Övning 12   [9.4, 9.8]

Tillståndsåterkoppling: $u(t) = -Lx(t) + \tilde{r}(t)$ (övning 10)

* L avgör var slutna systemets poler hamnar!
* Polerna kan placeras godtyckligt om systemet är styrbart

Tillståndsrekonstruktion: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$

* Om x inte kan mätas så kan vi uppskatta det med $\hat{x}$ genom att utnyttja kunskap om y & dynamiken (A, B, C)!
* Skattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$ avtar mot noll med en hastighet som avgörs av K!
* Hastigheten kan väljas godtyckligt snabb om systemet är observerbart

Hur hör de ihop?

L påverkar poler & K påverkar hur snabbt $\tilde{x} \to 0$

$\Rightarrow$ Ingen gemensam effekt $\Rightarrow$ De kan designas oberoende av varandra!

9.4

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad -1)\, x$$

(i) Vi vill placera poler i -2 & -3.

(ii) Föreslå en observatör & använd linjär tillståndsåterkoppling

(iii) Vad är polerna för det slutna systemet?

Lösning

POLPLACERING!

Var ligger polerna nu?

alt 1: $G = C(sI-A)^{-1}B$ titta på när nämnaren är 0

alt 2: Titta på egenvärdena till A

① $G = [1 \ -1] \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+1)}$ $\Rightarrow$ $s_1 = 0$, $s_2 = -1$

② $\lambda(A) \Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$

$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1) = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow$ Polerna ligger i **0 & -1**, vi måste flytta dem!

Kan vi lägga polerna var vi vill?

Ja, om systemet är styrbart!

$S = [B \ \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

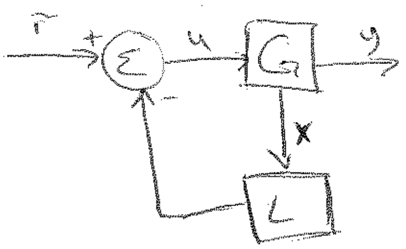
Styrbart om $\det(S) \neq 0$

$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 \cdot 1 = -1 \neq 0$ $\Rightarrow$ Vi kan placera poler godtyckligt!

Men vi skulle ju föreslå en observatör också ...

Teorin säger att vi kan designa dem oberoende av varandra!

Designa regulatorn!



$u = -Lx + \bar{r}$, $\quad \bar{r} = l_0 r$

$L = [l_1 \ l_2]$

Välj l_0, l_1 & l_2!

$$\begin{cases} \dot{x} = (A-BL)x + B\bar{r} \\ y = Cx \end{cases}$$

Bestäm nya poler!

Polerna är egenvärdena till $A-BL$!

$\lambda(A-BL)$: $\det(\lambda I - A + BL) = 0$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(l_1 \ l_2)\right) =$$

$$= \begin{vmatrix}\lambda + l_1 & l_2\\ l_1 & \lambda + 1 + l_2\end{vmatrix} = (\lambda + l_1)(\lambda + 1 + l_2) - l_1 l_2 =$$

$$= \lambda^2 + (l_1 + l_2 + 1)\lambda + l_1(1 + l_2) - l_1 l_2 = \underbrace{\lambda^2 + (l_1 + l_2 + 1)\lambda + l_1 = 0}_{\text{karaktäristiska ekv.}}$$

Bestäm hur karaktäristiska ekv. skall se ut!

Karakt. ekv.: $(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = 0$ för poler i p_1 & p_2

Vi vill att $p_1 = -2$, $p_2 = -3$

$\Rightarrow 0 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$

Jmf! Dvs välj l_1 & l_2 så att den karaktäristiska ekv. får formen vi vill

$$\begin{cases} l_1 + l_2 + 1 = 5 \\ l_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} l_1 = 6 \\ l_2 = -2 \end{matrix}$$

Hur väljer vi l_0?

Statiska förstärkningen av G_c: $G_c(s=0) = a$

välj l_0 så att a blir det vi vill!

Hitta G_c!

Slutna systemet: $\begin{cases} \dot{x} = (A-BL)x + Bl_0 r \\ y = Cx \end{cases}$

$* \; Y = G_c R$

Laplace

$\begin{cases} Y = CX \\ sX = (A-BL)X + Bl_0 R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = CX \\ X = (sI - A + BL)^{-1} Bl_0 R \end{cases}$

$\Rightarrow \; Y = C(sI - A + BL)^{-1} Bl_0 R$

$\Rightarrow \; G_c = C(sI - A + BL)^{-1} Bl_0$

$d = G_c(s=0)$

$d = C(BL - A)^{-1} Bl_0 = (1 \;\; -1)\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(6 \;\; -2) - \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} l_0 =$

$= (1 \;\; -1)\begin{pmatrix}6 & -2\\6 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} l_0 = (1 \;\; -1)\frac{1}{-6+12}\begin{pmatrix}-1 & 2\\-6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} l_0 =$

$= \frac{l_0}{6}(1 \;\; -1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{l_0}{6}$

$\Rightarrow \; l_0 = 6d$

Regulator

$u = -[6 \;\; -2]x + 6dr \qquad (-Lx + l_0 r)$

$\boxed{\text{Observatör!}}$

Kan vi designa en observatör med godtyckligt snabb minskning av skattningsfelet?

Ja, om systemet är observerbart!

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observerbart om $\det(\mathcal{O}) \neq 0$

$\det(\mathcal{O}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1)\cdot 0 = 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ Skattningsfelet kan $\to 0$ med godtycklig hastighet

Designa observatören!

$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y-\hat{y})$

$\dot{x} = Ax + Bu$

Vad är skattningsfelets dynamik?

$\tilde{x} = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(y-\hat{y}) =$

$= A(x-\hat{x}) - K(y-\hat{y}) = A(x-\hat{x}) - K(Cx - C\hat{x}) =$

$= (A-KC)(x-\hat{x}) = (A-KC)\tilde{x}$

Vi vill att skattningsfelet ska gå mot 0 snabbare än systemets 'stabiliserar' sig

Varför? Vill att vi ska ha rätt värde på tillstånden vid jämviktspunkten.

Hur? Om $\tilde{x}$ ska ha snabbare dynamik $\Rightarrow$ polerna till

$\dot{\tilde{x}} = (A-KC)\tilde{x}$ ska ligga längre från origo än polerna till

$\begin{cases} \dot{x} = (A-BL)x + Br \\ y = Cx \end{cases}$

Vi valde poler i -2 o -3 för det senare

Välj poler så att $p_1 \leq p_2 < -3$ ex: $p_1 = p_2 = -4$

Vad är polerna?

egenvärdena till $A-KC$! $\Rightarrow 0 = \det(\lambda I - A + KC) = \begin{vmatrix} \lambda + k_1 & -k_1 \\ k_2 & \lambda + 1 - k_2 \end{vmatrix} =$

$= (\lambda + k_1)(\lambda + 1 - k_2) + k_1 k_2 =$

$= \lambda^2 + (k_1 - k_2 + 1)\lambda + k_1$

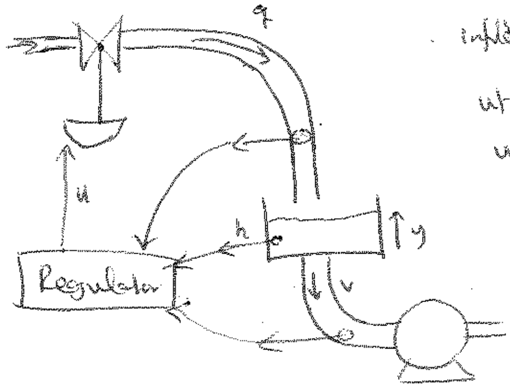
Karaktäristiska ekv

$(\lambda+4)^2 = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (k_1 - k_2 + 1)\lambda + k_1 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 8 = k_1 - k_2 + 1 \\ 16 = k_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = 16 \\ k_2 = 9 \end{matrix}$

Observatör: $\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u + \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \end{bmatrix}(y - [1 \ -1]\hat{x})$

(9.8)



inflödet q styrs av ventilens höjd u

utflödet v styrs av pumpen & ses som brus

u, h, q & v är små avvikelser från en önskad punkt.

$$Q(s) = \frac{k_1}{1+Ts} U(s) \qquad k_1 = 1 \quad T = 0.5$$

$$A\dot{h} = q - v \qquad A = 1m^2$$

a) q & h är tillståndsvariabler! Bestäm en tillståndsbeskrivning av processen! Bestäm en tillståndsåterkoppling $u = -l_1 q - l_2 h + r$ så att det slutna systemet har 2 poler i -2.

Lösning

$$u = -Lx + r \qquad L = (l_1 \;\; l_2) \qquad x = \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}$$

$\{A=1\}$ $\dot{h} = \dot{x}_2 = q - v = x_1 - v$

$$(1+Ts)Q = k_1 U \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} q + T\dot{q} = k_1 u \Rightarrow \dot{q} = \dot{x}_1 = \frac{1}{T}(-q + k_1 u) = \frac{1}{T}(-x_1 + k_1 u)$$

Tillståndform

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} k_1/T \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v$$

$$y = h = x_2 = [0 \;\; 1] x$$

$$A = \begin{pmatrix} -1/T & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k_1/T \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = [0 \;\; 1]$$

Polplacering

vill: $(\lambda+2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

har: $\det(\lambda I - A + BL) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{T} + \frac{k_1 l_1}{T} & \frac{k_1 l_2}{T} \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} T = 0.5 \\ k_1 = 1 \end{matrix} \right\} =$

$$= \begin{vmatrix} \lambda + 2 + 2l_1 & 2l_2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2 + 2l_1)\lambda + 2l_2 = 0$$

jmf: $\begin{cases} 4 = 2 + 2l_1 \\ 4 = 2l_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} l_1 = 1 \\ l_2 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{u = -[1 \;\; 2]x + r}$

b) Hur stort är det stationära felet för en konstant störning $v=0.1$ om $r=0$?

Lösning

$$\dot{x} = (A-BL)x + Br + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} v$$

Stationärt fel $\Rightarrow$ tidsderivator $=0$ $\Rightarrow$ $\dot{x}=0$

$$0 = (A-BL)x + \underset{0}{\underset{\uparrow}{Br}} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v = (A-BL)x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} 0.1 =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} (1 \;\; 2) \right) x + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_1 - 0.1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 0.1 \\ x_2 = -0.1 \end{matrix}$$

$x_1 = q$, $x_2 = h$

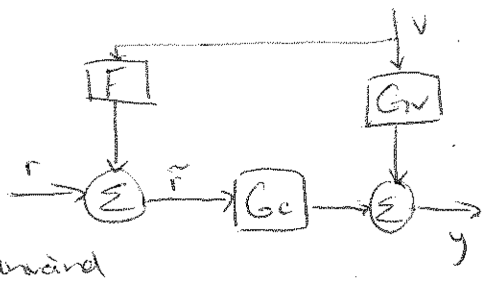
$\Rightarrow$ Vid den konstanta störningen $v=0.1$ så är avvikelsen från den önskade tanknivån -0.1 (h)
-0.1 är alltså vårt stationära fel!

c) Beräkna en framkoppling från v till r så att v:s påverkan försvinner! Uteslut alla termer i regulatorn där v deriveras så att regulatorn blir implementerbar. Hur funkar regulatorn? Vad är stationära felet?

Lösning

Framkoppling

(Mät störningen & använd informationen för att ändra referens-signalen)



Hur påverkas y av v?

$Y = G_v V$

vårt system: $\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v = A'x + B'r + C'v$

$y = [0 \quad 1] x = D'x$

$\mathcal{L} \Rightarrow \begin{cases} sX = A'X + B'R + C'V \\ Y = D'X \end{cases}$

$\Rightarrow Y = D'(sI - A')^{-1}(B'R - C'V) = G_c R + G_v V$

$\Rightarrow G_v = D'(sI - A')^{-1} C' = \ldots = -\dfrac{(s+4)}{(s+2)^2}$

Framkopplingen

Från blockdiagrammet: $Y = G_v V + G_c(R + FV)$

vill att $Y = G_c R$ dvs att V inte har någon effekt

$\Rightarrow G_v + G_c F = 0$

$\Rightarrow F = -\dfrac{G_v}{G_c}$

Hitta G_c

$G_c = D'(sI - A')^{-1} B'$ (från ovan) $\Rightarrow \ldots \Rightarrow G_c = \dfrac{2}{(s+2)^2}$

$F = -\dfrac{G_v}{G_c} = \dfrac{s+4}{(s+2)^2} \Big/ \dfrac{2}{(s+2)^2} = \dfrac{s+4}{2}$

Vi skulle ta bort ev. deriverande delar ...

$F = \dfrac{s+4}{2}$ har en deriverande del $\dfrac{s}{2}$ $\Rightarrow$ nytt $F = 2$

Undersök felet (stationära!)

Vi har: $\dot{x} = A'x + (B'F + C')v = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 4x_2 + 4v = 0 \\ x_1 - v = 0 \end{cases} \Rightarrow \{v = 0.1\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = v \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $h = x_2 = 0!$

Inget stationärt fel!

d) Vad händer med det stationära felet om vi använder regulatorn från c men om k_1 avviker något från 1?

Lösning

Var hade vi k_1? $\Rightarrow$ i B!

Vi får ~~med~~ k_1 insatt istället för 1

$$\dot{x} = (A - BL)x + B2v + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} v =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2k_1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ \ 2) \right) x + \begin{pmatrix} 2k_1 \\ 0 \end{pmatrix} 2v + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} v =$$

$$= \begin{pmatrix} -2-2k_1 & -4k_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4k_1 \\ -1 \end{pmatrix} v$$

Stationärt $\dot{x} = 0$

$$\begin{cases} -2(1+k_1)x_1 - 4k_1 x_2 + 4k_1 v = 0 \\ x_1 = v \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{k_1} \frac{k_1 - 1}{2} v$$

Om $k_1 \neq 1$ så är $\frac{k_1 - 1}{2k_1} \neq 0$ $\underline{o}$ det följer att det stationära felet blir nollskilt

e) Föreslå en ny regulator så att stationära felet blir noll för konstanta störningar, oavsett om k_1 avviker lite från 1

Lösning

Hur får vi fel att försvinna genom reglering?

$\Rightarrow$ Integrerande del!

Inför ett extra tillstånd z där $\dot{z} = h$ (dvs $z = \int h \, dt$)

Nytt system:
$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}2k_1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}v$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix}$$

OBS! x är fortfarande 2 dim dvs $x = \begin{bmatrix}q\\ h\end{bmatrix}$

Jämför ovan med orginalsystemet!
Vi har bara lagt till en ekvation $\dot{z} = x_2$

Vad är det återkopplade systemet?

$u = -L\begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix} + r$ $\quad L = (l_1\ l_2\ l_3)$ $\quad r = 0$ (eftersom vi inte vill ha avvikelser)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}-2-2k_1l_1 & -2k_1l_2 & -2k_1l_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}v$$

Stationärt: $\dot{z} = 0 \Rightarrow x_2 = h = 0$

Förutsatt att L stabiliserar systemet dvs stationärt läge uppnås, så är stationära felet noll!