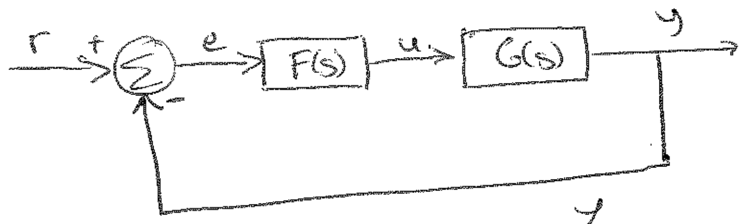
Övning 2

$\boxed{3.1, 3.24}$

Det återkopplade systemet



e: reglerfelet (r-y) $\overset{\mathcal{L}}{\Longleftrightarrow}$ $E(s) = R(s) - Y(s)$

Regulatorn $f \overset{\mathcal{L}}{\Longleftrightarrow} F$ beräknar utsignalen u baserat på reglerfelet.

Överföringsfunktioner

- Från E(s) till Y(s): $G_o(s) = G(s)F(s)$

  G_o kallas för det öppna systemet eller kretsförstärkning

- Från $R(s) \Rightarrow Y(s)$:

  $G_c(s)$ kallas för det slutna systemet

  Vad är G_c?

$$Y(s) = G_o(s)E(s)$$

$$R(s) = E(s) - Y(s) \quad \text{eller} \quad E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = G_o(s)(R(s) - Y(s))$$

$$\Rightarrow (1 - G_o(s))Y(s) = G_o(s)R(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{G_o(s)}{1 - G_o(s)} R(s)$$

går på tavla

$$\boxed{G_c = \frac{G_o}{1 - G_o}}$$

Regulatorer typ: PID

P: proportionellig - 'nutid' + snabbt − statiskt fel ($e \neq 0$)

I: integrerande - 'dåtid' + $e = 0$ − svängigt beteende

D: deriverande - 'framtid' + dämpar svängighet − känslig för brus i y

i tidsdomän

P: $K_P e(t)$

I: $K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$

D: $K_D \frac{d}{dt} e(t)$

i Laplace domän

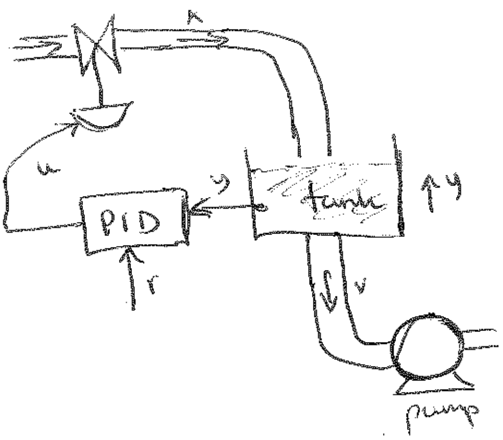
P: $K_P E(s)$

I: $K_I \frac{1}{s} E(s)$

D: $K_D s E(s)$

- $F(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + s K_D$
- $u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{d}{dt} e(t)$

3.1



Återkopplat system för att reglera vattennivån i tanken

Inflödet beror på positionen av valvet.

Utflödet beror på flödet v genom pumpen.

Överföringsfunktionen från u till flödet x benämns $G_v(s)$

a) Bestäm vad signalerna är & rita ett blockdiagram över hela systemet. Använd massbalans ⇒ för att bestämma överföringsfunktionen för tanken: $G_T(s)$

(fr x-v till y)

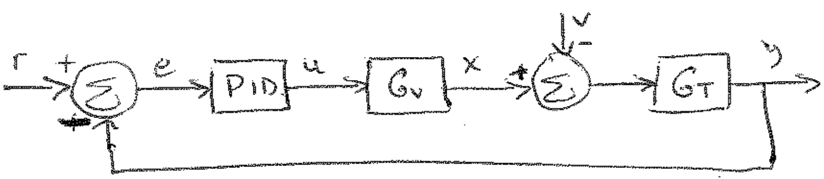
(förändring i vattennivå = konst. (inflöde-utflöde))

utsignal: $y(t)$: vattennivån

insignal: $u(t)$: valvets position

störsignal: $v(t)$: utflödet genom pumpen

referenssignal: $r(t)$: önskad vattennivå



massbalans: $\rho \frac{dV}{dt} = \rho (q_{in} - q_{ut})$

ρ: densitet, V: volym, q = flöde

$\Downarrow$

$\frac{dV}{dt} = q_{in} - q_{ut}$ $\quad A = 1m^2 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{A\,dy}{dt} = \frac{dy}{dt} = x - v$

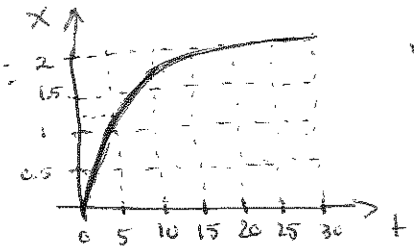
$\boxed{y' = x - v}$

$\mathcal{L} \Rightarrow \quad sY = X - V \Rightarrow Y = \frac{1}{s}(X - V) \Rightarrow G_T = \frac{1}{s}$

b) $G_v = \dfrac{k_v}{1+Ts}$

För att identifiera k_v & T skickar vi in ett enhetssteg $u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases}$

Resultat: (stegsvar)



Vad är k_v & T?

~~Kat:~~ Observationer

- stegsvaret går mot 2 : $\lim_{t\to\infty} x(t) = 2$

- stegsvaret är stabilt : $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) \Rightarrow \lim_{s\to 0} sG_vU = 2$

  slutvärdessatsen kan användas

  $2 = \lim_{s\to 0} \dfrac{k_v}{1+Ts} = k_v$ $\quad \boxed{k_v = 2}$

- ta ut värden ur stegsvaret: $X = G_vU = \dfrac{2}{1+Ts}\dfrac{1}{s} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Leftrightarrow} x = 2(1-e^{-t/T})$

  välj $t = T \Rightarrow x = 2(1-e) \approx 1.26$

  vi vet att $x = 1.26$ där $t = T$

  & $x = 1.26$ där $t \approx 5$ (från stegsvaret)

  $\Rightarrow \boxed{T=5}$

c) Bestäm överföringsfunktionen från r till y & från v till y
Visa att de har samma poler

från blockdiagrammet

$$\begin{cases} Y = G_T(X-V) \\ X = G_vU \\ U = FE \\ E = R-Y \end{cases}$$

där F är PIDreg.

från r till y & v till y : skriv $Y(s) = G_{ry}R(s) + G_{vy}V(s)$

$$Y = G_T(X-V) = G_T(G_vU - V) = G_T(G_vFE - V) = G_T(G_vF(R-Y)-V)$$

$$\Rightarrow (1+G_TG_vF)Y = G_T(G_vFR - V)$$

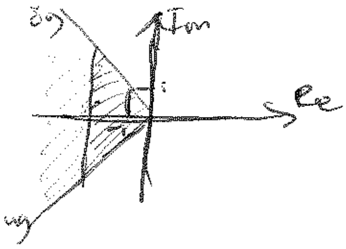
$$\Rightarrow Y = \frac{G_TG_vF}{1+G_TG_vF}R - \frac{G_T}{1+G_TG_vF}V$$

från r till y : sätt $V=0 \Rightarrow Y = G_{ry}R$ (slutna systemet)

från v till y : sätt $R=0 \Rightarrow Y = G_{vy}V$

G_{ry} & G_{vy} har samma nämnare $\Rightarrow$ samma poler
(poler är ju värden på s som gör att nämnaren är 0!)

d) Vi använder $F = K$: proportionellt
Hur stort K kan vi ha om alla poler i det slutna systemet ska vara i det markerade området



Hur ser området ut?

övre gräns: $\text{Im}(p) = -\text{Re}(p)$, $\text{Re}(p) < 0$
undre gräns: $\text{Im}(p) = \text{Re}(p)$, $\text{Re}(p) < 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{Re}(p) \leq \text{Im}(p)}_{ug} \underbrace{\leq -\text{Re}(p)}_{ög}, \quad \text{Re}(p) < 0$$

$$\Rightarrow |\text{Im}(p)| \leq |\text{Re}(p)|$$

Hur ser G_c ut? $\quad G_c = G_{ry}$

$$G_c = \frac{G_T G_v F}{1 + G_T G_v F} = \frac{G_T G_v K}{1 + G_T G_v K}$$

Vad är polerna?

s s.t. $1 + G_T G_v K = 0 \Rightarrow G_T G_v K = -1 \Rightarrow \left(K = \frac{-1}{G_T G_v} \right)$

sätt in G_T & G_v: $\quad G_v = \frac{2}{1+5s}$, $\quad G_T = \frac{1}{s}$

$$\frac{2}{1+5s} \frac{1}{s} K = -1 \Rightarrow 2K = \frac{-s}{\cancel{1+5s}}(1+5s) = -5s^2 - s \Rightarrow s^2 + \frac{1}{5}s + \frac{2}{5}K = 0$$

$$\boxed{\text{pq-formeln: } x^2 + px + q = 0 \text{ har lösningar } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Här: $s = -\frac{1}{10} \pm \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{2}{5}K}$ $\quad$ $\text{Re} < 0$ håller för alla K!
($-\frac{1}{10}$ om komplex, annars $-\frac{1}{10} + \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{2K}{5}}$ som störst)

Komplexa poler om $\frac{1}{100} - \frac{2K}{5} < 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{10} \pm i\sqrt{\frac{2K}{5} - \frac{1}{100}} = -\frac{1}{10} \pm i\sqrt{\frac{40K-1}{100}}$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{40K-1}}{10}$$

$$|\text{Im}| \leq |\text{Re}| \Rightarrow \sqrt{40K-1} \leq 1 \Rightarrow 40K - 1 \leq 1 \Rightarrow K \leq \frac{1}{20}$$

e) En störning introduceras i V i form av ett steg
Hur stort blir felet pga störningen i steady state = det stationära felet

Stationära felet: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} r-y$ eftersom $e=r-y$

$$\mathcal{L}: \; E = R - Y = R - \frac{G_T G_V F}{1+G_T G_V F} R + \frac{G_T}{1+G_T G_V F} V$$

Hur påverkas e av ett steg i V?

Sätt $R=0$: eftersom vi bara vill veta hur V påverkar E

$$E = \frac{G_T}{1+G_T G_V F} V$$

slutvärdessatsen: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{G_T}{1+G_T G_V F}$

$$* \left\{ \underset{\text{o } F=K}{\text{sätt in } G_T \text{ o } G_V} \right\} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{s}\frac{2}{1+5s}K}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+\frac{2}{1+5s}K}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1+5s}{s(1+5s)+2K} = \frac{1}{2K}$$

det stationära felet är $1/2K$

f) Hur stort är det stationära felet om en PI-regulator används istället?

Som e men i * sätt in $F = K + \frac{K_I}{s}$ istället!

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{s}\frac{2}{1+5s}\left(K+\frac{K_I}{s}\right)}\right) =$$ (kan sättas in direkt i sista lim.)

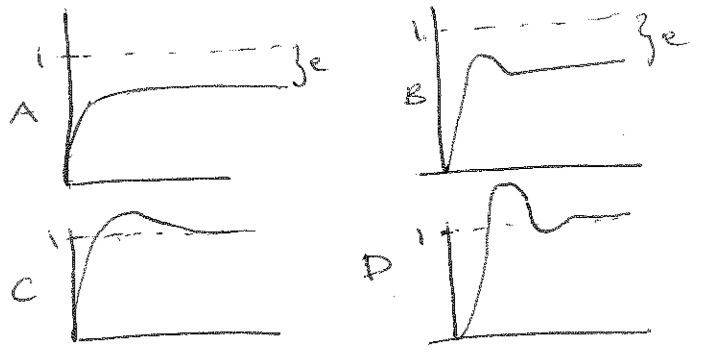
$$= \lim_{s\to 0} \frac{1+5s}{s(1+5s)+2K+\frac{2K_I}{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{s(1+5s)}{s^2(1+5s)+2Ks+2K_I} = \frac{0}{2K_I} = 0$$

Inget stationärt fel!

3.24

$U(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s\right) E(s)$

	K_P	K_I	K_D
1	1	0	0
2	1	1	0
3	1	0	1
4	1	1	1



Matcha ihop!

Stegsvar $U = \frac{1}{s}$

$$E = \frac{1}{K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s} U = \frac{s}{K_D s^2 + K_P s + K_I} U = \frac{1}{K_D s^2 + K_P s + K_I}$$

① $E_1 = \frac{1}{s}$ ② $E_2 = \frac{1}{s+1}$ ③ $E_3 = \frac{1}{s(s+1)}$ ④ $E_4 = \frac{1}{s^2+s+1}$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$\lim_{t\to\infty} e_1 = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s} = 1$ (A eller B)

$\lim_{t\to\infty} e_2 = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+1} = 0$ (C eller D)

$\lim_{t\to\infty} e_3 = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(s+1)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+1} = 1$ (A eller B)

$\lim_{t\to\infty} e_4 = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2+s+1} = 0$ (C eller D)

C & D

D är svängigare än C

Kom ihåg: K_D dämpar svängighet

2 har $K_D = 0$; 4 har $K_D = 1$ ⇒ 2 ~~bör vara~~ är svängigare än 4 ⇒ $\boxed{2 = D \quad 4 = C}$

A & B

Som ovan: B är svängigare än A

1 har $K_D = 0$, 3 har $K_D = 1$ ⇒ $\boxed{1 = B \quad 3 = A}$

OBS! Användandet av slutvärdessatsen kan bytas ut mot motivering: 2 & 4 har $K_I \neq 0$ ⇒ stationära felet $= 0$