Institutionen för matematik, KTH
R. Skjelnes

Tentamensskrivning, 2002-10-16, kl 08.00–13.00.
5B1307, Linjär Algebra g.k.

Betygsgränserna för 4 och 5 är preliminärt 14 respektive 24 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning.
Inga hjälpmedel är tillåtna. Lykke til!

---

1. Låt $V = P_m(x)$ vara det reella vektorrummet av polynom i en variabel x, och av grad mindre eller lika med det fixerade heltalet $m \geq 0$. Låt $T : V \to V$ vara den linjära avbildningen som skickar en vektor $p(x) \in V$ till
$$T(p(x)) = p(2)\frac{dp(x)}{dx}.$$
a) Bestäm en bas för Range (T). (4p)
b) Bestäm egenvärdena till T. (4p)
Låt $m = 2$. Vektorrummet $P_2(x)$ ger vi inreproduktstrukturen
$$< p(x), q(x) >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$
c) Hitta en ON-bas för $P_2(x)$. (4p)
d) Bestäm en matrisrepresentation till T^*; den adjungerade operatorn till $T : P_2(x) \to P_2(x)$. (4p)

2. Låt $Mat_{m,m}$ vara vektorrummet av kvadratiska $(m \times m)$-matriser (här är $m > 0$ ett fixerat heltal). Vi säger att en kvadratisk matris A är nilpotent om det finns ett heltal $r > 0$ sådan att $A^r = 0$ (observera att talet r beror på matrisen A). Låt $Nil \subseteq Mat_{m,m}$ vara delmängden av nilpotenta matriser.
a) Låt A och B vara två nilpotenta matriser med i Nil. Antag att $AB = BA$. Visa att matrisen $A + B$ är nilpotent. (4p)
b) Visa eller motbevisa att Nil är ett delrum av $Mat_{m,m}$. (6p)

3. Låt V vara ett ändligt dimensionellt inreproduktrum (över F), låt $T \in L(V)$ vara en operator och låt T^* vara dess adjungerade operator. Sätt $S = T \circ T^*$ och låt $p(x)$ vara ett polynom med koefficienter i F. Visa följande påstående. För inreproduktrummet V finns det en ON-bas $\beta = (e_1, \ldots, e_m)$ av egenvektorer till operatorn $p(S)$. (8p)

Lösningsförslag till tentamen i 5B1307, Linjär Algebra g.k, 2002-10-16.

1. Avbildningen T är tyvärr inte linjär, vilket ble observerad under tentamenen. Istället för T skall man betrakta derivationsoperatoren D. Har man löst uppgiften med antagandet att T är linjär får man självklart full poäng.

Uppgift a). Vi har att $(1, x, \ldots, x^m)$ är linjärt oberoende och derför en bas för V, sådan att $(T(1), T(x), \ldots, T(x^m))$ spänner upp vektorrummet Range(T). Vi har att

$$T(x^m) = m2^m x^{m-1}, \quad D(x^m) = mx^{m-1}$$

sådan att $(T(x), \ldots, T(x^m))$ (respektivt $(D(x), \ldots, D(x^m))$ är linjärt oberoende och dermed en bas. Multiplicerar man bort skalärerna $m2^m$ får man tilbaka dom $m-1$ första vektorerna i basen $(1, x, \ldots, x^m)$.

Svar: En bas är $(1, x, \ldots, x^{m-1})$.

Uppgift b). Matrisrepresentationen till T med avseende på basen $(1, x, \ldots, x^m)$ blir den övretriangulära matrisen

$$M_T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \\ \vdots & \ddots & 0 & m2^m \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \\ \vdots & \ddots & 0 & m \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

varifrån vi leser av att det enda egenvärdet är 0. **Svar:** Egenvärdet är 0

Uppgift c). Vi vill använda Gram-Schmidt på basen $(1, x, x^2)$ för att fremskaffa en ON-bas. Låt $u' = 1$. Vi har att $< u', u' >= 2$, sådan at vektoren

$$u = \frac{u'}{||u'||} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

har längd 1. Låt nu

$$v' = x - < u, x > u = x$$

då $< 1, x >= 0$. Vi har att $< v', v' >=< x, x >= \frac{2}{3}$ sådan att

$$v = \frac{v'}{||v'||} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

är vinkelrät på u och har längd 1. Slutligen låter vi

$$w' = x^2 - < v, x^2 > v - < u, x^2 > u = x^2 - < u, x > u = x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, x > u = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Denna vektor w' är då vinkelrät på båda vektorerna u och v. Vi vill normalisera denna och har att

$$< w', w' >=< x^2, x^2 > -\frac{2}{3} < x^2, 1 > +\frac{1}{9} < 1, 1 >= \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

Svar: En ON-bas är $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}})$.

Uppgift d). Vi tar och beräknar matrisrepresentationen til T med avseende på basen β som vi hittade i uppgift c). Vi har $T(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ (och $D(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$) och $T(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ (och $D(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x)) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$) och slutligen att

$$T(\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}) = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x,$$
$$D(\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}) = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x = \sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x.$$

vilket ger matrisrepresentationen

$$N_T = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N_D = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inreproduktrummet är reelt sådan at matrisrepresentationen till T^* (respektive D^*)med avseende på ON-basen vi har från uppgift c) är den transponerade till N_T (respektive N_D). **Svar:** Transponatet till N_T (N_D).

2. Om vi har at $AB = BA$ då vill

$$(A+B)^R = \sum_{i=0}^{R} \binom{R-i}{i} A^i B^{R-i},$$

där $A^0 = B^0 = I$. Vi har att om $n + m = R$ för två icke-negativa tal n, m, då måste antingen m eller n vara större enn halva R. Om $A^{r_1} = 0$, och $B^{r_2} = 0$ för några heltal r_1 och r_2, då låter vi R vara två gånger det största värdet av r_1 och r_2. Det följer då av ekvationen över at $(A+B)^R = 0$. Dvs, om A och B är nilpotenta, och vi har at $AB = BA$, då är också summan $A + B$ nilpotent.
Matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{och} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

är båda nilpotenta då $A^2 = B^2 = 0$, dock är deras summa $A + B$ ej nilpotent. Vi har nämligen at $(A+B)^2 = I$ sådan at $(A+B)^R = I$ om R är jämn, och om R är udda har vi at $(A+B)^R = A + B$. Vi har då at mängden Nil av nilpotentat matriser ej är ett delrum då mängden ej är sluten under addition.

---

3. Låt $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ vara ett godtycklig polynom med koefficienter $a_0, \ldots, a_n$ i F. Operatoren $S = T^*T$ är självadjungerad sådan att

$$p(S)^* = (a_0)^* + (a_1 S)^* + \cdots + (a_n S^n)^* = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 S + \cdots + \bar{a}_n S^n.$$

Vi delar beviset upp i 2 delar.
Det ena tilfället är om $F = \mathbf{R}$ dom reella talen. Då har vi att $p(S) = p(S)^*$; operatoren $p(S)$ är självadjungerad och den reella Spektral Satsen ger då att det finns en ON-bas av egenvektorer för $p(S)$.
Det andra tilfället är om $F = \mathbf{C}$ dom komplexa talen. Då påstår vi at $p(S)$ är en normal operator. Vi märker oss att då S är självadjungerad har vi att

$$(aS^p) \cdot (bS^q)^* = aS^p \bar{b} S^q = a\bar{b} S^{p+q} = (bS^q)^* (aS^p),$$

varifrån det följer att

$$p(S)p(S)^* = p(S)^* p(S).$$

Med andra ord är $p(S)$ normal och det följer från den komplexa Spektral satsen att det finns en ON-bas av egenvektorer för V.
