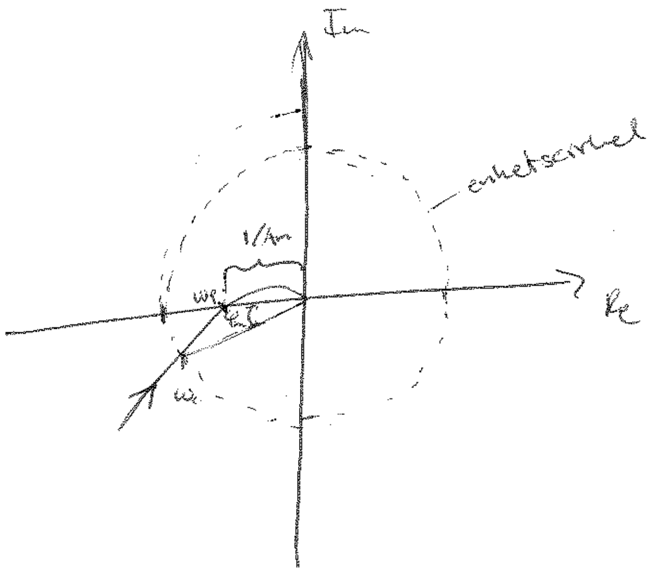
Seriekopplingen gäller!

$\log |G_1(i\omega) G_2(i\omega)| = \log |G_1(i\omega)| + \log |G_2(i\omega)| \Rightarrow$ om $\rightarrow \boxed{G_1} \rightarrow \boxed{G_2} \rightarrow$ kan vi addera amplituder från Bode!

$\arg(G_1(i\omega) G_2(i\omega)) = \arg G_1(i\omega) + \arg G_2(i\omega) \Rightarrow$ arg från Bode kan också adderas!

Bode vs Nyquist





ωc: skärfrekvens

Bode: Där $|G(i\omega)|$ skär 1 $\Rightarrow |G(i\omega)| = 1$

Nyquist: Kurvan skär enhetscirkeln

⇒ om det händer ovanför eller på reella axeln så omsluts -1 i Nyquist

⇓

⇒ om $\varphi_m = 0$ så omsluts -1 ⇒ poler iHHP ⇒ instabilt!

φ_m är ett mått på hur mycket faskurvan kan förskjutas innan det blir instabilt

φ_m: fasmarginal

Bode: Skillnaden mellan -180° & $\arg(G(i\omega_c))$

Nyquist: Vinkeln mellan negativa reella axeln & punkten där kurvan skär enhetscirkeln

ω_p: fasskärfrekvens

Bode: Där $\arg(G(i\omega))$ skär -180°

Nyquist: Där kurvan skär negativa reella axeln

Am: Amplitudsmarginal

Bode: skillnaden mellan 1 & $|G(i\omega_p)|$

Nyquist: Inversa avståndet från origo till punkten där kurvan skär negativa reella axeln

⇒ Om $\frac{1}{A_m} = 1$ så omsluts -1 ⇒ instabilt!

Am är ett mått på hur mycket beloppskurvan kan höjas innan det blir instabilt

[redacted]

Skissa Bodediagram

① Faktorisera $G(s)$

$$G(s) = \frac{K(1+s/z_1)(1+s/z_2)\dots(1+s/z_m)}{s^p(1+s/p_1)(1+s/p_2)\dots(1+s/p_n)}$$

p: antal poler i origo (p kan vara 0)
m: antal nollställen
n: antal poler som inte är i origo

② Beräkna lågfrekvensasymptot

Hur ser G ut för små ω? ⇒ Termerna som dominerar för ω ~~liten~~

för alla ω

$$\begin{cases} \log|G(i\omega)| = \log K - p\log|\omega| + \log\left|1+\frac{i\omega}{z_1}\right| + \dots + \log\left|1+\frac{i\omega}{z_m}\right| - \log\left|1+\frac{i\omega}{p_1}\right| - \dots - \log\left|1+\frac{i\omega}{p_n}\right| \\ \arg G(i\omega) = -p\,90° + \arctan\left(\frac{\omega}{z_1}\right) + \dots + \arctan\left(\frac{\omega}{z_m}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{p_1}\right) - \dots - \arctan\left(\frac{\omega}{p_n}\right) \end{cases}$$

för små ω: $\log|G(i\omega)| = \log K - p\log|\omega|$ (övriga termer → $\log(1)=0$)

$\arg G(i\omega) = -p\,90°$

③ Beräkna högfrekvensasymptot

Hur ser G ut för stora ω? ⇒ Termerna som dominerar för ω **stora**

för stora ω: $\log|G(i\omega)| = (-p+m-n)\log|\omega|$

$\arg G(i\omega) = (-p+m-n)\,90°$

④ Identifiera brytpunkter där asymptoter skär varandra

⇒ $\omega = z_1, z_2, \dots, z_m, p_1, p_2, \dots, p_n$

⑤ Identifiera lutningsförändring på amplitudkurvan

Kurvan ändrar lutning i brytpunkter ⇒ ny asymptot

$\boxed{\text{dekad} = \text{tiopotens}}$

* $\omega = p_i$ (brytpunkt som pol) ⇒ −1 dekad per dekad
* $\omega = z_i$ (brytpunkt som nollställe) ⇒ +1 dekad per dekad

($p\log\omega$ ⇔ p dekad per dekad ⇔ rät linje med lutning p i log-plotten)

⑥ Förankra amplitudkurvan

$|G(i\omega)|$ för något $\omega \neq$ brytpunkt

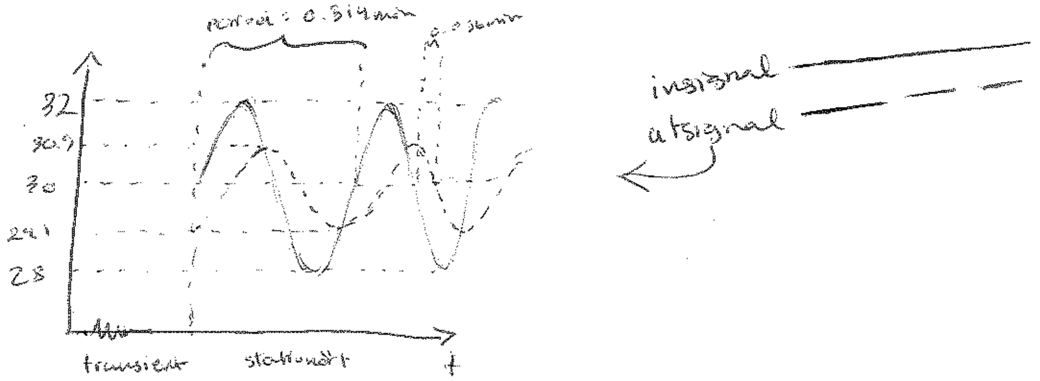
⑦ Beräkna $\arg(G(i\omega))$ för några ω

Sätt in några ω i $\arg G(i\omega)$ ovan

4.1 Kvicksilverstermometer

- Beskrivs som första ordningens LTI system
- Insignal = riktig temperatur
- Utsignal = termometerns angivna temperatur
- Placeras i vätska som har temperatur som varierar som en sinusfunktion

Hitta överföringsfunktionen för termometern!



① Ansätt G som 1:a ordningens linjärt system: $G = \frac{a}{s+b}$

② Insignal = sinus

$u(t) = A\sin\omega t \quad \Rightarrow \begin{cases} y(t) = |G(i\omega)|A\sin(\omega t+\phi) \\ \phi = \arg G(i\omega) \end{cases}$

③ Läs värden från graf för att identifiera $\arg G(i\omega)$ & $|G(i\omega)|$

(i) insignalens period: $T_{in} = 0.314\text{ min} = 18.84\text{s}$

$\Rightarrow \omega_{in} = \frac{2\pi}{T_{in}} = 0.33 \text{ rad/s}$

(ii) utsignalens tidsförskjutning relativt insignal: $\Delta t = -0.056\text{ min} = -3.36\text{s}$

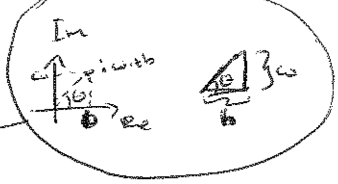
$\Rightarrow \phi = \omega_{in}\Delta t = 0.33\cdot(-3.36) = -1.12\text{ rad}$

(iii) insignalens amplitud: $A = 32-30 = 2°C$

(iv) utsignalens amplitud: $|G(i\omega)|A = 30.9-30 = 0.9°C$

$\Rightarrow |G(i\omega)| = \frac{0.9}{A} = \frac{0.9}{2} = 0.45$

④ Identifiera $|G(i\omega)|$ & $\arg G(i\omega)$ från $G(s)$



$|G(i\omega)| = \left|\frac{a}{i\omega+b}\right| = \frac{|a|}{\sqrt{\omega^2+b^2}}$

$\arg G(i\omega) = \arg\left(\frac{a}{i\omega+b}\right) = \underbrace{\arg(a)}_{0 \text{ för } a>0} - \arg(i\omega+b) \underset{\text{för } b>0}{=} -\arctan(\omega/b)$

⑤ Jmf 3 & 4

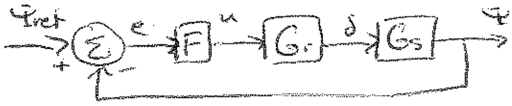
$-\arctan(\omega/b) = -1.12\text{ rad} \Rightarrow \frac{\omega}{b} = \tan(1.12) \Rightarrow b = \frac{\omega}{\tan(1.12)} = \{\omega=\omega_{in}\} \approx 0.16$

$\frac{|a|}{\sqrt{\omega^2+b^2}} = 0.45 \Rightarrow \{a>0\} \Rightarrow a = 0.45\sqrt{\omega^2+b^2} = \{\omega=\omega_{in}\} \approx 0.17$

$\Rightarrow G(s) = \frac{0.17}{s+0.16}$

4.2 a+b Styra skeppet

- vill styra kurs: Ψ
- önskad kurs: Ψ_{ref}
- roder vinkel (det vi kan styra): δ
- vinkel hastighet av skeppet: $\omega = \dot{\Psi}$ (1)
- given diff.ekv för små ω & δ: $\begin{cases} T_1 \dot{\omega} = -\omega + K_1 \delta & (2) \\ T_1 = 100 \\ K_1 = 0.1 \end{cases}$



$F = K \dfrac{1+s/a}{1+s/b}$ $\quad a = 0.02$, $b = 0.05$

$G_r = \dfrac{1}{1+sT_2}$ $\quad T_2 = 10$

G_s ges av (1) & (2)

a) Gör ett Bodediagram för $F G_r G_s$ för $K = 0.5$

b) För vilket K oscillerar systemet med konstant amplitud? Vad är oscillationernas tidsperiod?

a) Hitta G_s

$\Psi(s) = G_s \Delta(s)$ (fr blockdiagrammet)

(1) & (2): $T_1 \ddot{\Psi} = -\dot{\Psi} + K_1 \delta \quad \overset{\mathcal{L}}{\Longleftrightarrow} \quad T_1 s^2 \Psi(s) = -s\Psi(s) + K_1 \Delta(s)$

$\Rightarrow \Psi(s)(T_1 s^2 + s) = K_1 \Delta(s)$

$\Rightarrow \Psi(s) = \underbrace{\dfrac{K_1}{(T_1 s+1)s}}_{G_s} \Delta(s)$

Bestäm $G_0 = F G_r G_s$

$G_0 = K \dfrac{1+s/a}{1+s/b} \dfrac{1}{1+sT_2} \dfrac{K_1}{(T_1 s+1)s} = KK_1 \dfrac{(1+s/a)}{s(1+s/b)(1+sT_2)(T_1 s+1)}$

(1) Faktoriserad form

$G_0 = KK_1 \dfrac{(1+s/a)}{s(1+s/b)(1+s/(1/T_2))(1+s/(1/T_1))} \overset{\text{värden}}{=} \underbrace{\cancel{0.5} \, 0.1}_{0.05} \dfrac{(1+s/0.02)}{s(1+s/0.05)(1+s/0.1)(1+s/0.01)}$

(2) Lågfrekvensasymptot

$\lim_{s \to 0} G_0 = \lim_{s \to 0} \dfrac{0.05}{s}$ (s dominerar över s^2 för små s)

$|G_0(i\omega)|_{lf} = \left| \dfrac{0.05}{i\omega} \right| = \dfrac{0.05}{\omega}$

$\arg(G_0(i\omega))_{lf} = -90°$

(3) högfrekvensasymptot

$$\lim_{s\to\infty} G_o = \lim_{s\to\infty} 0.05 \frac{s/0.02}{s^4/(0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.01)} = \lim_{s\to\infty} \frac{0.05\cdot 0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.01}{s^3 \cdot 0.02} = \lim_{s\to\infty} \frac{0.000125}{s^3}$$

$$|G_o(i\omega)|_{hf} = \frac{0.000125}{|-i\omega^3|} = \frac{0.000125}{\omega^3}$$

$$\arg(G_o(i\omega))_{hf} = -270^\circ$$

(4) brytpunkter

$$\omega = \begin{cases} 0.02 \\ 0.05 \\ 0.1 \\ 0.01 \end{cases}$$

(5) bidrag

noll	+1
pol	-1
pol	-1
pol	-1

punkt	0	0.01	0.02	0.05	0.1
typ	start	pol	noll	pol	pol
bidrag	-1	-1	+1	-1	-1
lutning	-1	-2	-1	-2	-3

för arg $G(i\omega)_{lf}$ följer från 1 pol i origo

(6) Förankring

för lågfrekvens gäller: $|G_o(i\omega)|_{lf} = \frac{0.05}{\omega}$

välj litet ω ex: $\omega = 0.005 \Rightarrow |G_o(i\omega)| = 10$

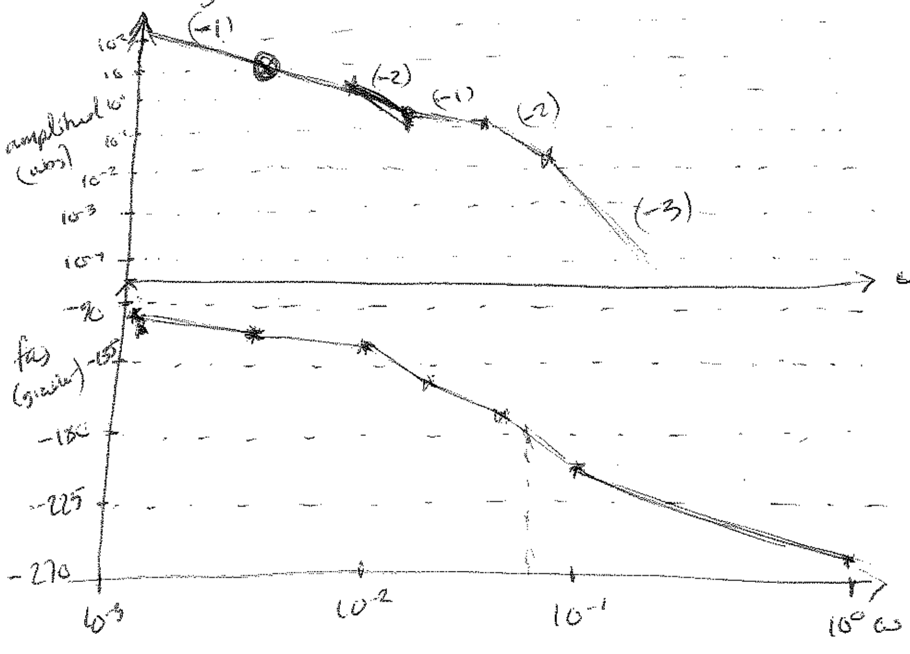
(7) Punkter på faskurva

ω	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	1
$\arg G(i\omega)$	-111°	-125°	-142°	-172°	-201°	-262°

$$G_o(i\omega) = 0.05(1+i\omega/0.02)/(i\omega(1+i\omega/0.01)(1+i\omega/0.05)(1+i\omega/0.1))$$

$$\arg G_o(i\omega) = \underbrace{\arg(0.05)}_{0} + \arg\left(1+\frac{i\omega}{0.02}\right) - \underbrace{\arg(i\omega)}_{90^\circ} - \arg\left(1+\frac{i\omega}{0.01}\right) - \arg\left(1+\frac{i\omega}{0.05}\right) - \arg\left(1+\frac{i\omega}{0.1}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\arg(Re+Im\,i) \\ = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right)\end{array}\right\} = \arctan\left(\frac{\omega}{0.02}\right) - 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{0.01}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{0.05}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{0.1}\right)$$



OBS! ej korrekta värden (Försök till skiss men misslyckades med lutningen)

b) Öker K till oscilleringen

Hur påverkar K Bode?

$\Rightarrow$ Amplituden multipliceras
Fasen oförändrad

{från Nyquistövningen}

När börjar ett system svänga? (självsvängning)

För $\omega = \omega_c$ om $\varphi_m = 0$ & $A_m = 1$ (Nyquistkurvan skär -1)

ω_c: $|G(i\omega_c)| = 1$

ω_p: $\arg G(i\omega_p) = -180°$

$\varphi_m = 0$ & $A_m = 1$ för $\omega_c = \omega_p$ (abs=1 samtidigt som arg=−180°)

ω_p se Bodeskiss eller räkna $\arg G(i\omega_p) = -180°$

$\Rightarrow \omega_p \approx 0.06$ rad/s

Tips! se Bode för ungefärligt ω_p, testa ditt ω_p i beräkning som dubbelkoll

självsväng om $\omega_c = \omega_p \Rightarrow |KG(i\omega_p)| = 1$

Hitta K:

För $K = 0.5$ se Bode $\Rightarrow |0.5\,G(i\omega_p)| = 0.24$

$\Rightarrow |G(i\omega_p)| = 0.48$

vill $K|G(i\omega_p)| = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{|G(i\omega_p)|} = \frac{1}{0.48} = 2.1$

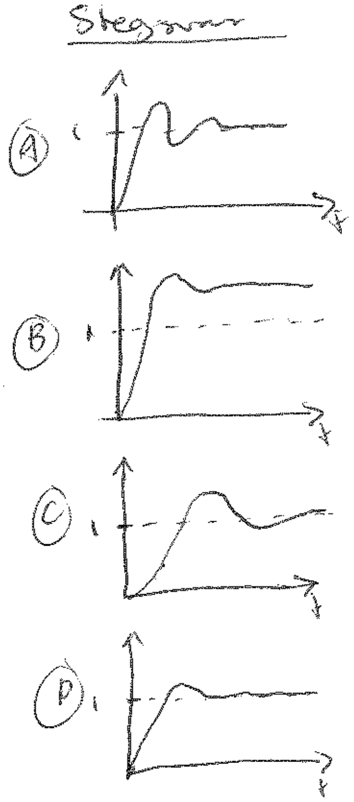
Period

T för oscillationen dvs ω_c

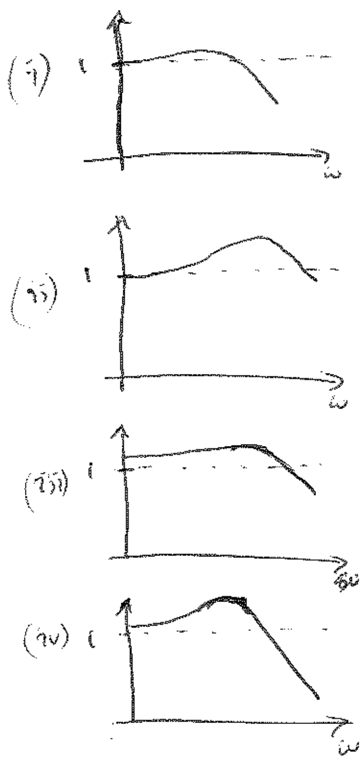
$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{0.06} \approx 105\text{ s}$

4.4 Para ihop stegsvar o Bode amplitudkurvor

Stegsvar



Bode



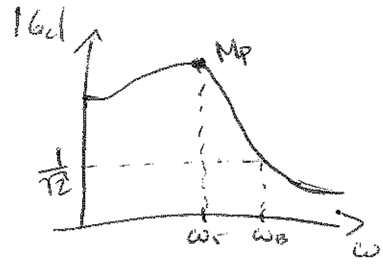
Egenskaper

Resonanstopp M_p
relaterar till dämpning
höjd relativt $|G_c(0)|$

Resonansfrekvens ω_r
frekvens för M_p

Bandbredd: ω_B
frekvens där $|G_c(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\omega_B \sim \frac{1}{T_r}$



Observationer

* B har statiskt fel
* C är långsammare T_r annars är A o C lika (översläningsamplitud)

Bode

Statiskt fel $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$ undersök $|G_c(s=0)|$

$|G_c(0)| = 1$ för i, ii o iv

$|G_c(0)| > 1$ för iii

$\Rightarrow$ iii o B hör ihop

Översläng ~ Resonanstopp = högsta höjd relativt $|G_c(0)|$

ii o iv har lika resonanstopp (men för olika frekvens)

A, C $\Leftrightarrow$ ii, iv

$T_r(C) > T_r(A) \Rightarrow \omega_B(C) < \omega_B(A)$

från Bode $\omega_B(iv) < \omega_B(ii)$

$\Rightarrow$ C – iv, A – ii

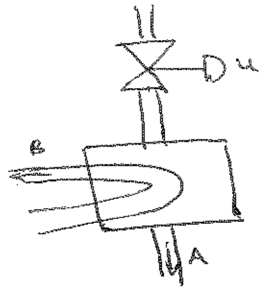
Kvar: D – i : liten översläng $\Leftrightarrow$ låten resonanstopp

$\omega_B(i) \approx \omega_B(iii)$ Bode

$T_r(B) \approx T_r(D)$ steg

Verkar stämma!

5.2 [a+b]



Värmeväxlare

Utflödes temperatur : $\ominus$ (utsignal)
i vätska A

kontrollerar flödet B
genom att flytta valvet

valvets position : u (insignal)

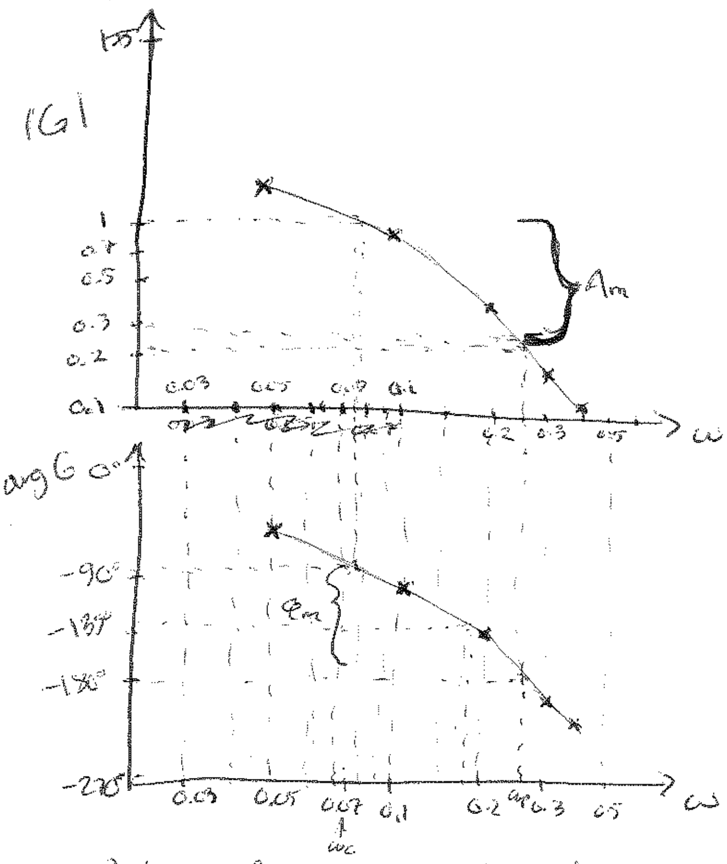
$u = A\sin\omega t$

ω [rad/s]	förstärkning	fas skift
0.05	1.37	$-67°$
0.1	0.8	$-106°$
0.2	0.34	$-153°$
0.3	0.18	$-185°$
0.4	0.11	$-210°$

a) Rita ett Bode diagram

b) Vad är största ω_c som kan uppnås när P-regulator används om $\varphi_m \geq 50°$

a)



Använd värdena i tabellen

b) P-regulatorn påverkar bara amplitudkurvan
φ_m förändras eftersom ω_c flyttas när amplitudskurvan förstärks
Undersök φ_m!

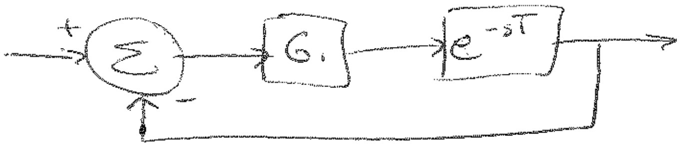
$\varphi_m = \arg G(i\omega_c) - (-180°) = \arg G(i\omega_c) + 180°$

vill att : $\varphi_m \geq 50° \Rightarrow \arg G(i\omega_c) + 180° \geq 50° \Rightarrow \arg G(i\omega_c) \geq -130°$

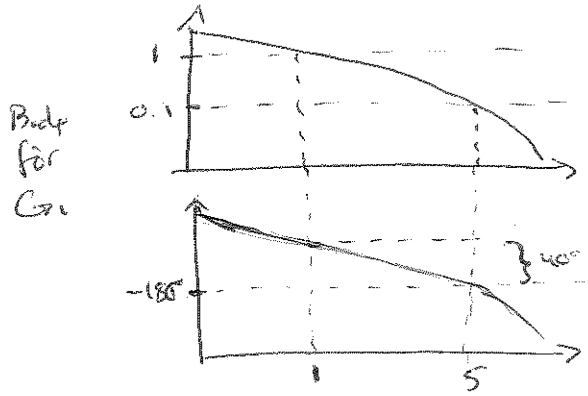
fasen ändras inte
hitta vilket ω som
$\arg G(i\omega)$ är $-130°$

$\arg G(i\omega) = -130°$ för $\omega \approx 0.15$ rad/s (fr plott)
$\arg(G(i\omega)) \geq -130°$ för $\underline{\omega \leq 0.15 \text{ rad/s}}$

5.8a



• G_1 har inga poler i HHP



Bestäm värden på T som ger ett stabilt slutet system!

Hur påverkar tidsfördröjningen Bode?

belopp: $|e^{-i\omega T}| = 1$ ingen påverkan

fas: $\arg(e^{-i\omega T}) = -\omega T$ minskar fasen med ωT

Stabilt? Om $\varphi_m > 0$

Bode $\omega_c = 1$ rad/s

$\varphi_m = 40°$

Nytt φ_m

All fas ändras med $-\omega T$

$\Rightarrow \varphi_m^{ny} = \varphi_m^{gammal} - \omega_c T$

↑ ω vid fasmarginalen

$\varphi_m^{ny} = 40° - 1 \frac{rad}{s} T = (0.698 - T)$ rad

jmf med kriteria

$\varphi_m^{ny} = 0.698 - T > 0 \Rightarrow T < 0.698$ s

Extra

Läsa ut Am ur Bode

Skala på amplitudskurva	Hitta Am
Linjär $\lvert G(i\omega)\rvert$	$\log(A_m) = \log 1 - \log(\lvert G(i\omega_p)\rvert) = \log\left(\frac{1}{\lvert G(i\omega_p)\rvert}\right)$ $A_m = \frac{1}{\lvert G(i\omega_p)\rvert}$ $\lvert G(i\omega_p)\rvert$ läses från diagram
Logaritmisk $\log(\lvert G(i\omega)\rvert)$	$A_m = 10^{\log(1) - \log(\lvert G(i\omega_p)\rvert)} = 10^{-\log(\lvert G(i\omega_p)\rvert)}$ $\log(\lvert G(i\omega_p)\rvert)$ läses från diagram
Decibel $20\log(\lvert G(i\omega)\rvert)$	$20\log(A_m) = 20(\log 1 - \log(\lvert G(i\omega_p)\rvert))$ $A_m = 10^{\frac{1}{20}(-20\log(\lvert G(i\omega_p)\rvert))}$ $20\log(\lvert G(i\omega_p)\rvert)$ läses från diagram