Övning 3 Relativ dämpning & Rotort [3.2, 3.5a, 3.6a,d]

Relativ dämpning

2:a ordningens system utan nollställen: $G(s) = \frac{b}{s^2+as+b}$

variabelbyte: $\omega_0 = \sqrt{b}$ $\Rightarrow G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$

$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{b}}$

poler: $s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2=0$

$\{pq\} \Rightarrow s = -\omega_0\zeta \pm \sqrt{\omega_0^2\zeta^2-\omega_0^2} = \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1})$

om $\zeta<1 \Rightarrow$ $(\zeta^2-1)<1 \Rightarrow$ komplexa poler

skriv: $s = \omega_0(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})$

ω_0: avstånd till origo $|s-0|$

gör live

$|s-0| = |s| = |\omega_0(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2})| = \sqrt{Re^2+Im^2} =$

$= \sqrt{\omega_0^2\zeta^2+\omega_0^2(1-\zeta^2)} = \sqrt{\omega_0^2} = |\omega_0| = \omega_0$ för $(\omega_0>0)$

- större $\omega_0 \Rightarrow$ större avstånd till origo $\Rightarrow$ snabbare system
  ← övning 1

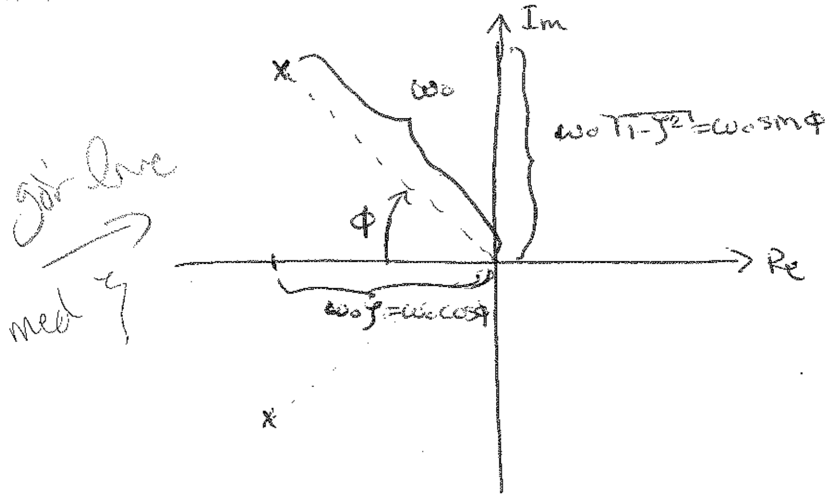
ζ: relativ dämpning

gör live

för $\zeta = \cos\phi \Rightarrow s = \omega_0(-\cos\phi \pm i\sin\phi)$

$\frac{|Im|}{|Re|} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\phi$

- större $\zeta = \cos\phi \Rightarrow$ mindre $\phi \Rightarrow$ mindre $\tan\phi \Rightarrow$ bättre dämpat



X: poler

$s = \omega_0\left(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right)$

$\zeta = \cos\phi$

Rotort

Plott av <u>polernas lägen</u> som funktion av K
$\underbrace{}_{\text{för det slutna systemet}}$

Varför? Om vi vill undersöka hur polernas läge beror på K_P, K_I för en PID-regulator

① Ta fram $G_c(s)$ (överföringsfunktionen för det slutna systemet)

② Identifiera $Q(s)$ & $P(s)$ så att $P(s) + KQ(s) = 0$
Där $P(s) + KQ(s)$ är nämnaren till G_c

~~gradtal hos P(s) → n startpunkter → n−m asymptoter~~
~~m gradtal hos Q(s) → m ändpunkter~~

m = gradtal hos $Q(s)$ $\qquad n \geq m$ (annars byt $P \rightleftharpoons Q$ & sätt $K = 1/K$)
n = gradtal hos $P(s)$

③ Hitta startpunkter $K = 0$ (kryss)
$\Rightarrow P(s) = 0$: s där $P(s) = 0$ är startpunkter
det finns n startpunkter (gradtalet)

④ Hitta ändpunkter $K \to \infty$ (ring)
$\Rightarrow Q(s) = 0$: s där $Q(s) = 0$ är ändpunkter
det finns m ändpunkter

⑤ Antal <u>asymptoter</u>: $n - m$ — om $n > m$: grenar utan ändpunkt, går mot ∞; kurvor som rotorten närmar sig för $s \to \infty$

⑥ Skärningspunkt: $\dfrac{\sum \text{startpunkter} - \sum \text{ändpunkter}}{n-m}$

⑦ Riktningar: $\dfrac{\pi}{n-m} + 2k\dfrac{\pi}{n-m} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1)$

$$\left[\; \frac{P(s)}{Q(s)} = -K \iff (s - \text{skärningspunkt})^{n-m} = -K \right.$$
$$\left. \arg(s - \text{skärningspunkt}) = \frac{\pi}{n-m} + 2k\frac{\pi}{n-m} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1) \;\right]$$

(8) Skärning med Imaginära axeln

$s = i\omega$ ⇒ lös för reella värden av ω (om ω är imaginär är s reell alltså inte på imaginära axeln)
$P(s)+KQ(s)=0$ & $K \geq 0$

(9) Bestäm vilka delar av reella axeln som tillhör rotorten

[3.2 s 67] De delar av reella axeln som har ett udda antal reella start- & ändpunkter till höger

(10) Rita rotorten!

3.2 Tanksystemet från övning 2

$$G_c = \frac{2F}{s(1+5s)+2F}$$

a) $F=K=1$: vad är polerna för det slutna systemet?

$$s(1+5s)+2=0$$

$$5s^2+s+2=0$$

$$s^2+\frac{1}{5}s+\frac{2}{5}=0$$

{pq} $$s = -\frac{1}{10} \pm \sqrt{\frac{1}{100}-\frac{2}{5}} = \frac{-1 \pm i\sqrt{39}}{10} = -0.1 \pm i\sqrt{0.39}$$

b) $F = K_P + K_D s$, $K_P=1$: hur kan vi välja K_D om vi vill att den relativa dämpningen ζ för det slutna systemets ska bli större än $\frac{1}{\sqrt{2}}$

karaktäristiska ekvationen:

$$s(1+5s)+2(1+K_D s)=0$$

$$5s^2+(1+2K_D)s+2=0$$

$$s^2+\frac{(1+2K_D)}{5}s+\frac{2}{5}=0$$

jmf med $s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2=0$

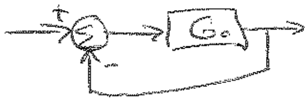
$$2\zeta\omega_0 = \frac{1+2K_D}{5} \Rightarrow \zeta = \frac{1+2K_D}{10\omega_0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{(1+2K_D)\sqrt{5}}{10\sqrt{2}}$$

vi vill: $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{(1+2K_D)\sqrt{5}}{10\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow K_D > \left(\frac{10}{\sqrt{5}}-1\right)\frac{1}{2} \approx 1.7$$

$\boxed{3.5a}$ Rita rotort map K för 

där $G_0(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$

För vilka K är systemet stabilt?
Vilka slutsatser om stegsvaret kan dras från rotorten?

① Hitta G_c : från blockdiagrammet $G_c = \frac{G_0}{1+G_0}$

$$\Downarrow$$

$$Y = G_0 U$$
$$U = R - Y$$
$$Y = G_0(R - Y)$$
$$Y(1 + G_0) = G_0 R$$
$$Y = \frac{G_0}{1+G_0} R$$

$$G_0 = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)} \Rightarrow G_c = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3) + K(s+2)}$$

② $P(s) + KQ(s) = \underbrace{s(s+1)(s+3)}_{P} + K\underbrace{(s+2)}_{Q}$

kontroll: $n \geq m$? $n = 3$, $m = 1$ $3 \geq 1$ ok!

③ startpunkter
$K = 0 \Rightarrow P(s) = 0$: $P(s) = s(s+1)(s+3)$
$s = 0$, $s = -1$, $s = -3$

④ ändpunkter
$K \to \infty \Rightarrow Q(s) = 0$: $Q(s) = s+2$
$s = -2$

⑤ antal asymptoter: $n - m = 3 - 1 = 2$

⑥ skärningspunkt : $\frac{1}{n-m}(\Sigma\,\text{start} - \Sigma\,\text{änd}) = \frac{1}{2}((0 + (-1) + (-3)) - (-2)) = \frac{1}{2}(-4+2) = -1$

⑦ riktningar : $\frac{\pi}{n-m} + 2k\frac{\pi}{n-m}$ $k = 0, 1, 2, \ldots (n-m-1)$

$$n - m - 1 = 3 - 1 - 1 = 1 \Rightarrow k = 0, 1$$

$k=0$: $\frac{\pi}{2}$ $k=1$: $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

(8) Skärning med Im-axeln

$$s(s+3)(s+1)+K(s+2)=0$$

$$s^3+4s^2+(3+K)s+2K=0$$

$s=i\omega \Rightarrow -i\omega^3-4\omega^2+(3+K)i\omega+2K=0$

$$(2K-4\omega^2)+((3+K)\omega-\omega^3)i=0$$

Im: $(3+K-\omega^2)\omega=0$

Re: $2K-4\omega^2=0$

$\boxed{\text{Im}}$ $\underline{\omega=0}$ eller $(3+K-\omega^2)=0$

$$\Downarrow$$

$$\omega^2=3+K$$

$$\Downarrow$$

$\underline{\omega=\sqrt{3+K}}$ eller $\underline{\omega=-\sqrt{3+K}}$

$\boxed{\text{Re}}$ $\omega^2=\frac{K}{2} \Rightarrow \underline{\omega=\sqrt{K/2}}$ eller $\omega=-\sqrt{K/2}$

matcha! $\omega=0 \Rightarrow K=0$ ok! $(K\geq 0)$

$\omega=\sqrt{3+K}=\sqrt{K/2} \Rightarrow 6+2K=K \Rightarrow K=-6<0$ inte ok!

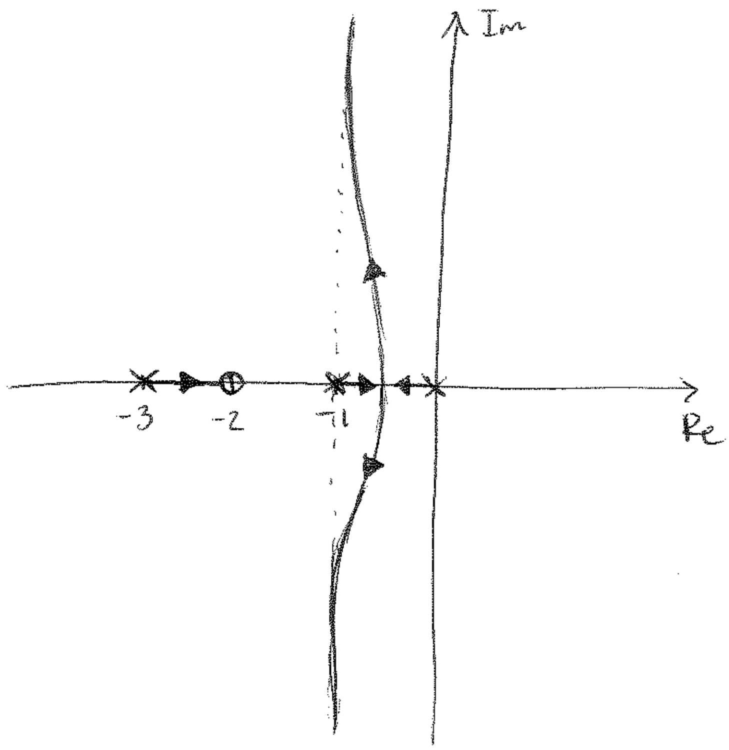
$\omega=-\sqrt{3+K}=-\sqrt{K/2} \Rightarrow$ som ovan inte ok!

Rotorten skär Im-axeln i origo!

(9) Vilka delar av Re-axeln är med i rotorten
$\Rightarrow$ Titta i planet (vi börjar rita)

$0\to-1$	udda	(1)
$-1\to-2$	jämn	(2)
$-2\to-3$	udda	(3)
$-3\to-\infty$	jämn	(4)
$(\infty\to 0$	jämn	$(0))$

(10)



$\uparrow \pi/2$

$\downarrow 3\pi/2$

Stabilt?

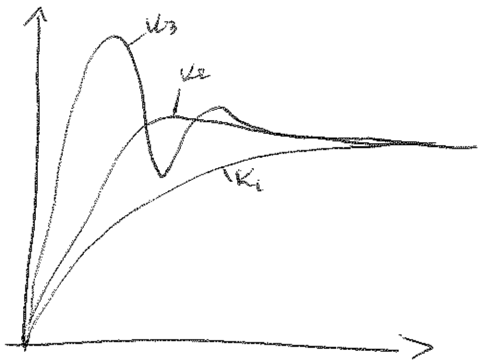
Från rotorten ser vi att polerna är strikt i VHP för K>0 (i origo för K=0)

⇒ Stabilt för K>0

Stegsvar?

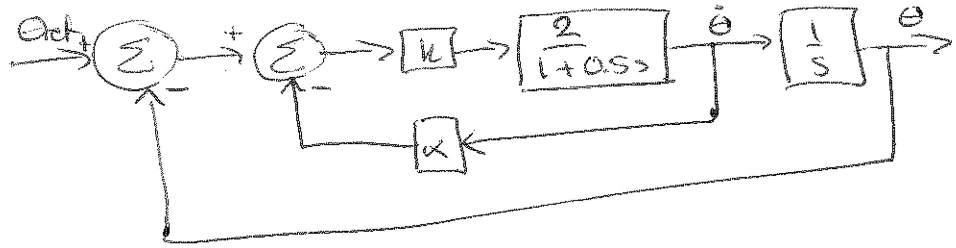
För små K har vi inga komplexa poler (får komplexa poler när K blir större & polerna följer asymptoten)

⇒ Systemet börjar oscillera för större K & dessa ökar ~~[illegible]~~ med K



$K_1 < K_2 < K_3$

3.6



a) Rita rotorten map k för $\alpha=0$

d) Rita rotorten map α för $k=1$

① Hitta G_c $\quad \Theta(s)=G_c(s)\Theta_{ref}(s)$

från block diagramm

$$\begin{cases} \Theta(s)=\frac{1}{s}\dot\Theta(s) & (1) \\ \dot\Theta(s)=\frac{2}{1+0.5s}U(s) & (2) \\ U(s)=K(E(s)-\alpha\dot\Theta(s)) & (3) \\ E(s)=\Theta_{ref}(s)-\Theta(s) & (4) \end{cases}$$

(1), (2), (3), (4) : $\quad \Theta(s)=\frac{1}{s}\frac{2k}{1+0.5s}(\Theta_{ref}(s)-\Theta(s)-\alpha\dot\Theta(s)) \quad (5)$

(1), (5) : $\quad \Theta(s)=\frac{1}{s}\frac{2k}{1+0.5s}(\Theta_{ref}(s)-\Theta(s)-\alpha s\Theta(s))$

$$\Rightarrow \quad \Theta(s)=\underbrace{\frac{2k}{s(1+0.5s)+(1+\alpha s)2k}}_{G_c}\Theta_{ref}(s)$$

a) $\alpha=0 \Rightarrow \quad G_c=\frac{2k}{s(1+0.5s)+2k}$

$P(s)+kQ(s)=s(1+0.5s)+2k \Rightarrow P(s)=s(1+0.5s)$ $\quad n=2 \quad n>m$ ok!

$Q(s)=2$ $\quad m=0$

start $\quad P(s)=0 \Rightarrow \quad s=0,\ s=-2$

änd $\quad Q(s)=0 \Rightarrow 2\neq 0$ inga ändpunkter

asymptoter $\quad n-m=2 \Rightarrow$ finns 2!

skärning: $\frac{1}{2}(-2+0)=-1$

riktning: $n-m-1=1 \Rightarrow k=0,1$

$\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$

Im-axeln $\quad P+kQ=0 \Rightarrow 0.5s^2+s+2k=0$

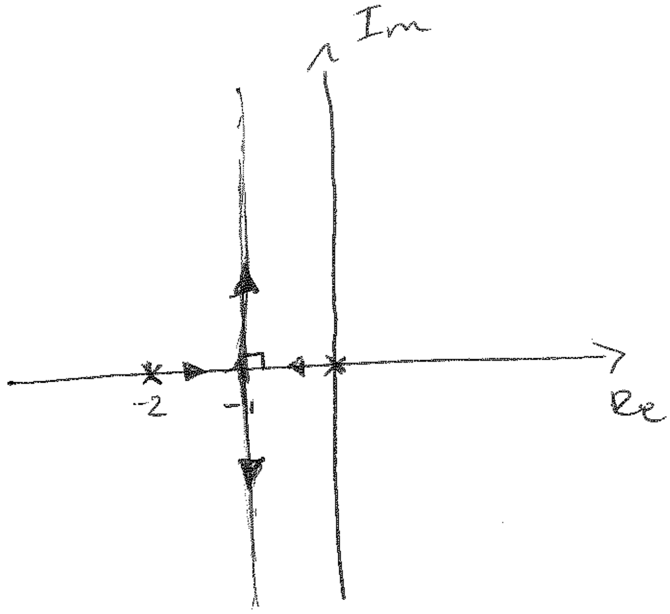
$s=i\omega \Rightarrow \quad -0.5\omega^2+i\omega+2k=0$

Im : $\omega=0$

Re : $2k-0.5\omega^2=0 \Rightarrow \omega=\pm2\sqrt{k}$

$\omega=0 \Rightarrow k=0$

skärning i origo!



∞ → 0 : jämn (0) – inte med
0 → -2 : udda (1) – med
-2 → -∞ : jämn (2) – inte med

d) $K = 1 \Rightarrow G_c = \dfrac{2}{s(1+0.5s)+(1+\alpha s)2}$

$P(s) + KQ(s) = s(1+0.5s) + (1+\alpha s)2$ ⇐ OBS! parametern 'K' är nu α

$P(s) = s(1+0.5s) + 2$ $\quad n = 2$ $\quad n \geq m$ ok!

$Q(s) = 2s$ $\quad m = 1$

$K = \alpha$

Start $P(s) = 0 \Rightarrow 0.5s^2 + s + 2 = 0 \Rightarrow s^2 + 2s + 4 = 0$

$\Rightarrow s = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3}$

Änd $Q(s) = 0 \Rightarrow 2s = 0 \Rightarrow s = 0$

asymptoter antal: $n - m = 2 - 1 = 1$

skärning: $\dfrac{\sum \text{start} - \sum \text{änd}}{n-m} = \dfrac{-2-0}{2-1} = -2$

riktning: $n - m - 1 = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow k = 0$

$\dfrac{\pi}{n-m} + \dfrac{2k\pi}{n-m}$ $\quad k = 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{2-1} = \pi$

Imaxeln $P(s) + KQ(s) = 0.5s^2 + (1+2\alpha)s + 2 = 0$

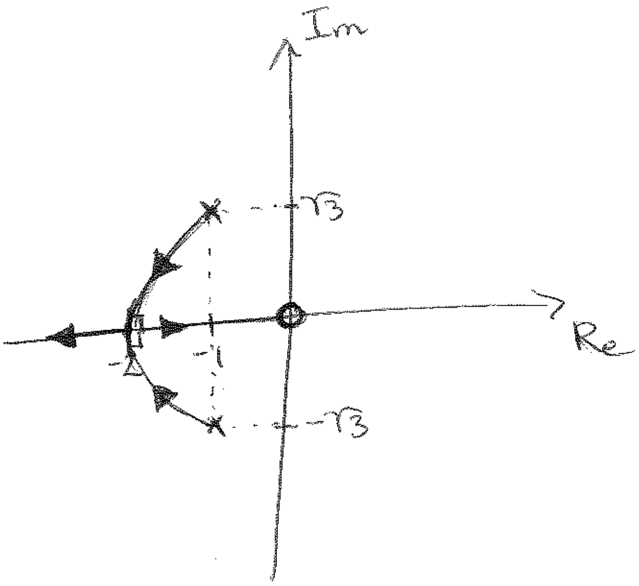
$s = i\omega \Rightarrow -0.5\omega^2 + (1+2\alpha)i\omega + 2 = 0$

Im: $(1+2\alpha)\omega = 0 \Rightarrow \omega = 0$ eller $\alpha = -1/2$

Re: $2 - 0.5\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm 2$

vi har $\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$ inte ok

skär inte Im-axeln för något val av $\alpha \geq 0$



0 → ∞ : udda (1) ⇒ med