1. Komplexa tal

1.1. **De reella talen.** De reella talen skriver betecknas ofta med symbolen $\mathbf{R}$. Vi vill inte definiera de reella talen här, men vi noterar att för varje tal a och b har vi att $a+b$ och att ab också blir reella tal. Med andra ord är mängden $\mathbf{R}$ sluten under addition och multiplikation. Vidare har vi att till varje tal a finns det et tal $-a$ sådan att $a+(-a)=0$, och till varje nollskild tal $a \neq 0$ finns talet a^{-1} sådan att $aa^{-1}=1$.

1.2. **Reella talen som matriser.** Vi börjar med att presentera de reella talen på ett lite annorlunda sätt. Varje tal a kan skrivas som $a \cdot 1$, och idag vill vi med 1 mena (2×2) identitetsmatrisen. Vi skriver

$$a = a \cdot 1 = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Att skriva reella tal som en speciell klass av (2×2)-matriser skall vi snart se är ett smart drag. Notera först att addition och multiplikation av matriser är kompatibel med den vanliga additionen och multiplikationen av reella tal. Med detta menas följande. Om a är ett reelt tal, låter vi $T_a = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Vi har då att

$$T_a + T_b = T_{a+b} \quad \text{och} \quad T_a T_b = T_{ab}.$$

Detta betyder att vi värkligen kan betrakta de reella talen som diagonalmatriser med ett och samma diagonalelement.

1.3. **En klass av matriser.** Betrakta nu alla (2×2)-matriser på formen

$$\mathbf{C} = \{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid \text{reella tal} \quad a, b \}.$$

Delmängden av sådana matriser skriver vi som $\mathbf{C}$. Notera att nollmatrisen 0 och identitetsmatrisen 1 finns med i mängden $\mathbf{C}$. Och, med $b = 0$, har vi också alla reella tal inuti mängden $\mathbf{C}$. Vi vil nu kolla att mängden är sluten under addition och multiplikation. Låt Z och W vara två godtyckliga element i mängden $\mathbf{C}$. Vi har att

$$Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad W = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$$

för några reella tal a, b, c och d. Vi har att

$$Z + W = W + Z = \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} \tag{1.3.1}$$

$$Z \cdot W = W \cdot Z = \begin{bmatrix} ac-bd & -(-ad-bc) \\ -ad-bc & ac-db \end{bmatrix}. \tag{1.3.2}$$

Vi har att $Z+W$ och $Z \cdot W$ är matriser på den speciella formen som krävs för att vara med i mängden $\mathbf{C}$. Märk också att för matriser i $\mathbf{C}$

blir matrisprodukten kommutativ (härligt!). Mängden $\mathbf{C}$ är sluten under addition och multiplikation. Hur är det med de andra egenskaperna för tal. Uppenbarligen har vi att för varje matris Z att $Z + (-Z) = 0$. Hur är det med Z^{-1}?

Sats 1.4. *Låt Z vara ett nollskilld element i $\mathbf{C}$. Då finns det en matris Z^{-1} i $\mathbf{C}$ sådan att $ZZ^{-1} = 1$. Mera precist, om*

$$Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

då har vi determinanten $\det(Z) = a^2 + b^2$. Om $Z \neq 0$, då vill determinanten vara nollskild, och vi har att inversen

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}.$$

Proof. Vi har att $\det(Z) = a^2 + b^2$. Determinanten är noll om och endast om $a = 0$ och $b = 0$. Med andra ord är determinanten nollskild om och endast om $Z \neq 0$. Vi har tidligare visat att en matris är inverterbar om och endast om determinanten är nollskild, och formeln för inverser för (2×2)-matriser ger slutligen sats. □

1.4.1. De tre första egenskaperna, att mängden är sluten under addition, och sluten under multiplikation, och att varje matris Z har en additiv invers $-Z$ gäller inte bara för mängden $\mathbf{C}$. Dessa tre egenskaper gäller också för mängden av alla (2×2)-matriser, för att ta ett exempel. Det är egenskapen att varje matris $Z \neq 0$ har en multiplikativ invers som kräver att vi måste betrakta en delmängd.

1.5. **Komplexa talen.** Vi kallar mängden $\mathbf{C}$ av matriser definerad ovan, för de komplexa talen. Tärmen komplex kan man diskutera, men anledningen att vi kallar elementen i $\mathbf{C}$ för tal är att dessa matriser har alla egenskaper vi förväntar att tal skall ha. Specielt har vi den trevliga egenskapen att varje nollskilt tal $Z \neq 0$ har en multiplikativ invers Z^{-1}.

Notera att det finns komplexa tal som inte är reella, det vill säga det finns matriser i $\mathbf{C}$ som inte är på formen $a \cdot 1$. Ett exempel är talet

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta talet ger betecknar vi med symbolen Ω, och kallas iblant för den imaginära enheten. Notera att

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.5.1}$$

Detta betyder att $\Omega^2 = -1$.

Exempel 1.6. Låt oss lösa några ekvationer inom talen $\mathbf{C}$. Vi börjar med ekvationen

$$X^2 = 5.$$

Notera nu att den okända X är alla matriser inom mängden $\mathbf{C}$, sådan att X^2 är lika med matrisen $5 \cdot 1$, matrisen med talet 5 på diagonalen. Låt X vara en godtycklig matris i mängden $\mathbf{C}$, vi har

$$X = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix},$$

där x och y är okända reella tal. Vi får att

$$X^2 = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2 - y^2 \end{bmatrix},$$

vilket skall vara lika med matrisen

$$5 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Detta ger, koefficientvis, att $x^2 - y^2 = 5$ och $-2xy = 0$. Den andra ekvationen ger att antingen är $x = 0$ eller så är $y = 0$. Insätter vi $x = 0$ i den första ekvationen får vi $-y^2 = 5$, vilket saknar lösning. Insätter vi istället $y = 0$ i den första ekvationen får vi $x^2 = 5$, vilket har lösningarna $\pm\sqrt{5}$. Vi har nu visat att ekvationen $X^2 = 5$ har lösningarna $X = -\sqrt{5}$ och $X = \sqrt{5}$. Inget ovanligt med andra ord.

Exempel 1.7. Betrakta ekvationen $X^2 = -4$ i $\mathbf{C}$. Låt $X = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ vara en okänd matris som ovan. Vi söker lösningar till

$$X^2 = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2 - y^2 \end{bmatrix} = -4 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vi jämför koefficienterna och erhåller att $x^2 - y^2 = -4$ och $-2xy = 0$. Insätter vi $x = 0$ i den första ekvationen får vi $-y^2 = -4$, vilket ger $y = \pm 2$. Insätter vi $y = 0$ i den första ekvationen får vi $x^2 = -4$, och denna saknar lösning. Vi har visat att ekvationen $X^2 = -4$ har lösningarna

$$X = -2\Omega \quad \text{och} \quad X = 2\Omega,$$

där Ω är matrisen (1.5.1). Här ser vi att vissa ekvationer, som $X^2 = -4$, som inte har lösning i $\mathbf{R}$, har lösning i $\mathbf{C}$.

1.8. **Komplexa talen som talplanet.** Det reella talplanet $\mathbf{R}^2$ är mängden av alla ordnade talpar $z = (a, b)$. Till varje element $z = (a, b)$ i talplanet kan vi tillordna matrisen $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ i $\mathbf{C}$. Och omvändt. Den första kolumnen till en godtycklig matris $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ i $\mathbf{C}$ ger det ordnade talparet $z = (a, b)$. Detta betyder att vi kan identifiera mängden $\mathbf{C}$ med mängden $\mathbf{R}^2$.

1.8.1. *Reell och imaginär axel.* Notera att under den givna identifikationen av de komplexa talen med talplanet, identifieras de reella talen med x-axeln. Vi kallar därför x-axeln för den reella axeln. Talet Ω identifieras med talparet $\omega = (0,1)$, och y-axeln kallas den imaginära axeln.

1.9. **Multiplikation av talpar.** Vi har att $\mathbf{C}$ är tal, och speciellt kan vi addera och multiplicera tal. Detta betyder att vi nu också kan addera och multiplicera element i $\mathbf{R}^2$. Låt $z = (a,b)$ och $w = (c,d)$ vara två element i talplanet. För att addera och multiplicera dessa måste vi först betrakta dessa som element Z och W i $\mathbf{C}$. Sedan adderar och multliplicerar vi Z och W, och får $Z + W$ och ZW. Dessa två nya matriser $Z + W$ och ZW identifieras med två talpar, och vi erhåller addition och multiplikation av z och w.

Lemma 1.10. *Låt $z = (a,b)$ och $w = (c,d)$ vara två talpar. Den inducerade additionen från $\mathbf{C}$ ger komponentvis addition*

$$z + w = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d).$$

Den inducerade multiplikationen ges av formeln

$$z \cdot w = (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, -ad - bc).$$

Proof. Additionsformeln följer från (1.3.1), och multiplikationen följer från (1.3.2). □

Exempel 1.11. Betrakta talparet $\omega = (0,1)$ som tillsvarar matrisen Ω. Formel ger att $\omega^2 = (0,1)^2 = (-1,0)$, vilket vi redan visste från beräkningarna i (1.5). Ett annat exempel är produkten

$$(0,1) \cdot (-1,1) = (0+1, -0+1) = (1,-1).$$

1.12. **Geometrisk tolkning av produkt.** Vi vill tolka produkten zw av två talpar z och w, geometrisk. Vi börjar med att beskriva ett talpar $z = (a,b)$ i polära koordinater. Vinklar mäts i radianer, moturs, och från den positiva horisontella x-axeln. Här kan ni rita en figur (!). Avståndet från origo till (a,b) ges av Pythagoras Sats som $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Om $(a,b) \neq (0,0)$ så finns det en unik vinkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ sådan att

$$r\cos(\varphi) = a \quad \text{och} \quad r\sin(\varphi) = b.$$

Detta betyder att varje talpar $z = (a,b)$ kan beskrivas med ett avstånd r och en vinkel φ. Talparet $(0,0)$ har avståndet noll, och vinkel noll. Sambandet ges av $z = (a,b) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$.

1.13. **Rotationsmatrisen.** Om vi skriver ett talpar $z = (a,b)$ i polära koordinater med avstånd r och vinkel φ, har vi $z = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. Detta betyder att matrisen Z som tillsvarar talparet z ges som

$$Z = \begin{bmatrix} r\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Notera nu att Z är rT_φ, där T_φ är matrisen som representerar den linjära avbildning som beskriver en rotation med φ grader, moturs omkring origo. Kolla upp notaterna från (?[1]).

Exempel 1.14. Positiva reella tal a har avståndet $a = |a|$ och vinkeln är noll. Negativa tall a har avståndet $|a|$, och vinkeln är π. T.ex. har vi att talparet

$$(-5, 0) = (5\cos(\pi), 5\sin(\pi)).$$

Talparet $\omega = (0, 1)$ har avståndet 1, och vinkeln är $\pi/2$, detta betyder att talparet som tillsvarar Ω ges som $(1\cos(\pi/2), 1\sin(\pi/2))$.

Lemma 1.15. *Låt $z = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ och $w = s\cos(\vartheta), s\sin(\vartheta))$ vara två talpar. Multiplikationen zw ges av talparet*

$$(rs\cos(\varphi + \vartheta), rs\sin(\varphi + \vartheta)).$$

Proof. Låt Z vara matrisen ovan som tillsvarar punkten z, och matrisen W som tillsvarar punkten w, är

$$W = \begin{bmatrix} s\cos(\vartheta) & -s\sin(\vartheta) \\ s\sin(\vartheta) & s\cos(\vartheta) \end{bmatrix}.$$

Vi vill beräkna produkten ZW. Vi har att $Z = rT_\varphi$ och $W = sT_\vartheta$, där T_α är rotationsmatrisen med vinkel α. Vi har tidligare visat att sammansätning av två linjära avbildningar ges av produktmatrisen. Detta betyder att rotera först med ϑ radianer, och därefter rotera med φ radianer, ges av matrisprodukten $T_\varphi T_\vartheta$. Men, att först rotera med ϑ och därefter med φ, är att rotera med totalt $\vartheta + \varphi$ radianer. Det vill säga att

$$T_\varphi T_\vartheta = T_{\varphi+\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \vartheta) & -\sin(\varphi + \vartheta) \\ \sin(\varphi + \vartheta) & \cos(\varphi + \vartheta) \end{bmatrix}$$

Detta ger nu att $ZW = rT_\varphi sT_\vartheta = rsT_{\varphi+\vartheta}$, vilket vi skulle visa. □

1.16. Notera nu att vi geometrisk förstår hur produkten zw går till. Vi multiplicerar avståndet r till $z = (a, b)$ med avståndet s till $w = (c, d)$, och får avståndet rs till zw. Vinkeln till z adderas till vinkeln till w, och ger vinkeln till zw.

Lemma 1.17. *Om $z = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ är nollskild, då ges inversen som*

$$z^{-1} = (\frac{1}{r}\cos(-\varphi), \frac{1}{r}\sin(-\varphi)).$$

Proof. Påståendet följer från Lemma (1.15) och det faktum att $(1, 0) = (1\cos(0), 1\sin(0))$ är identitetselementet. □

Exempel 1.18. Betrakta talparet $z = (1, 1)$. Vi vill beräkna z^n, för olika heltal $n > 0$. I poära koordinater har vi att z har avståndet $\sqrt{2}$, och vinkeln är $\pi/4$. Detta ger att

$$z^n = (\sqrt{2}^n \cos(\pi n/4), \sqrt{2}^n \sin(\pi n/4).$$

[1] har vi inte gjort detta?

2. Information

Nästa träff är tisdagen 5 april, klockan 15.30-17.00, sal E36.

Department of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden
E-mail address: skjelnes@kth.se