Övning 10   Styrbarhet & Observerbarhet

Minimal Realisation

Förra övningen: Ett system kan representeras av flera olika 'tillståndsforms system'

Hur vet vi hur många tillstånd som krävs?

⇒ Vi kan kolla om vi har tillräckligt många: då kan tidsderivatorna av tillstånden uttryckas som funktioner av tillståndsvariabler & insignal

⇒ Om vi har för många då?

s. 169 Minimal Realisation: 'den tillståndsbeskrivning som har så få tillstånd som möjligt'
⇒ Finns ingen annan giltig beskrivning med färre tillstånd

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Styrbarhet   s 172 →

En tillståndsvektor x^* är styrbar om $\exists$ en insignal som för tillståndet från origo till x^* på ändlig tid

("Vi kan styra tillståndsvariablerna")

Systemet S är styrbart om alla tillståndsvektorer är styrbara

Mängden styrbara tillståndsvektorer är det rum som spänns upp av:

$$S = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

Om S är kvadratisk ⇒ Styrbart system om $\det(S) \neq 0$

Observerbarhet   s 173 →

$x^* \neq 0$ är icke-observerbar om utsignalen är 0 då initialvärdet är x^* & insignalen är 0

'Vi kan inte styra tillståndet'

Systemet S är observerbart om det saknar icke observerbara tillståndsvektorer

Mängden av icke styrbara tillståndsvektorer är nollrummet till

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Om $\mathcal{O}$ är kvadratisk ⇒ Observerbart system om $\det(\mathcal{O}) \neq 0$

En tillståndsbeskrivning är en <u>Min. rel.</u> om den är <u>styrbar</u> o <u>observerbar</u>

Stabilitet

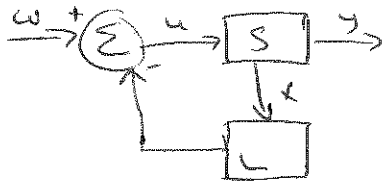
Ett styrbart o observerbart, linjärt system är insignal-utsignal stabilt om egenvärdena till A ($\lambda(A)$) har strikt negativ realdel:

$$Re(\lambda(A)) < 0$$

Tillståndsåterkoppling

Mät tillståndsvariablerna o återkoppla baserat på dem!

$u = -Lx + \bar{r}$



$\bar{r}$: extra insignal
referenssignal
filtrerad referenssignal

Systemet

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx$

Tillståndsåterkopplat

$\dot{x} = Ax - BLx + B\bar{r}$

$y = Cx$

Stabilitet?

Förut: $G(s)$ poler avgör stabilitet

Nu: $(A - BL)$ egenvärden avgör stabilitet!

$\Rightarrow$ Genom att välja L kan vi välja egenvärdena o styra stabilitet dvs <u>polerna</u>

Polplacering

Välj L s.a. $\lambda(A - BL)$ får de värden du vill att polerna ska ha

Egenvärden: $\det(\lambda I - A + BL) = 0$

Matcha med karaktäristiska ekvationen för dina valda poler.

Vi kan placera poler var vi vill om o endast om systemet är styrbart

$\Uparrow$

Enklast att beräkna L om A, B & C är på styrbar kanonisk form

Rekonstruktion av tillstånd

Om vi inte kan mäta ett tillstånd men vill ha tillståndsåterkoppling

Verkliga systemet $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ Uppskattat system $\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases}$

felet: $y - C\hat{x}$

$\Rightarrow$ Återkoppla med $y - C\hat{x}$:

$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$ ← observatör

$\tilde{x} = x - \hat{x}$ fel i skattning

$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - KC)\tilde{x}$

[Vi kan placera polerna till $(A-KC)$ godtyckligt om systemet är observerbart.]

↑ enklast att beräkna K om A, B & C är på observerbar kanonisk form

(8.10) Vad är dimensionerna av det styrbara samt det icke observerbara rummen?
~~Vilka vektorer spän~~ Vad är rummen?

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} u$

$y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1.5 \end{pmatrix} x$

Lösning Titta på S & $\mathcal{O}$ $\quad S = (B \ AB \dots A^{n-1}B)$

$\mathcal{O}^T = (C \ CA \dots CA^{n-1})$

$n = \dim(x) = 3 \Rightarrow$ behöver B, AB, A^2B, C, CA, CA^2

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad A(AB) = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix}$

$C = (1 \ 3 \ 1.5) \quad CA = (-2 \ -3 \ -1.5) \quad CA^2 = (4 \ 3 \ 1.5)$

$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -6 & 18 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ -2 & -3 & -1.5 \\ 4 & 3 & 1.5 \end{pmatrix}$

kvadratiska: vad är $\det(S)$ & $\det(\mathcal{O})$?

$\det S = 1(\underbrace{3 \cdot 18 - 9 \cdot 6}_{0}) - 2(\underbrace{-9 \cdot 2 - 1 \cdot 18}_{0}) + 4(\underbrace{1 \cdot 6 - 2 \cdot 3}_{0}) = 0$

$\det \mathcal{O} = 1(\underbrace{-3 \cdot 1.5 + 1.5 \cdot 3}_{0}) + 3(\underbrace{-1.5 \cdot 4 + 2 \cdot 1.5}_{3}) + 1.5(\underbrace{-2 \cdot 3 + 3 \cdot 4}_{6}) = 0$

Inte styrbart eller observerbart

Undersök S: $Sx = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ Gauss $\Rightarrow$ Den tredje kolumnen kan skrivas som en linjär kombo av de 2 första kolumnerna

$\left(-6 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} \right)$

$\text{rank}(S) = 2$

Det styrbara rummet spänns upp av $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Undersök $\mathcal{O}$: Det icke observerbara rummet är noll-rummet till $\mathcal{O}$

$$\mathcal{O}x=0: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ -2 & -3 & -1.5 & 0 \\ 4 & 3 & 1.5 & 0 \end{array}\right) \underset{r_2+2r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ 4 & 3 & 1.5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{r_1-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ 4 & 3 & 1.5 & 0 \end{array}\right) \underset{r_3-4r_1-r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \; x_1 = 0$

$3x_2 + 1.5x_3 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 + 0.5x_3 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = -0.5x_3$

$x_3 = a \;\Rightarrow\; x_2 = -0.5a$

nollrummet spänns upp av $(0, -0.5a, a)^T$ för något a, välj exempelvis $a=2$

$\Rightarrow$ spänns upp av $(0, -1, 2)^T$

b)
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} x$$

$$y = (0 \;\; 3 \;\; 0)\, x$$

Som förra uppgiften $\Rightarrow$ $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 16 \\ -2 & 8 & -32 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ -9 & 12 & 0 \end{pmatrix}$

hel rad/kolumn med nollor $\Rightarrow$ det$=0$

Undersök S: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -8 & 8 \\ 0 & 16 & -32 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, Gauss

$\Rightarrow c_3 = -8c_1 - 6c_2$

rank$(S) = 2$, spänns upp av $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$

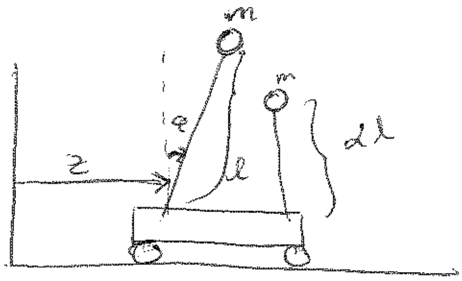
Undersök $\mathcal{O}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ -9 & 12 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Gauss $\Rightarrow$ $x_2 = 0$

$x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\mathcal{O}x = 0$ för $x^T = (0 \; 0 \; a)$

nollrummet spänns upp av $(0 \; 0 \; 1)^T$

8.13



För en pendel gäller:

$\ddot{z}\cos\varphi + \ddot{\varphi} l = g\sin\varphi$

a) Linjärisera systemet runt $\varphi = 0$, sätt alla konstanter l, m, g till 1 & skriv på formen $\dot{x} = Ax + Bu$

Lösning

Pendel 1: $\ddot{z}\cos\varphi_1 + l\ddot{\varphi}_1 = g\sin\varphi_1$

Pendel 2: $\ddot{z}\cos\varphi_2 + \alpha l\ddot{\varphi}_2 = g\sin\varphi_2$

konstanter $= 1 \Rightarrow$ ① $\ddot{z}\cos\varphi_1 + \ddot{\varphi}_1 = \sin\varphi_1$

② $\ddot{z}\cos\varphi_2 + \alpha\ddot{\varphi}_2 = \sin\varphi_2$

Identifiera signaler:

$\ddot{z}$: vagnens accelleration $\Rightarrow$ insignal $u = \ddot{z}$

tillstånd: $x_1 = \varphi_1$, $x_2 = \dot{\varphi}_1$, $x_3 = \varphi_2$, $x_4 = \dot{\varphi}_2$ $\Rightarrow$ $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = \sin x_1 - u\cos x_1$, $\dot{x}_3 = x_4$, $\dot{x}_4 = \frac{1}{\alpha}(\sin x_3 - u\cos x_3)$

$f_1 = x_2$

$f_2 = \sin x_1 - u\cos x_1$

$f_3 = x_4$

$f_4 = \frac{1}{\alpha}(\sin x_3 - u\cos x_3)$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,3,4 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$

$\frac{\partial f_2}{\partial x_i} = 0 \quad i = 2,3,4 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \cos x_1 + u\sin x_1$

$\frac{\partial f_3}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2,3 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 1$

$\frac{\partial f_4}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2,4 \qquad \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{1}{\alpha}(\cos x_3 + u\sin x_3)$

$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = -\cos x_1 \quad \frac{\partial f_3}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial f_4}{\partial u} = -\frac{\cos x_3}{\alpha}$

med $\varphi = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/\alpha \end{pmatrix}$$

$\dot{x} = Ax + Bu$

b) För vilka α är systemet styrbart?
Hur stämmer det med exemplet? Vad betyder det?

Lösning

Titta på styrbarhetsmatrisen S

$$S = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/\alpha \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\alpha & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 \\ -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 \\ -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\alpha^2 \\ -1/\alpha & -1/\alpha^2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1/\alpha & 0 \\ -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & -1/\alpha^2 \\ -1/\alpha^2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1/\alpha^2 \\ -1/\alpha & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1/\alpha & 0 \\ 0 & -1/\alpha^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1/\alpha \\ -1/\alpha & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 1\right) = \frac{1}{\alpha^2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2$$

Systemet är styrbart om $\det(S) \neq 0$

dvs om $1 \neq \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha \neq 1$

Det är alltså styrbart om pendel 1 & 2 inte har samma längd.

Varför? Om de har samma längd så reagerar de på samma sätt för ~~ett~~ given insignal & vi kan inte styra dem separat

9.1

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

a) Beräkna en tillståndsåterkoppling s.a. polerna hamnar i I (-3, -5) & II (-10, -15)
Vad begränsar möjligheten att godtyckligt välja poler?

Lösning

$$u = -Lx + r$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = (A - BL)x + Br$$
$$y = Cx$$

polerna fås som egenvärdena till $A - BL$:

$$0 = \det(\lambda I - A + BL) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (l_1 \ l_2) \right) =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda+2 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \det\begin{pmatrix} \lambda+2+l_1 & 1+l_2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda+2+l_1)\lambda + 1 + l_2 = \lambda^2 + (2+l_1)\lambda + 1 + l_2 = 0$$

I polerna ger karakteristiska ekvationen:

$$(s+3)(s+5) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 8s + 15 = 0$$

jmf: $\begin{matrix} 2 + l_1 = 8 \\ 1 + l_2 = 15 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} l_1 = 6 \\ l_2 = 14 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad u = -6x_1 - 14x_2 + r$

II polerna ger karakteristiska ekvationen:

$$(s+10)(s+15) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 25s + 150 = 0$$

jmf: $\begin{matrix} 2 + l_1 = 25 \\ 1 + l_2 = 150 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} l_1 = 23 \\ l_2 = 149 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad u = -23x_1 - 149x_2 + r$

Den begränsande faktorn är insignalen u
Vi ser här att koefficienterna i u växer ju 'större' poler längre från origo
vi vill ha. Om u är begränsad finns det också en gräns för vilka poler vi kan välja.

b) Endast utsignalen mäts. Beräkna en observatör som gör överföringsfunktionen från r till y att bli likadan som i (a). Hur påverkar poler observatören?

Lösning

Observatör: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\bar{u} + K(y - C\hat{x})$

$\tilde{x} = x - \hat{x}$

$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = (A-KC)\tilde{x} \quad (*)$

Om polerna till $*$ är i VHP gäller att $\tilde{x}(t) \to 0$ för $t \to \infty$ dvs vår observatör → verkligheten

⇒ Välj K s.a. egenvärdena till A-KC är i VHP

För att $\tilde{x} \to 0$ snabbare än det slutna systemet

⇒ Välj K s.a. egenvärdena till A-KC är till vänster om det slutna systemets poler

$$0 = \det(\lambda I - A + KC) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda+2 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda+2+k_1 & 1 \\ k_2-1 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda+2+k_1)\lambda - k_2 + 1 = \lambda^2 + (2+k_1)\lambda + 1 - k_2$$

Lägg poler till vänster om -15 t.ex. -20

Karaktäristiska ekv: $(s+20)(s+20) = 0 \Rightarrow s^2 + 40s + 400 = 0$

jmf: $2 + k_1 = 40 \Rightarrow k_1 = 38$

$1 - k_2 = 400 \qquad k_2 = -399$

Observatör: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \begin{pmatrix} 38 \\ -399 \end{pmatrix}(y - C\hat{x})$

Observatören förstärker $y - C\hat{x}$ den är alltså känslig för brus i mätsignalen. För stort K (dvs poler långt från origo) kommer alltså leda till bruskänslighet.