Övning 13 [11.1, 11.2, 11.3]

Vi har jobbat med tidskontinuerliga system & regulatorer

Men som ni sett på labar/datorövningar så kan vi i praktiken inte använda kontinuerliga regulatorer eftersom datorer använder diskret tid.

Lösning: Approximera kontinuerliga system & regulatorer med diskreta

$\Rightarrow$ Differential ekv. $\approx$ Differens ekv.

Olika metoder

Euler bakåt: $\dot{x}(t) \approx \Delta_e x(t) = \frac{1}{T}(x(t) - x(t-T))$

Tustin: $\dot{x}(t) \approx \Delta_t x(t)$: $\frac{1}{2}(\Delta_t x(t) + \Delta_t x(t-T)) = \frac{1}{T}(x(t) - x(t-T))$

Operatorformalism = standard notation

p = deriveringsoperator : $\dot{x} = p x$

$\ddot{x} = p\dot{x} = ppx = p^2 x$

q_T = förskjutningsoperator : $x(t+T) = q_T x(t)$

$x(t-T) = q_T^{-1} x(t)$

Euler bakåt: $p x(t) \approx \frac{1}{T}(x(t) - q_T^{-1} x(t)) = \Delta_e x(t)$

$\Rightarrow p \approx \frac{1}{T}(1 - q_T^{-1})$

Tustin: $\frac{1}{2}(1 + q_T^{-1}) \Delta_t x(t) = \frac{1}{T}(1 - q_T^{-1}) x(t)$

$\Rightarrow \Delta_t x(t) = \frac{2}{T} \frac{(1-q_T^{-1})}{(1+q_T^{-1})} x(t) \approx \dot{x}(t) = px$

$\Rightarrow p = \frac{2}{T} \frac{(1-q_T^{-1})}{(1+q_T^{-1})}$

Sampling

T: samplingsinterval (tiden mellan mätningar)

ω_s: samplingsfrekvens $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

ω_N: nyquistfrekvens $\omega_N = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$

1. Högre frekvenser än ω_s kan inte skiljas från en frekvens i intervallet $(0, \omega_s)$

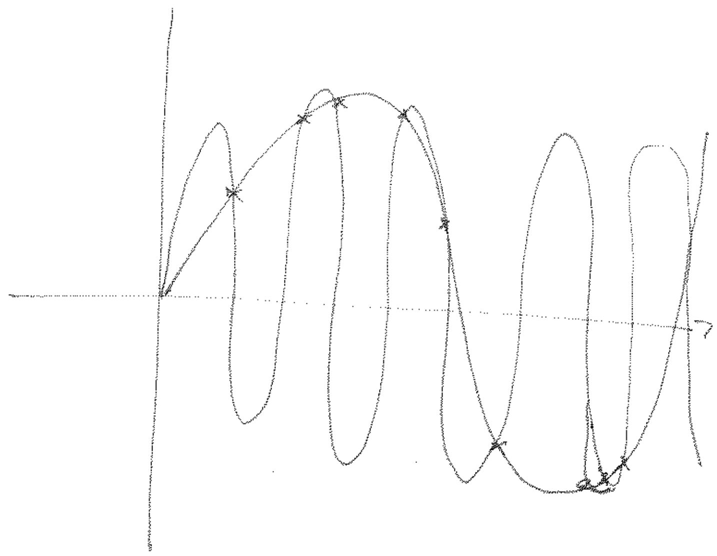
2. Alla frekvenser som är snabbare än ω_N kan uppfattas som en långsammare frekvens i intervallet $[0, \omega_N]$

   Aliaseffekten

⇒ **Samplingteoremet**

En signal som inte innehåller några frekvensbidrag över frekvensen ω_0 kan rekonstrueras exakt från samplade värden, om samplingen görs med $\omega_N \geq \omega_0$

Mer om aliaseffekten s 217-218



11.1 $\quad U(s) = KN \dfrac{s+b}{s+bN} E(s)$

kan approximeras med Tustin som $u(t) = \beta_1 u(t-T) + \alpha_1 e(t) + \alpha_2 e(t-T)$

Vad är α_1, α_2 o β_1 om $T = 0.1$
$N = 10$
$b = 0.1$
$K = 2$

Lösning

Tustin

$$pu(t) = \dot{u}(t) \approx \Delta_+ u(t) = \frac{2}{T} \frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}} u(t)$$

$$p \approx \frac{2}{T} \frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}$$

F(s)

$$F(s) = KN \frac{s+b}{s+bN}$$

Hur kan vi koppla ihop F o Tustin?

s i Laplace = tidsderivata

p = tidsderivatsoperator

$\Rightarrow$ sätt $s = p$! För $\mathcal{L}^{-1}$

$U = FE \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Leftrightarrow} \dot{u} + bNu = KN(\dot{e} + be)$
$\Rightarrow pu + bNu = KN(pe + be)$
$\Rightarrow u = KN\left(\frac{p+b}{p+bN}\right)e$

$$\Rightarrow u(t) \approx KN \frac{\left(\frac{2}{T}\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}} + b\right)e(t)}{\left(\frac{2}{T}\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}} + bN\right)} = \ldots = \frac{2+bT+(bT-2)q^{-1}}{2+bNT+(bNT-2)q^{-1}} KN\, e(t)$$

$$\Rightarrow \left(2+bNT+(bNT-2)q^{-1}\right)u(t) = \left(2+bT+(bT-2)q^{-1}\right)KN\, e(t)$$

$$\Rightarrow (2+bNT)u(t) + (bNT-2)\underbrace{u(t-T)}_{q^{-1}u(t)} = (2+bT)KN\, e(t) + (bT-2)KN\underbrace{e(t-T)}_{q^{-1}e(t)}$$

Jmf med givna Tustin för att identifiera α_1, α_2 o β_1

$$\beta_1 = \frac{2-bNT}{2+bNT} \qquad \alpha_1 = \frac{2+bT}{2+bNT} KN \qquad \alpha_2 = \frac{bT-2}{2+bNT} KN$$

Värden: $\beta_1 = \dfrac{1.9}{2.1} \qquad \alpha_1 = \dfrac{2.01}{2.1} 20 \qquad \alpha_2 = \dfrac{-1.99}{2.1} 20$

11.2 $\dot{y}(t) = u(t)$ (1)

sampling: $u(t) = u_k \quad kT \leq t < (k+1)T$ (2)

a) $y_k = y(kT)$

Bestäm förhållandet mellan y_{k+1}, y_k & u_k

Lösning

(*) $\dot{y}(t) = u_k \quad kT \leq t < (k+1)T$ från (1) & (2)

Approximera $\dot{y}(t)$ med y_k & y_{k+1}

Integrera (*) $\Rightarrow \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{dy}{dt}\,dt = \int_{kT}^{(k+1)T} u_k\,dt$

$\Rightarrow \int_{kT}^{(k+1)T} dy = u_k((k+1)T - kT)$

$\Rightarrow y((k+1)T) - y(kT) = u_k T$

$\Rightarrow y_{k+1} - y_k = u_k T$

Eller Euler framåt!

$p = \frac{1}{T}(q-1)$

$py(t) = u(t) \quad t \in I$

$\frac{y(t+T) - y(t)}{T} = u(t) \quad t \in I$

$\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} = u(kT)$

$y_{k+1} - y_k = T u_k$

b) Vi använder proportionelig reglering: $u_k = -Ky_k$

& har initalvärdet $y(0) = y_0$

För vilka K är det slutna systemet stabilt?

från a: $y_{k+1} = u_k T + y_k = \{u_k = -Ky_k\} =$

$= (1-KT)y_k$

Hur utvecklas y?

$\Rightarrow y_1 = (1-KT)y_0$

$y_2 = (1-KT)y_1 = (1-KT)^2 y_0$

$\vdots$

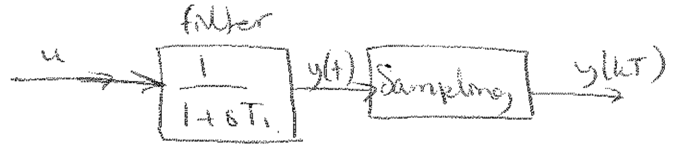
$y_m = (1-KT)^m y_0$

När är det stabilt?

Om $|y_m| \to 0$ då $m \to \infty$ $\Rightarrow |1-TK| < 1$

$\Rightarrow 0 < TK < 2 \quad \Rightarrow 0 < K < \frac{2}{T}$

11.3



Vi samplar med period T

$u = u_0 + u_1$

u_0: intressant lågfrekvens signal i intervallet $0 < \omega < \pi/T$

$u_1(t) = \sin \omega_2 t \qquad \frac{\pi}{T} < \omega_2 < \frac{2\pi}{T}$

Samplingen orsakar aliaseffekt & vi har

$y(t) = y_0 + y_1$

y_0: intressant

y_1: störning $\quad y_1(kT) = A\sin(\omega_1 kT + \varphi) \qquad \omega_1 < \pi/T$

a) Vad är A, ω_1 & φ?

Lösning:

Vi vill alltså veta hur samplade y_1 ser ut! (y_1 kommer från u_1)

Filtret är LTI $\Rightarrow$ sinus in - sinus ut gäller

$$\begin{cases} y_1(t) = |G(i\omega_2)| \sin(\omega_2 t + \phi) \\ \phi = \arg(G(i\omega_2)) \end{cases}$$

Sampling: $y_1(kT) = |G(i\omega_2)| \sin(\omega_2 kT + \phi)$

Betyder det att $\omega_1 = \omega_2$?

Nej! $\omega_1 < \frac{\pi}{T}$ & $\frac{\pi}{T} < \omega_2 < \frac{2\pi}{T}$ gör att det är omöjligt!

Inför $\omega_1 = \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega_s} - \omega_2 \Rightarrow$ när $\omega_2 : \frac{\pi}{T} \to \frac{2\pi}{T}$

har vi $\omega_1 : \frac{\pi}{T} \to 0$

$$\Rightarrow y_1(kT) = |G(i\omega_2)| \sin((\omega_s - \omega_1)kT + \phi) = \left\{ \begin{matrix} \sin(-x) = -\sin(x) \\ \text{udda funktion} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -|G(i\omega_2)| \sin(\omega_1 kT - 2\pi k - \phi) = \{2\pi\text{-periodisk}\} =$$

$$= -|G(i\omega_2)| \sin(\omega_1 kT - \phi) = \left\{ \begin{matrix} -\sin(x) = \sin(x+\pi) \\ \text{byter tecken med period } \pi \end{matrix} \right\} =$$

$$= |G(i\omega_2)| \sin(\omega_1 kT - \phi + \pi)$$

Identifiera variabler!

$A = |G(i\omega_2)|$

$\omega_1 = \omega_s - \omega_2$

$\varphi = \pi - \Phi = \pi - \arg(G(i\omega_2))$

Hitta $|G(i\omega_2)|$ & $\arg(G(i\omega_2))$

$G = \frac{1}{1+sT_1}$ $\quad G(i\omega_2) = \frac{1}{1+i\omega_2 T_1}$

$|G(i\omega_2)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2 T_1^2}}$

$\arg(G(i\omega_2)) = \underbrace{\arg(1)}_{0} - \arg(1+i\omega_2 T_1) = -\arctan(T_1\omega_2)$

om
$\omega_2 > 0$ $\Rightarrow$ ω_2 frekvens ok!
$T_1 > 0$

vi tittar bara på positiva frekvenser

$T_1 > 0$ för stabilt filter (poler i VHP)

b) Valet av T_2 påverkar tydligen amplituden A. Vad är den minsta amplituden A du kan få, om du inte vill dämpa frekvenserna i u_0 mer än $\sqrt{2}$ gånger.

Lösning

Vill inte dämpa för mycket: $|G(i\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \omega \in u_0$

Vi känner igen bandbredd! $|G(i\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ Alla frekvenser över ω_B dämpas för mycket

u_0 ligger i frekvensintervallet $0 < \omega < \frac{\pi}{T}$

$\Rightarrow$ $\frac{\pi}{T} \leq \omega_B$ (vi vill)

Vad är ω_B?

$|G(i\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_B^2 T_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1+\omega_B^2 T_1^2 = 2 \Rightarrow \omega_B = \frac{1}{T_1}$

$\Rightarrow$ Vi kräver att $\frac{\pi}{T} \leq \frac{1}{T_1} \Rightarrow T \geq \pi T_1$ (gräns för $T = \pi T_1$)

$A = |G(i\omega_2)| \geq \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2 \frac{T^2}{\pi^2}}}$ är minsta amplituden