1. Linjära avbildningar

1.1. Vi har att det Euklidiska n-rummet $\mathbf{R}^n$ är mängden av alla ordnade reella tal

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \text{ rella tal } x_i, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Elementen $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $\mathbf{R}^n$ kallas för punkt eller vektor.

En avbildning $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ är en tillordning som till varje punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $\mathbf{R}^n$ anger en punkt $f(x)$ i $\mathbf{R}^m$. Avbilndingar kallas också för funktioner.

Exempel 1.2. Ett exempel på en avbildning $f\colon \mathbf{R}^{101} \longrightarrow \mathbf{R}^{17}$ är avbildningen som skickar $x = (x_1, \dots, x_{101})$ till dets 17 första koefficienter, $f(x) = (x_1, \dots, x_{17})$.

Exempel 1.3. Ett annat exempel på en avbildning $f\colon \mathbf{R}^{101} \longrightarrow \mathbf{R}^{17}$ är avbildningen som skickar $(x_1, \dots, x_{101})$ till punkten $(1, 0, \dots, 0, 17)$.

1.4. Matrisavbildningar. De avbildningar vi är interesserade av kommer från matriser. Låt $A = (a_{i,j})$ vara en $(m \times n)$-matris. Som brukligt skriver vi element i $\mathbf{R}^n$ som $(n \times 1)$-matriser. Matrisen A ger vid matrismultiplication en avbildning $T_A\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Avbildningen skickar en vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ till

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}.$$

Detta skall tolkas som att $x = (x_1, \dots, x_n)$ skickas till

$$T_A(x) = (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots, a_{a,n}x_n, \dots, a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n).$$

Notera att matrisen är $(m \times n)$, och att avbildningen går från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$.

Exempel 1.5. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detta ger en avbildning $T_A\colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ som skcikar (x, y, z, w) till

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

Skriver vi ut detta får vi att avbildningen skickar (x, y, z, w) till

$$(x + 2y - 4z - 4w, 2x + 4y, 2x + 3y + 2z + w).$$

Specielt har vi att vektorn $(1, 0, 1, -1)$ skickas till $(1, 1, 3)$.

Definition 1.6. En avbildning $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ är *linjär* om

$$f(av + bw) = af(v) + bf(w),$$

för alla tal a och b, och alla vektorer v och w i $\mathbf{R}^n$.

1.7. Notera att en vektor $v = (v_1, \ldots, v_n)$ i $\mathbf{R}^n$ kan skrivas som

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n,$$

där $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ är vektorn med 1 på i'te komponent, och noll på alla de andra komponenterna. Om avbildningen f är linjär har vi att

$$f(v) = v_1 f(e_1) + v_2 f(e_2) + \cdots + v_n f(e_n). \tag{1.7.1}$$

Detta är en ekvivalent beskrivning av linjäritet.

Lemma 1.8. *Låt $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ vara en avbildning. Avbildningen är linjär är ekvivalent med att avbildningen satisfierar (1.7.1) för alla vektorer v i $\mathbf{R}^n$.*

Proof. Se uppgifterna. □

Exempel 1.9. Kolla nu att avbildningen i Exempel (1.2) är linjär, och att avbildningen i Exempel (1.3) inte är linjär.

Notera också att en linjär avbildning är bestämd av sin värkan på vektorerna $e_1, \ldots, e_n$. Om vi känner $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ då kan vi använda (1.7.1) för att bestämma $f(v)$ för godtyckliga vektorer v i $\mathbf{R}^n$.

Lemma 1.10. *Låt $f\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ vara en linjär avbildning. Låt A vara $(m \times n)$ matrisen*

$$A = \left[f(e_1) \cdots f(e_n) \right],$$

där kolumn i är vektorn $f(e_i)$ i $\mathbf{R}^m$, för $i = 1, \ldots, n$. Då har vi att $f = T_A$, dvs den linjära avbildningen f ges vid multiplication med matrisen A.

Proof. Se uppgifterna. □

Exempel 1.11. Låt $T_A\colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen A i Exempel (1.5). Vi har att vektorn $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ skickas till $T_A(e_3) = (-4, 0, 2)$, vilket är kolumn 3 i matrisen A.

1.12. Bild. Givet en matris A och låt $T_A\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ vara den tillhörande linjära avbildning. Fixera en vektor $b = (b_1, \ldots, b_m)$ i $\mathbf{R}^m$. Vi vill bestämma vilka vektorer $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{R}^n$ som skickas tilll b vid avbildningen T_A, det vill säga

$$T_A(x) = b.$$

Skriver vi ut detta erhåller vi

$$T_A(x) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

För att dessa två matriser skall vara lika måste de vara lika koefficientvis. Detta ger oss ekvationssystemet

$$(\star) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + d_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Dessa vet vi hur vi löser.

Exempel 1.13. Låt $T_A \colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildningen vi får från matrisen A i Exempel (1.5). Låt $b = (b_1, b_2, b_3)$ vara en fixerad, men godtycklig, vektor i $\mathbf{R}^3$. Vi skall nu bestämma alla vektorer (x, y, z, w) i $\mathbf{R}^4$ som skickas till b under avbildningen T_A. Vi har att $T_A(x, y, z, w) = b$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 4y - 4w & = & b_1 \\ 2x + 4y & = & b_2 \\ 2x + 3y + 2z + w & = & b_3 \end{cases}$$

Vi skriver ekvationssystemet som

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & | & b_1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & | & b_2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & | & b_3 \end{bmatrix}$$

och detta löser vi ved Gauss-Jordan elimination. Vi tar och adderar -2 gånger första raden till rad två och sedan till rad 3. Detta ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & | & b_1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & | & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & | & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}.$$

Vi byter plats på rad två och rad tre, multiplicerar den nya rad två med -1. Och tar sedan och adderar -2 gånger rad två till rad ett. Detta borde ge

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 16 & 14 & | & -3b_1 + 2b_3 \\ 0 & 1 & -10 & -9 & | & 2b_1 - b_3 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & | & b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}.$$

Slutligen, vi delar rad tre med 8, och sedan multiplicerar vi med -16 och adderar till rad 1, och vi mutiplicerar med 10 och adderar till rad 2. Detta ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & | & b_1 - 2b_2 + 2b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2}b_1 + \frac{5}{4}b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & \frac{1}{8}b_2 - \frac{1}{4}b_1 \end{bmatrix}.$$

Detta betyder att $w = t$, där t är godtyckligt tal. Och att $z = \frac{1}{8}b_2 - \frac{1}{4}b_1 - t$, $y = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{5}{4}b_2 - b_3 - t$ och slutligen att $x = b_1 - 2b_2 + 2b_3 + 2t$.

För fixerad $b = (b_1, b_2, b_3)$ har vi att de vektorer (x, y, z, w) i $\mathbf{R}^4$ som skickas till b via avbildningen T_A, är

$$(1.13.1) \quad (b_1 - 2b_2 + 2b_3 + 2t, -\frac{1}{2}b_1 + \frac{5}{4}b_2 - b_3 - t, \frac{1}{8}b_2 - \frac{1}{4}b_1 - t, t),$$

med godtyckliga t. Vi gör en slutlig koll. Ta en punkt a i $\mathbf{R}^4$ som är på form som ovan i (1.13.1), och vad skickas en sådan punkt till med avbildningen T_A,

$$\begin{aligned} T_A(a) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 - 2b_2 + 2b_3 + 2t \\ -\frac{1}{2}b_1 + \frac{5}{4}b_2 - b_3 - t \\ \frac{1}{8}b_2 - \frac{1}{4}b_1 - t \\ t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 - 2b_2 + 2b_3 + 2t + 2(-\frac{1}{2}b_1 + \frac{5}{4}b_2 - b_3 - t) - 4(\frac{1}{8}b_2 - \frac{1}{4}b_1) - t) - 4t \\ 2(b_1 - 2b_2 + 2b_3 + 2t) + 4(-\frac{1}{2}b_1 + \frac{5}{4}b_2 - b_3 - t) \\ 2(b_1 - 2b_2 + 2b_3 + 2t) + 3(-\frac{1}{2}b_1 + \frac{5}{4}b_2 - b_3 - t) + 2(\frac{1}{8}b_2 - \frac{1}{4}b_1 - t) + t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exempel 1.14. Vi återgåtill Exempel (**??**) ovan. Märk att om vi låter

$$P = (b_1 - 2b_2 + 2b_3, -\frac{1}{2}b_1 + \frac{5}{4}b_2 - b_3, b_2 - 2b_1, 0)$$

så är detta en fixerad punkt i $\mathbf{R}^4$, och $v = (2, -1, -1, 1)$ är en fixerad vektor i $\mathbf{R}^4$. Mängden (1.13.1) kan vi skriva som

$$P + t \cdot v,$$

med godtyckliga tal t. Med andra ord beskriver detta en linje i $\mathbf{R}^4$. För varje vald punkt $b = (b_1, b_2, b_3)$ så finns det en linje i $\mathbf{R}^4$ som kollapsar till denna fixerade punkt under avbildningen T_A.

2. Uppgifter

Uppgift 1. Gör Uppgift 1 (sida 117), sektion 4.3.12 i häftet.

Uppgift 2. Gör Uppgift 2 (sida 117), sektion 4.3.12 i häftet.

Uppgift 3. Gör Uppgift 9 (sida 119), sektion 4.3.12 i häftet.

Uppgift 4. Visa Lemma (1.8).

Uppgift 5. Visa Lemma (1.10).

Nästa tillfälle. Nu blir det jullov och välbehövd vila. Det blir spännande att se hur många av er som forstätter också efter jul. Alla! hoppas jag. Vi är i princip halvvägs genom kursen. Det blir mera teori första halvan efter jul, determinanter bla, medan den andra halvan kommer att handla om tillämpningar. Ha ett fint jullov.

Department of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden
E-mail address: `skjelnes@kth.se`