Övning 5

$\boxed{3.14,\ 3.16,\ (3.15)}$

Nyquist: använd öppna systemets poler för att dra slutsatser om slutna systemets poler

$\boxed{\text{Argumentvariationsprincipen + poler} \Rightarrow \text{Nyquist}}$

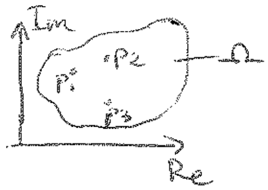
Argumentvariationsprincipen [A.3 s. 234]

f är en analytisk funktion så när som på ett ändligt antal poler i ett öppet område Ω

↑ gränserna/kanterna ingår inte i Ω

Analytisk

$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ existerar



γ är en kurva som omsluter alla poler o nollställen enkelt (med ett varv)

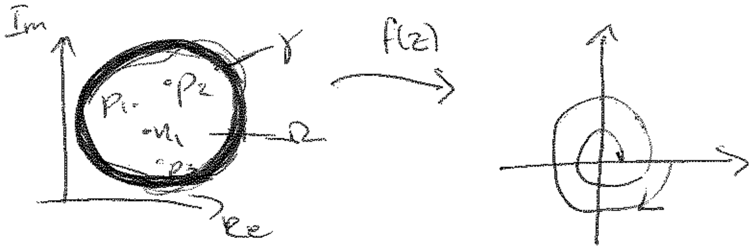
Det gäller att

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \operatorname{var}_{\gamma} \arg f(z)$$

som omsluts av γ → N = antal nollställen → P = antal poler

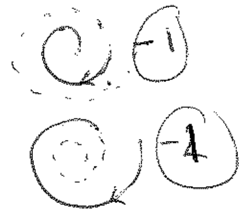
$\operatorname{var}_{\gamma} \arg f(z)$? γ är kurvan ~~som~~ f(z) som fås när z antar värden på kurvan γ ⇒ hur mycket varierar argumentet på den nya kurvan? ⇒ varv runt origo

Funkar det?



$N - P = 1 - 3 = -2$

varv kurvan går runt origo (moturs)



$-1 + (-1) = -2$

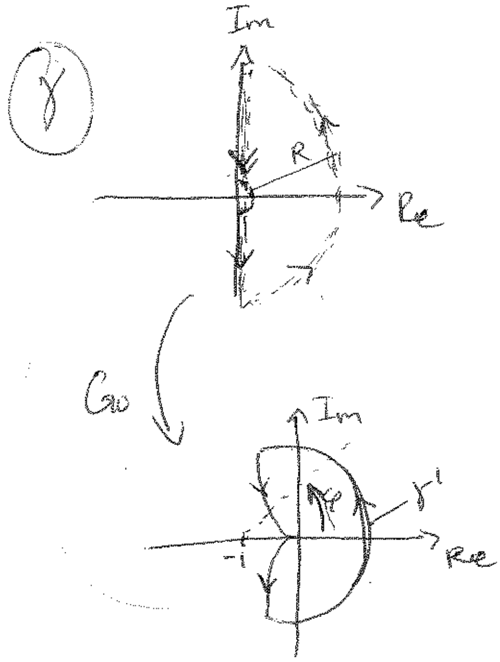
Slutna systemet

$$G_c = \frac{G_o}{1+G_o}$$

poler: $1+G_o=0$

Vi vill veta om poler finns i HHP $\Rightarrow$ har $1+G_o$ nollställen i HHP?

Använd argumentvariationsprincipen med γ som omsluter HHP!



För $R \to \infty$ (radien)
så täcker γ hela HHP
(dock ej imaginära-axeln)

variation i argumentet till $1+G_o$ =
= variation i vinkeln φ

Vi har att: $N-P = \frac{1}{2\pi} \operatorname{var}_{\gamma} \arg(1+G_o)$ = antal gånger $1+G_o(\gamma)$ omsluter 0

$\Updownarrow$ Använd $\operatorname{var}_{\gamma} \arg(G_o)$ i stället

$N-P$ = antal gånger γ' omsluter -1

N = nollställen till $1+G_o$ i HHP $\Rightarrow$ poler till G_c i HHP, P = poler till $1+G_o$ i HHP

Nyquist kriteriet
Antal poler i HHP till det återkopplade systemet =
= antal poler i HHP hos G_o + varv som γ' omsluter -1

OBS! poler till $1+G_o$ = poler till G_o

ex: $G_o = \frac{a}{s+b} \Rightarrow 1+G_o = 1+\frac{a}{s+b} = \frac{s+b+a}{s+b}$

i båda fallen är polerna givna av $s+b=0$
dvs $-b$.

Nyquistkurvan: Avbildningen av Im-axeln i G_o
$\Rightarrow$ $G_o(i\omega)$ $\omega: 0 \to \infty$

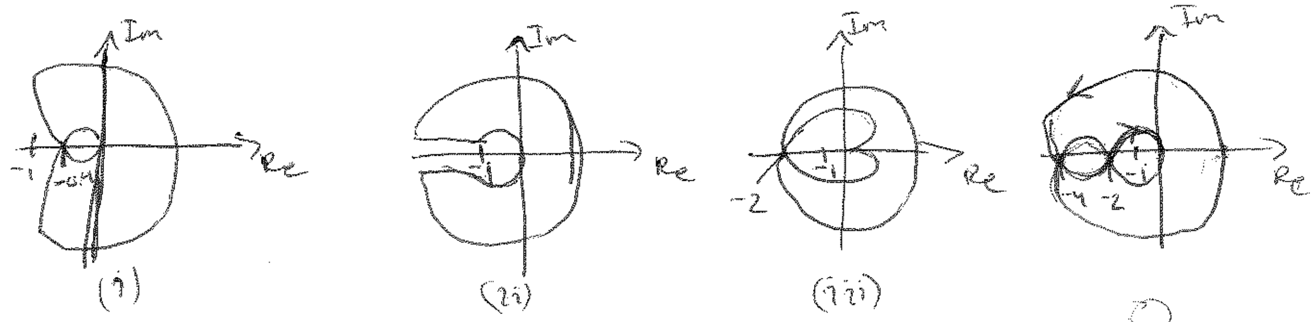
Nyquistdiagram: Avbildningen av γ i G_o

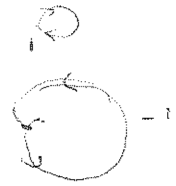
Notera skillnad!

(3.14)

- $K=1$
- $G_0 = KG = G$
- Nyquistdiagram över $G_0 \rightarrow$ (i), (ii), (iii) eller (iv)
- G har inga poler i HHP

a) Är G_c stabilt för alla Nyquistdiagram?





- G_c stabilt om inga poler i HHP
- P_c : antal poler i HHP för slutna
  P_0 : antal poler i HHP för G_0
- $P_c = P_0 +$ varv γ' omsluter -1
- $G_0 = G$, G har inga poler i HHP $\Rightarrow P_0 = 0$

$\Rightarrow P_c =$ varv γ' omsluter -1

$\Rightarrow$ Stabilt om γ' inte omsluter -1

i) γ' omsluter inte -1 $\Rightarrow$ stabilt

ii) γ' omsluter inte -1 $\Rightarrow$ stabilt

iii) γ' omsluter -1 2 gånger $\Rightarrow$ instabilt

iv) γ' omsluter -1 $\Rightarrow$ stabilt (γ' är ett 'C' som trycks ihop)
1 gång medsols 1 gång motsols eller 0 ggr

b) Om $K>0$, för vilka K-värden är G_c stabilt i de olika fallen?

Hur påverkas γ' av K?

$\gamma'(s) = G_0(s \text{ längs } \gamma) = KG(s \text{ längs } \gamma)$

Belopp: $|\gamma'(s)| = |KG| = K|G|$ skalas med faktor K

vinkel: $\arg(KG) = \underbrace{\arg(K)}_{\substack{\arg(\text{konst}>0)=0 \\ \text{(pos reaxeln)}}} + \arg(G) = \arg(G)$ oförändrad

$\Rightarrow K$ förstorar/förminskar kurvan

i) γ' omsluter värdena $-0.4 \to 0$ för $k=1$

$\Rightarrow$ γ' omsluter -1 om $K \cdot 0.4 = 1$ eller större

$\Rightarrow$ Stabilt om $K \cdot 0.4 < 1 \Rightarrow K < 5/2$

ii) Oavsett hur γ' skalas om så omsluts aldrig någon punkt på negativa reella axeln

$\Rightarrow$ Stabilt för alla val av K

iii) γ' omsluter inte -1 om vi skalar ned den med $1/2$ (den omsluter nu $0 \to -2$)

$\Rightarrow$ Stabilt om $K < 1/2$

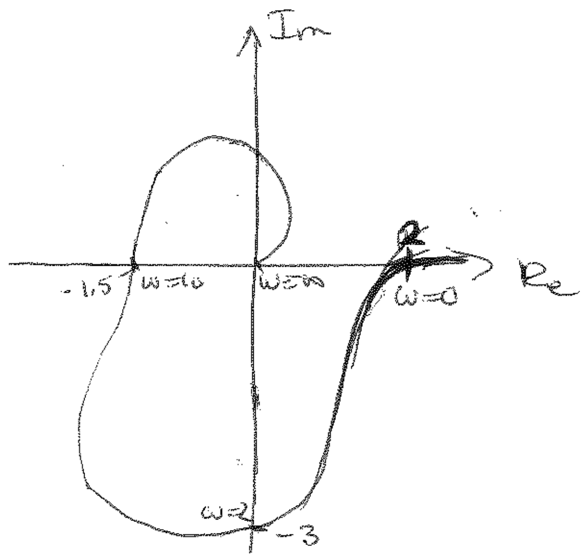
iv) γ' omsluter -1 om ~~-1~~ hamnar i den yttre loopen (i C:et)

Det händer om γ' skalas om med $\frac{1}{4} \leq K \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Stabilt om $K < \frac{1}{4}$ eller $K > \frac{1}{2}$

(3.16) $G(s)$ är asymptotiskt stabil $\Rightarrow$ poler strikt i VHP

Nyquist



a) För vilka $K>0$ är det slutna systemet asymptotiskt stabilt?

b) Bestäm statiska felet e som funktion av K om referenssignalen är ett steg

c) Vi använder I-regulator istället! För vilka $K_I>0$ är det slutna systemet stabilt?

a) Förenklat Nyquist 8.8

Om G_o inte har poler i HHP så är det slutna systemet insignal-utsignal stabilt precis då punkten -1 ligger till vänster om γ', när denna genomlöps från $\omega=0$ till ∞

• Vi antar att insignal-utsignal stabilt $\Leftrightarrow$ asymptotiskt stabilt (och i den här kursen) pga propra funktioner

$\Rightarrow$ Hitta K så att omskalade γ' ligger helt till höger om -1

• Den yttersta delen av γ' är nu i -1.5

$\Rightarrow K\cdot 1.5 = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 2/3$ skalar om så att kurvan ligger på ~~höger om~~ -1

$\Rightarrow K < 2/3$

b) Vi kan använda slutvärdessatsen om G_c är stabilt

(a) gav oss att G_c är stabilt för $K < 2/3$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

- $E(s) = R(s) - Y(s)$
- $Y(s) = KG\,E(s)$

$$\Rightarrow E(s) = R(s) - KG\,E(s)$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+KG} R(s)$$

$R(s) = \frac{1}{s}$ (steg!) $\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+KG}\frac{1}{s}$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+KG} = \frac{1}{1+KG(0)}$$

Från Nyquist har vi $G(\omega=0) = 2$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+2K} \quad \text{för } K < 2/3$$

c) Hur påverkas γ' av K/s?

$$\gamma'(s) = G_o(s \text{ längs } \gamma) = \frac{K}{s} G(s \text{ längs } \gamma)$$

Belopp: $|\gamma'(s)| = \left\{ \begin{matrix} s = i\omega \\ \omega \geq 0 \end{matrix} \right\} = \left|\frac{K}{i\omega}\right| |G(i\omega)| = \left|\frac{K}{\omega}\right| |G(i\omega)|$

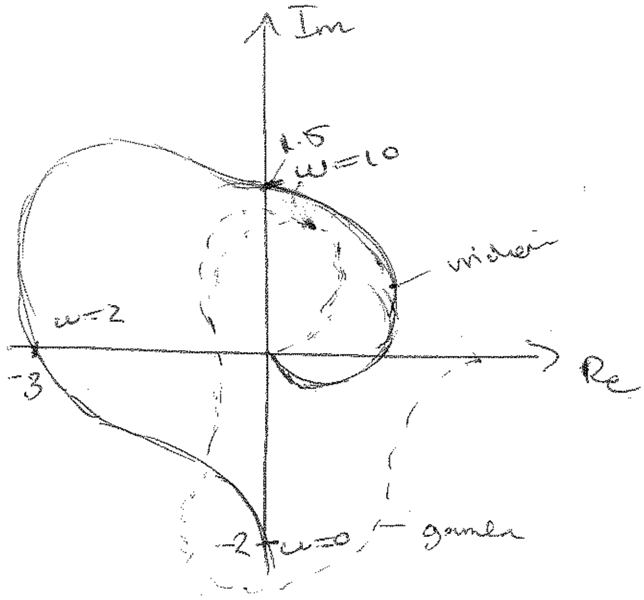
annars är $s=\infty$ längs γ

skalar om med $\left|\frac{K}{\omega}\right|$

Vinkel: $\arg\left(\frac{K}{i\omega} G(i\omega)\right) = \underbrace{\arg K}_{0} - \underbrace{\arg(i\omega)}_{\text{pos Im} \to \frac{\pi}{2}} + \arg(G) = \arg(G) - \frac{\pi}{2}$

vrider kurvan med $-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 90°$ medurs

Vrid kurvan 90° medurs



Ny yttersta punkt: $\omega=2$

Skalning: $|\gamma'| = \left|\frac{K}{\omega}\right| |G(i\omega)|$

vi vill att punkten där $\omega=2$ ska vara till höger om -1

$\Rightarrow$ sätt in $\omega=2$ i skalning

$|\gamma'| = \left|\frac{K}{2}\right| |G(i2)| = \left|\frac{K}{2}\right| |-3|$

$= \frac{3}{2}K$

om $|\gamma'|<1$ så är kurvan till höger $\Rightarrow \frac{3}{2}K<1$

$\Rightarrow K < 2/3$

3.15 a Rita Nyquist kurvan för $G = \frac{1}{s}$

• Avbildningen av Im-axeln (positiva) $\Rightarrow s = i\omega \quad \omega \geq 0$

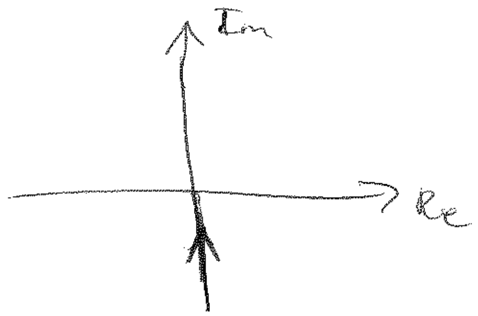
$$G = \frac{1}{i\omega}$$

~~abs~~ belopp: $|\gamma'| = |G| = \left|\frac{1}{i\omega}\right| = \frac{1}{\omega}$

$\left(\arg\frac{i}{\omega} = \arg i - \underbrace{\arg\omega}_{0}\right)$

vinkel: $\arg\gamma' = \arg G = \arg\frac{1}{i\omega} = \arg \underbrace{\frac{-i}{\omega}}_{\text{negativa Im-axeln}} = -90°$

$\omega: 0 \to \infty \Rightarrow |\gamma'|: \infty \to 0$

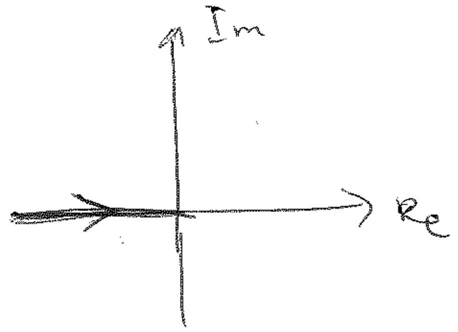


• vi vill följa negativa Im-axeln från belopp ∞ till belopp 0
dvs ~~på~~ $\to$ 0:

b) $G = \frac{1}{s^2} \Rightarrow G = \frac{1}{-\omega^2} = \frac{-1}{\omega^2}$

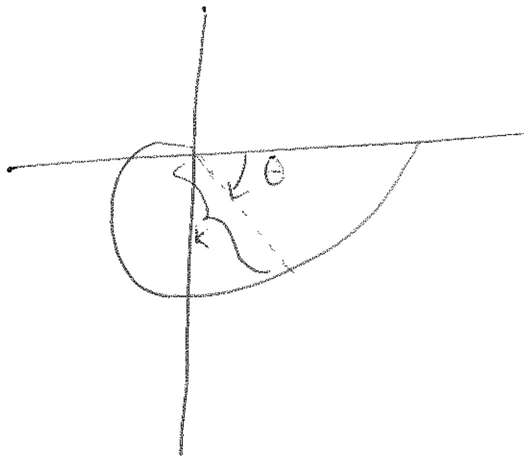
$|\gamma'| = \frac{1}{\omega^2}$ $\quad$ $\arg\gamma' = \arg(\text{negativt reellt}) = -180$

$\omega: 0 \to \infty \Rightarrow |\gamma'|: \infty \to 0$



• vi vill följa negativa reella axeln från belopp ∞ till belopp 0
dvs $-\infty \to 0$

Tillägg 3.15



$K = |G(i\omega)|$

$\theta = \arg(G(i\omega))$