

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

**LIMITES DE DESEMPEÑO EN CONTROL DE
SISTEMAS MULTIVARIABLES CON CANALES DE
COMUNICACIÓN ADICIONALES E IMPERFECTOS**

Tesis de Grado presentada por

Patricio Esteban Valenzuela Pacheco

como requisito parcial para optar al título de

Ingeniero Civil Electrónico

y al grado de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica

Profesor Guía

Dr. Mario Salgado Brocal

Profesor Co-guía

Dr. Eduardo Silva Vera

Valparaíso, 2011.

TÍTULO DE LA TESIS:

**LIMITES DE DESEMPEÑO EN CONTROL DE SISTEMAS
MULTIVARIABLES CON CANALES DE COMUNICACIÓN
ADICIONALES E IMPERFECTOS**

AUTOR:

Patricio Esteban Valenzuela Pacheco

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de Magíster en Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Mario Salgado B.

Dr. Eduardo Silva V.

Dr. Alejandro Rojas N.

Valparaíso, Octubre de 2011.

*Dedicado a mis padres y a mi familia,
por su apoyo incondicional*

A Daniela, por todo su amor y comprensión

En memoria de Mauricio Díaz

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo es la culminación de un ciclo de actividad ardua y constante, el cual pudo ver la luz al final del camino gracias al apoyo incondicional de un gran número de personas. Mediante estas líneas quiero agradecer profundamente el apoyo sin límites de mis padres, Patricio y Brígida, y de mis hermanos, Cristian, Alex y Claudia, quienes supieron guiarme por este camino en aquellos momentos en los que sentía que era difícil seguir. Para ellos, vaya dirigido todo mi Amor y eterno agradecimiento.

Durante los últimos años de universidad tuve el apoyo y el Amor de una persona que ha sido un faro en la oscuridad y que me ha permitido ver la vida con otros ojos. Para Daniela, mi Amor, vayan también mis agradecimientos a través de estas líneas.

Ciertamente, los resultados presentados en este documento han sido fruto de la guía y los consejos entregados por mis profesores, Don Mario Salgado y Don Eduardo Silva, quienes supieron aconsejarme en todo momento, especialmente en aquellos en los cuales este trabajo parecía “empantanarse”. Sus sugerencias para resolver un problema y sus consejos fueron elementos fundamentales para que esta tesis adoptara la forma presentada en este escrito. A ellos también vaya mi profunda gratitud.

La vida permite aprender de las experiencias cotidianas, las cuales son fruto de lazos de amistad y fraternidad que se tejen entre las personas. A mis amigos vayan mis agradecimientos por todos sus consejos y apoyo brindados durante los momentos más difíciles, como así también por todos los momentos de alegría entregados. Agradezco profundamente su apoyo a mis amigos de universidad Sebastián *pipa* Pulgar, *Mati* García, Iván *cotito* Velásquez, Francisco *trucupancho* Vargas, Francisco *ninja* Romero, Rodrigo *machine* López, Ignacio Latorre, Eduardo Yucra, Cristian Carrasco, Felipe López, Alfred Rauch, Mauricio Moya, Michael Silva y a todos mis amigos y compañeros de estos años. También vayan mis agradecimientos a mis tíos Raúl Díaz y Teresa Ojeda, a mis profesores Marisol Vera y Eduardo Guerra, como así también a mis amigos de colegio Julio Cárcamo, Cristian Runin, Marcelo Lorca y Emilio Torres. Para ellos, vaya todo mi cariño y gratitud.

Quisiera dedicar unas líneas para quien me enseñó que la vida no es tan difícil como parece, que no existe el imposible, que todo se puede lograr si se desea. Deseo dedicar este trabajo a la memoria de mi querido amigo Mauricio Díaz, de quien he sentido su apoyo durante mis últimos años de universidad.

Para finalizar, decir que estoy en deuda por todo el apoyo y muestras de cariño recibidas, y que este logro no es más que una consecuencia directa de todo lo recibido por las personas aquí mencionadas, como también de muchas otras que, por motivos de espacio, no he podido incluir. A ellos vaya también toda mi gratitud.

Se agradece también el soporte económico entregado por la USM, por el proyecto Fondecyt 1100692, el proyecto Anillo ACT-53 y CONICYT, a través su programa de Formación de Capital Humano Avanzado.

RESUMEN

La presente tesis se enmarca en la teoría de control de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), de tiempo discreto, lineales e invariantes en el tiempo. El foco de este trabajo está en sistemas que poseen más salidas que entradas, conocidos como sistemas *altos*, los que pueden ser aumentados mediante la adición de nuevos canales de actuación, modificando así su estructura. El objetivo de esta modificación es mejorar el desempeño del sistema usando un esquema de control en lazo cerrado, considerando un índice de desempeño preestablecido.

Es evidente señalar que la calidad del control de un sistema mejora si se añaden nuevos canales de actuación, pues se dispone de un mayor número de señales para manipular las respuestas del sistema. Sin embargo, existen muy pocos resultados que cuantifican dichas mejoras; en consecuencia, son escasas las herramientas analíticas que permiten comparar las mejoras en el desempeño al incluir nuevos actuadores, con la calidad del control conseguida sin dichas entradas. Por lo tanto, resulta natural preguntar cuál es el impacto sobre la calidad del control, cuando se agregan nuevos canales de entrada a un sistema. Este cuestionamiento da lugar a los resultados presentados en esta tesis, indagando sobre la cuantificación de esta mejoría, bajo la suposición de que los canales agregados son imperfectos.

Con el propósito de establecer una cuantificación de las mejoras en el control, esta tesis hace uso de tópicos relacionados con *límites de desempeño*. La investigación sobre límites de desempeño requiere la elección de un criterio de medición, el cual es empleado para cuantificar el mejor desempeño que se puede lograr en una planta dada, en el conjunto de todos los controladores lineales que logran estabilizar al sistema en lazo cerrado. El criterio de desempeño más utilizado en la literatura es la energía del error de seguimiento, para una referencia tipo escalón. Sin embargo, este criterio sólo puede ser empleado en aquellos sistemas que consiguen seguimiento perfecto en estado estacionario como, por ejemplo, los sistemas *invertibles por la derecha* [1]. Estos sistemas tienen, al menos, igual número de entradas que salidas. Cuando el número de entradas es igual al número de salidas, se habla de sistemas *cuadrados*. Dado que los sistemas altos no poseen la característica de seguimiento antes descrita (salvo para casos particulares de la referencia), este índice no puede ser empleado para cuantificar el desempeño en dichos casos. Esto se debe a que, en sistemas altos, el número de grados de libertad disponibles para el control es menor que el número de salidas a ser controladas. En consecuencia, la energía del error de seguimiento ante referencias tipo escalón no puede ser empleada para cuantificar los beneficios de agregar nuevos

canales de control a un sistema alto.

Para evaluar comparativamente el desempeño de una planta alta y una planta aumentada con canales imperfectos, es necesario elegir un índice común que resuelva los problemas señalados para plantas altas. Como primera contribución se presentan formas cerradas para dos índices de desempeños diferentes, ambos basados en la energía del error de seguimiento: uno supone la existencia de una perturbación de entrada a la planta de tipo impulso, en tanto que el segundo estudia referencias decrecientes en el tiempo. La naturaleza de dichos índices permite su uso en sistemas altos y cuadrados, posibilitando así una comparación entre los desempeños alcanzables en cada caso. Los resultados obtenidos permiten cuantificar el desempeño óptimo de sistemas altos y cuadrados en función de los rasgos dinámicos de la planta.

Finalmente, en base a los índices propuestos, se estudian los beneficios de agregar nuevos canales de actuación a un sistema alto, mediante la cuantificación de la mejora en el desempeño cuando se consideran estos nuevos canales. Los casos considerados incluyen a estructuras aumentadas con defectos en los nuevos canales de control, tales como limitaciones en su ancho de banda y retardos de propagación. Debido a la complejidad de las expresiones cerradas para los costos óptimos, la cuantificación se realiza mediante el análisis de casos.

Palabras Clave:

Límites de desempeño, sistemas lineales multivariados, sistemas no cuadrados, sistemas aumentados, mejoras de desempeño.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	III
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Estado del arte	2
1.2. Identificación de problemas	4
1.3. Principales contribuciones	4
1.4. Organización del documento	5
2. NOTACIÓN Y DEFINICIONES PRELIMINARES	6
2.1. Introducción	6
2.2. Elementos básicos	6
2.3. Definiciones Preliminares	7
2.3.1. Rango normal de matrices	7
2.4. Sistemas MIMO	7
2.4.1. Representación de sistemas multivariables	7
2.4.2. Realizabilidad de matrices de transferencia	8
2.4.3. Características dinámicas de sistemas multivariables	8
2.4.4. Estabilidad de sistemas multivariables	11
2.5. Espacios de funciones	11
2.5.1. El espacio \mathcal{L}_2	11
2.5.2. Subespacios de \mathcal{L}_2	12
2.6. Teorema de Parseval	14
2.7. Teorema del módulo máximo	14
2.8. Factorizaciones coprimas en \mathcal{RH}_∞	14
2.9. Factorización inner-outer e interactores	16
2.10. Lazos de control multivariable	19
2.10.1. El problema de control	19
2.10.2. Requisitos en un lazo de control	20
2.10.3. Parametrización de controladores	22
2.11. Resumen	24

3. LÍMITES DE DESEMPEÑO EN SISTEMAS AUMENTADOS: PROBLEMA DE REGULACIÓN	25
3.1. Introducción	25
3.2. Índice de desempeño para el problema de regulación	26
3.3. Problema de regulación en sistemas altos	27
3.3.1. Formulación del problema	27
3.3.2. Desempeño óptimo de regulación: caso general	28
3.3.3. Desempeño óptimo de regulación: plantas SIMO	32
3.4. Problema de regulación en sistemas aumentados	35
3.4.1. Formulación del problema	36
3.4.2. Desempeño óptimo de regulación en sistemas aumentados	37
3.5. Comparación de desempeño en sistemas altos y aumentados	41
3.5.1. Mejoras en el desempeño: resultado intuitivo	41
3.5.2. Mejoras en el desempeño: un ejemplo simple	42
3.6. Resumen	44
4. LÍMITES DE DESEMPEÑO EN SISTEMAS AUMENTADOS: PROBLEMA DE SEGUIMIENTO	45
4.1. Introducción	45
4.2. Índice de desempeño para el problema de seguimiento	46
4.3. Problema de seguimiento en sistemas altos	47
4.3.1. Formulación del problema	47
4.3.2. Desempeño óptimo de seguimiento en sistemas altos	48
4.4. Problema de seguimiento en sistemas aumentados	53
4.4.1. Formulación del problema	53
4.4.2. Desempeño óptimo de seguimiento en sistemas aumentados	55
4.5. Problema de seguimiento en sistemas aumentados con canales defectuosos	58
4.5.1. Formulación del problema	58
4.5.2. Desempeño óptimo de seguimiento en sistemas aumentados: caso general	59
4.6. Comparación de desempeño en sistemas altos y aumentados	64
4.6.1. Mejoras en el desempeño	64
4.6.2. Mejoras en el desempeño: un ejemplo simple	71
4.7. Resumen	73
5. ANÁLISIS DE CASOS	75
5.1. Introducción	75
5.2. Impacto de los ceros de FNM en el desempeño	76
5.2.1. Impacto de los ceros de FNM de entrada en el desempeño óptimo	76
5.2.2. Impacto de los ceros de FNM de salida en el desempeño óptimo	77
5.2.3. Impacto de los retardos en el desempeño óptimo	80
5.3. Impacto de las restricciones de ancho de banda en el desempeño	81
5.3.1. Impacto del filtro de penalización en el desempeño óptimo	82
5.3.2. Impacto de la restricción de ancho de banda en el desempeño óptimo	82
5.4. Impacto del número de canales de control en el desempeño	84

Resumen	vii
5.5. Resumen	87
6. CONCLUSIONES	88
6.1. Trabajo futuro	89
A. APÉNDICE A	91
A.1. Cálculo de residuos de los Teoremas del Capítulo 3	91
A.1.1. Cálculo de los residuos asociados a la integral del Teorema 3.2	92
A.1.2. Cálculo de los residuos asociados a la integral del Teorema 3.3	93
B. APÉNDICE B	95
B.1. Resultados para sistemas aumentados en el Capítulo 4	95
C. APÉNDICE C	103
C.1. Ejemplo de elección del filtro de penalización	103
REFERENCIAS	107

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal en la teoría de control automático es lograr que la respuesta de un sistema siga lo más cercanamente posible a una referencia prescrita, en presencia de perturbaciones, ruido de medición e incertezas en el modelo del sistema. Para lograr dicho objetivo se pueden emplear diferentes aproximaciones al problema, considerando desde prealimentación de la perturbación y filtraje del ruido de medición, hasta mejoras en la calidad del modelo del sistema y adición de nuevos canales de control a la planta. Esta última alternativa implica la instalación de nuevos actuadores en el proceso bajo control, lo cual agrega dinámicas que relacionan las nuevas entradas con las salidas.

La adición de nuevos canales de control implica nuevos grados de libertad para manipular las respuestas del sistema, lo que permite concluir que existe una mejora en la calidad del control de la planta, cuando se implementa un esquema de lazo cerrado. Si bien este resultado es intuitivo, es natural preguntar cuál es el impacto en la calidad de control de un sistema, cuando se agregan nuevos canales de actuación. Esta pregunta constituye la motivación principal para el desarrollo de esta tesis.

Con el propósito de medir la calidad de control, esta tesis emplea herramientas pertenecientes al tópico de límites de desempeño. El estudio de límites de desempeño que se presenta en esta tesis está enmarcado en el análisis de lazos de control de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), de tiempo discreto, lineales e invariantes en el tiempo (LTI). Específicamente, la presente tesis analiza comparativamente dos clases de sistemas: aquéllos en los que el número de entradas es menor al número de salidas (normalmente llamados sistemas *altos*), y aquéllos en que el número de entradas es igual al número de salidas (normalmente llamados sistemas *cuadrados*). Se entiende que ambos sistemas se derivan uno del otro, ya sea por adición de canales de entrada (de sistemas altos a cuadrados) o por eliminación de canales (de sistemas cuadrados a sistemas altos). En todo caso, se supone que las funciones de transferencia, tanto para plantas altas como para plantas cuadradas son de rango completo, casi en todas partes (*almost everywhere*).

Se entiende por *límite de desempeño* al menor valor alcanzable por un índice que mide el desempeño de un lazo de control. Para ello es necesario definir una función de costo. En esta tesis se usarán límites de desempeño para cuantificar los beneficios de agregar canales de control a un sistema alto, convirtiéndolo en una planta cuadrada. Para efectuar lo anterior, se obtendrán expresiones cerradas que cuantifican el desempeño alcanzable en cada sistema, para luego calcular la diferencia entre ambos y determinar las mejoras obtenidas al agregar

canales adicionales. Como se estudiará en capítulos posteriores, la función de costo debe ser definida de forma tal que permita comparar justamente estructuras altas y cuadradas para una misma configuración de lazo cerrado.

Resultados previos sobre límites de desempeño existen y han sido reportados en la literatura, tanto para sistemas altos como cuadrados. Las secciones siguientes resumen los resultados existentes.

1.1. Estado del arte

La investigación sobre límites de desempeño está relacionada teóricamente con los trabajos de Bode [2], dando lugar al desarrollo de nuevos resultados y la profundización de algunos problemas de control (véase, e.g., [1], [3], [4], [5], y sus referencias). La contribución de los resultados mencionados está en el desarrollo de expresiones cerradas para el desempeño alcanzable en sistemas de control, bajo diferentes configuraciones. En [4] se presenta el desempeño óptimo de sistemas MIMO para el seguimiento de referencias tipo escalón, rampa y sinusoidal, como función de los polos inestables, ceros de fase no mínima (FNM) y las direcciones asociadas a ellos. Sin embargo, la limitación de estos resultados está en que sólo son aplicables a sistemas que son invertibles por la derecha (con mayor, o a lo menos igual, número de entradas que salidas). Resultados similares son presentados en [6], donde el estudio se centra en sistemas invertibles por la derecha con retardos arbitrarios. En dicho documento, se obtienen expresiones cerradas para el mejor desempeño alcanzable por un sistema, sujeto a referencias tipo escalón. Los resultados presentados reflejan el impacto de los ceros de FNM y los retardos en el costo óptimo obtenido, así como también las direcciones asociadas a ellos.

Resultados adicionales han sido presentados en [7] y [8]. En ellos se calculan límites de desempeño para sistemas con restricciones en la ubicación de los polos de lazo cerrado. En esos trabajos se obtienen formas cerradas para el costo óptimo asociado, los que dependen no sólo de los ceros de FNM y polos inestables de la planta, sino que también de la región en que se desea asignar los polos de lazo cerrado.

Una clase de sistemas particularmente interesantes son los sistemas altos, i.e., aquellos donde el número de salidas es mayor al número de entradas disponibles. La relevancia de su estudio está en las diferentes aplicaciones prácticas donde es posible encontrar esta clase de plantas, dentro de las cuales se encuentran la reducción de vibraciones en estructuras flexibles [9], el control de represas [10], situaciones que involucran piezoactuadores [11], control activo de ruido en conductos [12], reactores químicos [13] y sistemas de rodamientos magnéticos [14].

Resultados sobre límites de desempeño en plantas altas han sido reportados en [15], [16], [17]. Un problema fundamental que existe al trabajar con este tipo de plantas es que sus matrices de transferencia no son invertibles por la derecha, lo cual impide que el error estacionario de seguimiento para referencias escalón sea cero en todos los canales, salvo en casos particulares. El tema de límites de desempeño para una clase particular de plantas altas ha sido tratado en [15]. En dicho trabajo, se supone que la dirección de la referencia está en el subespacio barrido por la ganancia de la planta a frecuencia cero. Considerando el supuesto anterior, [15] presenta una forma cerrada para el mejor desempeño alcanzable en

sistemas de una entrada y múltiples salidas (SIMO). Si bien [15] establece una forma cerrada para el desempeño de seguimiento en sistemas SIMO, este resultado no es lo suficientemente general como para permitir una correcta comparación entre los desempeños alcanzables en sistemas altos y cuadrados, pues no abarca todas las posibles direcciones de la referencia.

Expresiones similares a las de [15] son presentadas en [18], trabajo que estudia las limitaciones en desempeño de sistemas SIMO de tiempo discreto, suponiendo que la referencia es de tipo escalón y que se penaliza la energía de control. Al igual que en [15], los resultados de [18] sólo son válidos bajo el supuesto de que la dirección de la referencia está en el subespacio barrido por la ganancia de la planta a frecuencia cero. Las formas cerradas del desempeño dadas en [18] demuestran que el costo óptimo puede expresarse como función de los ceros de FNM de cada uno de los elementos escalares de la planta SIMO, de los polos inestables del sistema y de la respuesta en frecuencia de la planta.

Otros resultados relevantes para sistemas altos han sido reportados en [16]. En dicho trabajo se presentan expresiones cerradas para el desempeño alcanzable en sistemas SIMO, suponiendo que existe una perturbación de entrada tipo impulso, y bajo el supuesto de que la planta posee sólo un cero en infinito.

Los trabajos comentados anteriormente describen el desempeño alcanzable por sistemas tanto invertibles como no invertibles por la derecha, empleando para ello diferentes funciones de costo y diferentes supuestos. Todos ellos coinciden en que existe una relación estrecha entre el costo óptimo en un lazo de control y la estructura de la planta que debe ser controlada. Sin embargo, en ninguno de ellos se ha estudiado el impacto de agregar (o suprimir) canales de actuación. Es más, los costos óptimos obtenidos en cada uno de los artículos presentados no pueden emplearse para cuantificar los beneficios de convertir una planta alta en cuadrada, pues los supuestos sobre los cuales se desarrollan tales expresiones son diferentes entre sí. Por lo tanto, resulta necesario definir una función de costo que permita comparar justamente los beneficios de agregar nuevos canales de actuación a un sistema de control.

Por otro lado, los trabajos comentados suponen que los canales de control son perfectos. Sin embargo, existen ocasiones donde tal supuesto no es válido. El estudio de sistemas de control con comunicación defectuosa está en el centro de la teoría de *control sobre redes*, [19], [20], [21], [22], [23]. Uno de los primeros resultados en esta área corresponden a los reportados en [19], en donde se establecen cotas inferiores para la relación señal a ruido y la capacidad del canal de realimentación, a fin de garantizar un lazo cerrado estable. Un resumen de resultados en el tópico de control sobre redes es presentado en [20], en donde se estudian las diferentes aproximaciones al problema, las cuales van desde control con pérdida de datos y retardos en el canal de realimentación, hasta estabilidad de sistemas de control con retardos de muestreo.

En resumen, los resultados descritos anteriormente permiten expresar el desempeño óptimo alcanzable por sistemas invertibles y con ciertas limitaciones, a través de índices particulares para cada uno de los sistemas mencionados. Los supuestos sobre la estructura de la planta y la naturaleza de las referencias empleadas constituye un aspecto que impide unificar los resultados existentes. Esto, a su vez, impide usar los resultados existentes para cuantificar los beneficios de agregar nuevos canales de control a un sistema alto. En consecuencia, es necesario establecer un problema de control que sea común a sistemas altos y cuadrados y emplear este índice para cuantificar los beneficios de agregar nuevos canales de actuación a

un sistema alto para transformarlo a una planta cuadrada. Finalmente, se debe estudiar el efecto de incorporar defectos de naturaleza determinística a los canales de control, mediante la cuantificación del detrimento en los beneficios de emplear sistemas aumentados por sobre plantas altas. Los defectos determinísticos aquí considerados son retardos y limitaciones en el ancho de banda.

1.2. Identificación de problemas

Debido a las restricciones que impone la estructura de una planta alta y sus diferencias con la estructura de un sistema cuadrado, surgen las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué índice debiese usarse para cuantificar los beneficios de agregar nuevos canales de control?
2. ¿Cuál es el impacto sobre la calidad del control de un sistema aumentado si los nuevos canales de actuación poseen defectos determinísticos (e.g., retardos)?

Las interrogantes anteriores sirven de motivación para el desarrollo de la presente tesis. Como se puede apreciar en la revisión bibliográfica, estos cuestionamientos no han sido resueltos.

1.3. Principales contribuciones

Las principales contribuciones de esta tesis son:

- Definición de dos índices de desempeño que permiten comparar en forma justa los beneficios de agregar nuevos canales de control a una planta alta y de quitar canales a una planta cuadrada. Los índices de desempeño empleados corresponden a la suma cuadrática del error de seguimiento. En base a estos índices, se resuelven dos problemas diferentes:
 - Se obtiene una forma cerrada para el mejor desempeño alcanzable en un lazo de control bajo perturbaciones tipo Delta de Kronecker, tanto para sistemas altos como cuadrados, bajo supuestos adecuados sobre la naturaleza de la perturbación. El costo óptimo queda expresado en función de los ceros de FNM de la planta, tanto finitos como infinitos.
 - Se presenta una expresión cerrada para el mejor desempeño alcanzable en un lazo de control, cuando la referencia es definida como una señal decreciente en el tiempo. Este tipo de referencia permite resolver el problema de seguimiento perfecto para plantas altas, garantizando que el índice de desempeño converja a un valor finito para esta clase de sistemas. Los resultados se expresan en función del número de canales de salida, de los ceros de FNM del sistema y de la velocidad de decaimiento de la referencia empleada.
- Estudio de los beneficios de agregar canales de actuación con diferentes características, utilizando los índices definidos anteriormente. Se considera, inicialmente, que los

canales adicionales son perfectos, i.e., que no poseen limitaciones en su ancho de banda, ni contienen retardos. Posteriormente se estudia el caso en que los canales poseen defectos, ya sea limitaciones en su ancho de banda, o retardos. Dada la complejidad de las formas cerradas para los costos óptimos, el estudio de los beneficios se hará a través de análisis de casos. Estos ejemplos permiten apreciar el efecto de los retardos y el ancho de banda sobre el desempeño óptimo alcanzable.

Parte del trabajo desarrollado en esta tesis ha dado origen a la publicación [24].

1.4. Organización del documento

El trabajo desarrollado contempla 6 capítulos (incluyendo éste). Los contenidos de cada capítulo se describen a continuación:

Capítulo 2: En este capítulo se presenta la notación y las definiciones empleadas en esta tesis.

Capítulo 3: En este capítulo se discuten problemas de regulación, cuando la perturbación es definida como un Delta de Kronecker. Se introduce el índice de desempeño a optimizar y se obtienen formas cerradas para el desempeño óptimo alcanzable en cada tipo de planta estudiada. Adicionalmente, se presentan algunos resultados complementarios que respaldan los beneficios de transformar un sistema alto en uno cuadrado, mediante la adición de nuevos canales de control.

Capítulo 4: En este capítulo se discuten problemas de seguimiento cuando la referencia es definida como una señal decreciente en el tiempo. Utilizando el mismo índice de desempeño definido en el capítulo anterior, se obtienen formas cerradas para el costo óptimo alcanzable por cada sistema estudiado. Se estudian casos particulares, en donde los nuevos canales de control poseen defectos determinísticos, tales como limitaciones en su ancho de banda y retardos.

Capítulo 5: En este capítulo se hace un estudio de casos que permite evaluar los beneficios de agregar canales de control adicionales a una planta alta. Se consideran distintas plantas y limitaciones de comunicación. Los resultados para cada caso se presentan en forma separada, destacando así el impacto de cada uno de ellos sobre el costo óptimo.

Capítulo 6: En este capítulo se presentan las conclusiones de esta tesis y algunas ideas para trabajo futuro.

NOTACIÓN Y DEFINICIONES PRELIMINARES

2.1. Introducción

El presente capítulo define la notación empleada en esta tesis. Adicionalmente, se introducen definiciones útiles para la demostración de los resultados que se presentarán en capítulos posteriores.

2.2. Elementos básicos

En esta sección se introducirá notación básica que se emplea en forma recurrente durante esta tesis. Con el propósito de diferenciar funciones (o números) matriciales y escalares, se denotará con letras negritas a los términos matriciales. Se denotará por \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} el conjunto de los números naturales, naturales incluyendo al 0, enteros, reales y complejos, respectivamente. Para referirse a conjuntos numéricos de múltiples dimensiones, se emplearán superíndices donde sea necesario. Se define $j = \sqrt{-1}$. Dado un número $x \in \mathbb{C}$, se definen \bar{x} y $|x|$ como su conjugado y su módulo, respectivamente. Si y es una variable aleatoria, $\mathcal{E}\{y\}$ representa su valor esperado. Para una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, con $n, m \in \mathbb{N}$, se define a \mathbf{A}^T , \mathbf{A}^H , \mathbf{A}^\dagger y $\text{rank}\{\mathbf{A}\}$ como su traspuesta, traspuesta conjugada (o matriz hermitiana), pseudo-inversa y su rango, respectivamente. Si $n = m$, entonces \mathbf{A}^{-1} , $\text{traza}\{\mathbf{A}\}$ y $\det\{\mathbf{A}\}$ definen su inversa, traza y determinante, respectivamente. Definiendo $i, j, n, m \in \mathbb{N}$, con $i \leq n$ y $j \leq m$, se denota como $a_{ij} \in \mathbb{C}$ el término perteneciente a la i -ésima fila y la j -ésima columna de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Se define como $\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ una matriz diagonal en $\mathbb{C}^{n \times n}$, cuyos términos en la diagonal son los elementos $a_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, ordenados desde $i = 1$ hasta $i = n$. Para una matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, se define la norma Fröbenius como [25]

$$\|\mathbf{B}\|_F \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |b_{ij}|^2} = \sqrt{\text{traza}\{\mathbf{B}^H \mathbf{B}\}}. \quad (2.2.1)$$

Finalmente, se define como \mathbf{I}_n la matriz identidad de dimensiones $n \times n$, en tanto que la matriz nula será denotada por $\mathbf{0}$.

2.3. Definiciones Preliminares

2.3.1. Rango normal de matrices

Un concepto de importancia para las secciones posteriores es el rango normal de una matriz, cuya definición se entrega a continuación.

Definición 2.1 (Rango normal de una matriz). *Dada una matriz $\mathbf{P}[z] \in \mathbb{C}^{n \times m}$, se define el rango normal de la matriz $\mathbf{P}[z]$ como el máximo rango admisible para algún valor de $z \in \mathbb{C}$. El rango normal de una matriz $\mathbf{P}[z]$ será denotado como $\text{normal rank}\{\mathbf{P}[z]\}$.*

2.4. Sistemas MIMO

2.4.1. Representación de sistemas multivariables

Un sistema con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) de tiempo discreto, causal, lineal e invariante en tiempo se puede representar mediante las relaciones

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k], \quad \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k] \quad (2.4.2)$$

donde $\mathbf{y}[k] \in \mathbb{R}^n$ es el vector de salida, $\mathbf{u}[k] \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada y $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^p$ es el vector de estados del sistema. Las matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son las matrices de *estado*, *entrada*, *salida* y *paso directo*¹, respectivamente [26]. La segunda igualdad descrita en (2.4.1) define la condición inicial para el vector de estados. La descripción del sistema a través del conjunto de ecuaciones (2.4.1)-(2.4.2) se define como *representación en variables de estado* de un sistema.

La representación del sistema dada por el conjunto de ecuaciones (2.4.1)-(2.4.2) permite estudiar la evolución de cada uno de los p estados, los cuales pueden relacionarse con propiedades físicas del sistema. Esta evolución se define a través de ecuaciones recursivas, las cuales permiten establecer el valor del estado próximo $\mathbf{x}[k+1]$ en función del estado actual $\mathbf{x}[k]$ y del valor presente de la señal de control $\mathbf{u}[k]$. Si lo que se desea es establecer una relación directa entre la entrada y la salida del sistema, se puede emplear la relación

$$\mathbf{Y}[z] \triangleq \mathbf{G}[z] \mathbf{U}[z], \quad (2.4.3)$$

donde $\mathbf{Y}[z] \triangleq \mathcal{Z}\{\mathbf{y}[k]\}$ y $\mathbf{U}[z] \triangleq \mathcal{Z}\{\mathbf{u}[k]\}$ corresponden a las transformadas² \mathcal{Z} de la salida y de la señal de control, respectivamente. Por su parte, $\mathbf{G}[z]$ se define como la *matriz de transferencia*, la cual corresponde a la transformada \mathcal{Z} de la respuesta a delta de Kronecker del sistema, sujeta a condiciones iniciales nulas [26]. La relación entre la representación en variables de estado (2.4.1)-(2.4.2) y la definición (2.4.3) está dada por

$$\mathbf{G}[z] \triangleq \mathbf{C}(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (2.4.4)$$

¹Usualmente, la matriz de paso directo \mathbf{D} es nula en este tipo de representaciones. Esto se debe a que, en los sistemas físicos, la respuesta de un sistema sólo depende de valores pasados de la señal de control, exceptuando casos particulares.

²Para mayores detalles sobre la Transformada Zeta, se sugiere revisar [26].

Cabe destacar que la igualdad (2.4.4) permite describir unívocamente la matriz de transferencia a partir de la representación en variables de estado. Sin embargo, lo inverso no es posible, pues existen infinitas representaciones de estado para un mismo sistema [26], [27]. Un aspecto relevante es el hecho de que las dinámicas que se puedan observar en (2.4.1) no se reflejan necesariamente en (2.4.3). Esto se debe a que en el cálculo de la matriz de transferencia según (2.4.4) pueden existir cancelaciones entre polos y ceros. Estas cancelaciones están relacionadas con la pérdida de controlabilidad u observabilidad del sistema (ver [27], [28], [29]).

Las matrices de transferencia que serán empleadas en esta tesis son racionales en la variable z , además de tener todos sus coeficientes reales, lo cual es una característica de la descripción lineal de sistemas físicos. A esta clase de funciones se les denomina *reales racionales*, las cuales serán denotadas por $\mathcal{R}^{n \times m}$. El superíndice en este caso indica que la función posee n salidas y m entradas.

2.4.2. Realizabilidad de matrices de transferencia

Esta sección pretende introducir la noción de realizabilidad de sistemas cuando se trabaja con representaciones de sistemas en matrices de transferencia.

Definición 2.2 (Matriz de transferencia realizable [30]). *Una matriz de transferencia en $\mathbb{R}^{n \times m}$ se dice realizable si y sólo si admite una representación en variables de estado como la del conjunto de ecuaciones (2.4.1)-(2.4.2).*

La definición anterior permite establecer que una matriz de transferencia será realizable si y sólo si existe un sistema físico de la forma (2.4.1)-(2.4.2) que sea capaz de implementarlo en la realidad.

2.4.3. Características dinámicas de sistemas multivariables

En sistemas de una entrada y una salida (SISO), las características dinámicas (e.g., modos naturales y su ponderación en la respuesta a impulso del sistema) pueden ser observadas en forma explícita en la respectiva función de transferencia. Así, los ceros³ y polos corresponden a las raíces del numerador y denominador de la función de transferencia [26], [28]. No obstante, en sistemas multivariables, la definición de polos y ceros requiere de la definición de estructuras auxiliares, tal como lo son la forma de Smith-McMillan [32], [33] y las factorizaciones coprimas⁴ [34], [35], lo cual permite caracterizar los polos y ceros de un sistema MIMO. Debido a su simplicidad y fácil verificación, se introduce la siguiente definición de ceros de sistemas multivariables:

Definición 2.3 (Ceros de una matriz de transferencia [34]). *Sea $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}^{n \times m}$. Entonces c_0 es un cero de $\mathbf{G}[z]$ si y sólo si $\text{rank}\{\mathbf{G}[c_0]\} < \text{normal rank}\{\mathbf{G}[z]\}$.*

³Los ceros de un sistema se relacionan con la ponderación que se otorga en la salida a los modos que aparecen en la entrada del mismo, bajo ciertas condiciones iniciales [31]. Su ubicación en el plano complejo impone restricciones fundamentales sobre el comportamiento de un lazo de control [3], [28].

⁴A fin de mantener una lectura fluida de esta tesis, se introducirá la definición de factorizaciones coprimas de matrices de transferencia en la Sección 2.8.

La Definición 2.3 permite dar lugar al siguiente lema.

Lema 2.1 (Sobre ceros de una matriz de transferencia cuadrada [34]). *Sea $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}^{n \times n}$ una matriz de transferencia cuadrada y $\det\{\mathbf{G}[z]\} \neq 0$, casi en todas partes de $z \in \mathbb{C}$. Entonces c_0 es un cero de $\mathbf{G}[z]$ si y sólo si $\det\{\mathbf{G}[c_0]\} = 0$.*

La noción de ceros multivariados introducida en la Definición 2.3 será empleada en esta tesis. Sin embargo, existen diferentes formas de definir a los ceros de un sistema multivariable, ver [33].

Ceros de fase no mínima (FNM)

En el marco de esta tesis, se definirán términos que se emplearán para referirse a los ceros que imponen restricciones en las limitaciones de desempeño en control.

Definición 2.4 (Ceros de fase no mínima). *Sea $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}^{n \times m}$ y $c_0 \in \mathbb{C}$ un cero de $\mathbf{G}[z]$. Se dirá que c_0 es un cero de fase mínima (FM) si y sólo si $|c_0| < 1$, en caso contrario se dirá que es un cero de fase no mínima (FNM).*

Observación 2.1 (Sobre la definición de sistemas con ceros de FM y FNM). *Si $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}^{n \times m}$ es una planta que sólo posee ceros de fase mínima, entonces se dirá que el sistema es de fase mínima. Por otro lado, si $\mathbf{G}[z]$ posee al menos un cero de fase no mínima, entonces el sistema se denominará de fase no mínima.*

Los sistemas de tiempo discreto provienen usualmente del muestreo de sistemas de tiempo continuo. Una característica de los sistemas muestreados es la aparición de nuevos ceros, los que no tienen contraparte en el sistema de tiempo continuo subyacente [36], [37]. Uno de los rasgos que se hereda de los sistemas de tiempo continuo es el retardo de propagación, los cuales son tratados como polos en el origen en el sistema equivalente de tiempo discreto [36]. Estos polos en el origen pueden ser definidos como ceros en infinito, pues la matriz de transferencia pierde su rango normal cuando $z \rightarrow \infty$ (ver Definición 2.3). Adicionalmente, tales ceros pueden ser definidos como ceros de fase no mínima, como se propone en la Definición 2.4. En capítulos posteriores, se verá que esta última definición permitirá incorporar los retardos de propagación en la descripción del desempeño alcanzable en sistemas de tiempo discreto.

Una definición, relacionada con los ceros de FNM en infinito, es la siguiente

Definición 2.5 (Grado relativo). *Sea $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}^{n \times m}$. Se define como grado relativo al número de ceros de FNM en infinito de $\mathbf{G}[z]$.*

Matrices de transferencias propias e impropias

En sistemas de una entrada y una salida (SISO), es posible definir si una función de transferencia es estrictamente propia, bipropia o impropia según la diferencia entre el número de polos y de ceros del sistema [26], [28]. En el caso de sistemas multivariados, puede efectuarse la misma definición, con algunas modificaciones.

Definición 2.6 (Matrices de transferencia propias, impropias y bipropias [30]). *Considérese una matriz de transferencia $\mathbf{G}[z]$ de dimensiones $n \times m$, asociada a un sistema*

dinámico (real o no) con condiciones iniciales nulas y sometido a la excitación $\mathbf{u}[k] = \boldsymbol{\nu} \delta[k]$, donde $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ y $\delta[k]$ corresponde a la función delta de Kronecker. La matriz de transferencia se dice⁵:

- estrictamente propia si y sólo si $\mathbf{y}[0] = \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{C}^n$ (i.e., si no existen direcciones $\boldsymbol{\nu}$ para las cuales la excitación se manifieste instantáneamente en la salida),
- semi estrictamente propia si y sólo si $|\mathbf{y}[0]| < \infty$, $\forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{C}^n$ y $\exists \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{C}^n$ tal que $\mathbf{y}[0] = \mathbf{0}$,
- bipropia si y sólo si $0 < |\mathbf{y}[0]| < \infty$, $\forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{C}^n$, tal que $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$ (i.e., si siempre la excitación se manifiesta instantáneamente en la salida),
- propia si es bipropia, semi estrictamente propia o estrictamente propia,
- impropia si y sólo si $\exists \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{C}^n$ y $\exists k_0 < 0$ tal que $\mathbf{y}[k_0] \neq \mathbf{0}$ (i.e., una matriz de transferencia es impropia si no existe causalidad entre su entrada y su salida).

Observación 2.2 (Caso escalar [30]). En el caso de funciones de transferencias escalares, la dirección $\boldsymbol{\nu}$ puede adoptar dos valores diferentes: cero o diferente de cero. En dicho caso carece de sentido hablar de funciones semi estrictamente propias, pues a menos que se considere el caso en que $\boldsymbol{\nu}$ sea nulo, no es posible que la salida dé cuenta de cambios en la entrada en forma instantánea sólo para algunos valores de $\boldsymbol{\nu}$. Sólo hay funciones de transferencia escalares estrictamente propias, bipropias o impropias.

Una aproximación a la Definición 2.6 desde la perspectiva de la representación en variables de estado (2.4.1)-(2.4.2) se presenta en el siguiente lema:

Lema 2.2 (Propiedades de matrices propias [30]). Considérese una matriz de transferencia $\mathbf{H}[z]$ de dimensiones $n \times m$. Entonces,

1. $\mathbf{H}[z]$ es realizable si y sólo si es propia.
2. Si $\mathbf{H}[z]$ es propia,
 - a) es estrictamente propia si y sólo si la matriz \mathbf{D} asociada a cualquier realización de la misma es nula⁶.
 - b) es semi estrictamente propia si y sólo si la matriz \mathbf{D} asociada a cualquier realización de la misma es no nula, pero no posee rango completo por columnas (si $n \geq m$) o por filas (si $n < m$).
 - c) es bipropia si y sólo si la matriz \mathbf{D} asociada a cualquier realización de la misma posee rango completo por columnas (si $n \geq m$) o por filas (si $n < m$).

Demostración: Se invita al lector a revisar [30], donde se ofrece una demostración detallada de las afirmaciones presentadas. ■

Observación 2.3. En el caso de matrices de transferencias reales racionales, se denotará como $\mathcal{R}_p^{n \times m}$ a aquellas matrices que, perteneciendo a $\mathcal{R}^{n \times m}$, son propias, en tanto que $\mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$ denotará al conjunto de matrices de transferencia que son estrictamente propias.

⁵Note en estas definiciones que $|\mathbf{y}[0]| < \infty$ equivale a decir todas las componentes de $\mathbf{y}[0]$ son finitas, e $|\mathbf{y}[0]| > 0$ equivale a decir que no todas las componentes de $\mathbf{y}[0]$ son nulas [30].

⁶nótese que la matriz \mathbf{D} es independiente de la realización y de la minimalidad o no de la realización [30].

2.4.4. Estabilidad de sistemas multivariables

La estabilidad de sistemas es un aspecto fundamental en la teoría de control, debido a sus implicancias en el comportamiento de la respuesta de un sistema. A continuación se entrega una definición para la estabilidad de sistemas.

Definición 2.7 (Estabilidad de sistemas). *Se dice que un sistema es estable en sentido BIBO (Bounded Input Bounded Output) si y sólo si, para toda entrada y condición inicial acotadas, la respuesta del sistema permanece acotada.*

El concepto de estabilidad entregada en la Definición 2.7 es válida para toda clase de sistemas. En el caso de sistemas lineales, el concepto de estabilidad se relaciona con la ubicación de los polos en el plano complejo.

Definición 2.8 (Estabilidad de sistemas lineales multivariables). *Sea un sistema de tiempo discreto, lineal e invariante en el tiempo, cuya matriz de transferencia está dada por $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}^{n \times m}$. Se dice que el sistema es estable si y sólo si todos los polos de $\mathbf{G}[z]$ están ubicados en la región $|z| < 1$.*

Observación 2.4 (Sobre denominación de polos). *En el contexto de esta tesis, se dirá que un polo $p_0 \in \mathbb{C}$ es estable si y sólo si $|p_0| < 1$. En caso contrario el polo p_0 se dirá inestable.*

2.5. Espacios de funciones

Esta tesis busca investigar el desempeño óptimo alcanzable por un lazo de control. Para ello es necesario cuantificar, en algún sentido, la magnitud de señales y/o de sistemas. A continuación se definen normas utilizadas en esta tesis y los espacios correspondientes.

2.5.1. El espacio \mathcal{L}_2

Definición 2.9 (Espacio \mathcal{L}_2 [4], [38], [39]). *Se define \mathcal{L}_2 como el espacio de todas las funciones $\mathbf{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times m}$ tales que*

1. $\mathbf{F}[z]$ es integrable sobre la circunferencia unitaria $|z| = 1$.
2. $\mathbf{F}[z]$ satisface

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{traza} \left\{ \mathbf{F} [e^{j\omega}]^H \mathbf{F} [e^{j\omega}] \right\} d\omega < \infty. \quad (2.5.1)$$

Observación 2.5 (Sobre matrices de transferencia en \mathcal{L}_2). *De acuerdo a la definición 2.9, pertenecen a \mathcal{L}_2 aquellas matrices de transferencia $\mathcal{R}^{n \times m}$ que no poseen polos en $|z| = 1$.*

Lema 2.3 (Propiedades de \mathcal{L}_2 [38]). *En relación a \mathcal{L}_2 se puede decir lo siguiente:*

1. \mathcal{L}_2 es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} .
2. La función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}_2 \mapsto \mathbb{C}$$

$$(\mathbf{F}, \mathbf{H}) \mapsto \langle \mathbf{F}, \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{traza} \left\{ \mathbf{F} [e^{j\omega}]^H \mathbf{H} [e^{j\omega}] \right\} d\omega, \quad (2.5.2)$$

es un producto interno y el par $(\mathcal{L}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno.

3. $\langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{F} \in \mathcal{L}_2$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \mathcal{L}_2 &\mapsto \mathbb{R} \\ \mathbf{F} &\mapsto \|\mathbf{F}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle}, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

es una norma (la Norma 2) y el par $(\mathcal{L}_2, \|\cdot\|_2)$ corresponde a un espacio normado.

4. Con la norma y producto interno anteriores, \mathcal{L}_2 es un espacio de Banach y Hilbert, respectivamente [40].

Observación 2.6 (Propiedad útil de la norma 2 [41]). Una de las propiedades útiles de la norma 2 es que si \mathbf{A} y \mathbf{B} son funciones pertenecientes a \mathcal{L}_2 , entonces

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|\mathbf{A}\|_2^2 + \|\mathbf{B}\|_2^2, \quad (2.5.4)$$

(lo anterior supone que \mathbf{A} y \mathbf{B} son de dimensiones compatibles).

2.5.2. Subespacios de \mathcal{L}_2

Dentro del espacio \mathcal{L}_2 se pueden definir subespacios con características que permiten distinguir a diferentes clases de funciones. A continuación se definen los subespacios más empleados debido a sus propiedades de ortogonalidad.

El subespacio \mathcal{H}_2^\perp

Definición 2.10 (Subespacio \mathcal{H}_2^\perp). Se define el subespacio \mathcal{H}_2^\perp como

$$\mathcal{H}_2^\perp \triangleq \{ \mathbf{F}[z] \in \mathcal{L}_2 : \mathbf{F}[z] \text{ es analítica en } |z| < 1 \}. \quad (2.5.5)$$

Observación 2.7 (Sobre funciones racionales analíticas). En el contexto de esta tesis, una función racional $\mathbf{F}[z]$ se dirá analítica en una región si no posee polos en ella.

La Definición 2.10 permite establecer que toda matriz de transferencia $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}^{n \times m}$ se dirá de clase \mathcal{H}_2^\perp si no posee polos dentro de la región $|z| < 1$. En particular, pertenecen al espacio \mathcal{H}_2^\perp las funciones constantes.

El subespacio \mathcal{H}_2

El complemento del subespacio \mathcal{H}_2^\perp se denota como \mathcal{H}_2 , cuya definición se entrega a continuación.

Definición 2.11 (Subespacio \mathcal{H}_2). Se define el subespacio \mathcal{H}_2 como

$$\mathcal{H}_2 \triangleq \mathcal{L}_2 - \mathcal{H}_2^\perp. \quad (2.5.6)$$

De acuerdo a la definición 2.11, toda matriz de transferencia $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}^{n \times m}$ se dirá que pertenece a \mathcal{H}_2 si es una matriz estrictamente propia y estable.

Observación 2.8 (Sobre notación para matrices de transferencia). *Con el propósito de enfatizar que las matrices de transferencia pertenecientes a \mathcal{H}_2 (o \mathcal{H}_2^\perp) son reales racionales, se antepondrá el símbolo \mathcal{R} , además de incorporar en un superíndice las dimensiones adecuadas. Así, $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$ es equivalente a decir que $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}^{n \times m}$ y que pertenece al subespacio \mathcal{H}_2 .*

Una propiedad importante de los subespacios mencionados en esta sección es la ortogonalidad existente bajo el producto interno presentado en (2.5.2):

Lema 2.4 (Ortogonalidad de subespacios \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_2^\perp [38], [42]). *Sean los subespacios \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_2^\perp definidos previamente. Entonces \mathcal{H}_2^\perp es el complemento ortogonal de \mathcal{H}_2 y ambos subespacios forman un par ortogonal en \mathcal{L}_2 , con respecto al producto interno definido en (2.5.2).*

Observación 2.9 (Complemento ortogonal de los subespacios \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_2^\perp). *Al ser \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_2^\perp un par ortogonal sobre el espacio \mathcal{L}_2 , toda matriz de transferencia $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{L}_2$ puede descomponerse como*

$$\mathbf{G}[z] = \{\mathbf{G}[z]\}_{\mathcal{H}_2} + \{\mathbf{G}[z]\}_{\mathcal{H}_2^\perp}, \quad (2.5.7)$$

donde $\{\mathbf{G}[z]\}_{\mathcal{H}_2}$ corresponde a aquella parte de $\mathbf{G}[z]$ perteneciente a \mathcal{H}_2 , y $\{\mathbf{G}[z]\}_{\mathcal{H}_2^\perp}$ es la parte de $\mathbf{G}[z]$ perteneciente a \mathcal{H}_2^\perp . En el caso de matrices de transferencia reales racionales, esta descomposición puede efectuarse mediante separación en fracciones parciales. La separación propuesta en (2.5.7) permite establecer que

$$\|\mathbf{G}[z]\|_2^2 = \|\{\mathbf{G}[z]\}_{\mathcal{H}_2}\|_2^2 + \|\{\mathbf{G}[z]\}_{\mathcal{H}_2^\perp}\|_2^2. \quad (2.5.8)$$

La propiedad (2.5.8) es conocida como el teorema de Pitágoras generalizado.

El subespacio \mathcal{RH}_∞

Otro subespacio de \mathcal{L}_2 que será empleado durante algunas demostraciones es el subespacio \mathcal{RH}_∞ , cuya definición es formalizada a continuación.

Definición 2.12 (Subespacio \mathcal{RH}_∞). *Se define el espacio \mathcal{RH}_∞ es un subespacio de \mathcal{RL}_2 definido como*

$$\mathcal{RH}_\infty = \{\mathbf{F}[z] \in \mathcal{RL}_2 : \mathbf{F}[z] \text{ es una función estable y propia}\}. \quad (2.5.9)$$

Al igual que para los subespacios \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_2^\perp , se introducirá el símbolo \mathcal{R} para denotar cuando las funciones sean reales racionales, además de un superíndice que especifique sus dimensiones.

A partir del complemento ortogonal de los subespacios \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_2^\perp se puede demostrar que, dada dos matrices $\mathbf{A}[z] \in \mathcal{RH}_2^{1 \times n \times m}$ y $\mathbf{B}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$, se cumple [41]

$$\|\mathbf{A}[z] + \mathbf{B}[z]\|_2^2 = \|\mathbf{A}[z] - \mathbf{A}[0]\|_2^2 + \|\mathbf{A}[0] + \mathbf{B}[z]\|_2^2. \quad (2.5.10)$$

Se debe mencionar que, si $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$, entonces $\mathbf{G}[z]$ posee una parte que pertenece a $\mathcal{RH}_2^{n \times m}$ (estable y estrictamente propia) y otra parte perteneciente a $\mathcal{RH}_2^{1 \times n \times m}$ (constante). Así, se puede concluir que el subespacio \mathcal{RH}_2 está contenido en el subespacio \mathcal{RH}_∞ .

2.6. Teorema de Parseval

Un teorema de utilidad para la resolución de los problemas de optimización propuestos en esta tesis es el Teorema de Parseval [26], el cual establece una equivalencia entre problemas en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia. A continuación se formaliza este resultado.

Teorema 2.1 (Teorema de Parseval para sistemas de tiempo discreto [26]). Sean $\mathbf{y}_1[k], \mathbf{y}_2[k] \in \mathbb{R}^n$ dos secuencias definidas $\forall k \in \mathbb{Z}$, cuyas transformadas de Fourier son $\mathbf{Y}_1[e^{j\omega}]$ e $\mathbf{Y}_2[e^{j\omega}]$ respectivamente. Entonces se cumple que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{y}_2[k]^T \mathbf{y}_1[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{Y}_2[e^{j\omega}]^H \mathbf{Y}_1[e^{j\omega}] d\omega. \quad (2.6.1)$$

Observación 2.10. Si $\mathbf{y}_1[k] = \mathbf{y}_2[k] = \mathbf{y}[k]$, entonces el Teorema 2.1 se reduce a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}[k]^T \mathbf{y}[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{Y}[e^{j\omega}]^H \mathbf{Y}[e^{j\omega}] d\omega = \|\mathbf{Y}[z]\|_2^2, \quad (2.6.2)$$

i.e., es posible transformar un problema desde el dominio temporal a su equivalente en el dominio de la frecuencia, donde el problema se traduce a la norma 2 de $\mathbf{Y}[z]$.

Se debe considerar que la igualdad (2.6.1) se mantiene sólo si las señales $\mathbf{y}_1[k]$ e $\mathbf{y}_2[k]$ se mantienen acotadas $\forall k \in \mathbb{Z}$, además de garantizar la existencia de las transformadas de Fourier $\mathbf{Y}_1[e^{j\omega}]$ e $\mathbf{Y}_2[e^{j\omega}]$.

2.7. Teorema del módulo máximo

En teoría de variable compleja (ver, e.g., [40], [43], [44]) existe un teorema muy potente debido a sus implicancias en el comportamiento de funciones complejas. A continuación se enuncia este resultado.

Teorema 2.2 (Teorema del módulo máximo [43]). Sea $f[z]$ una función continua en una región acotada cerrada R y analítica y no constante en el interior de R . Entonces el valor máximo de $|f[z]|$ se alcanza siempre, y ocurre en algún lugar de la frontera de R , nunca en su interior.

Tal como se verá en el Capítulo 4, el Teorema del módulo máximo permite demostrar algunos resultados de relevancia en esta tesis.

2.8. Factorizaciones coprimas en \mathcal{RH}_{∞}

Un resultado de importancia para esta tesis corresponde a las factorizaciones coprimas en \mathcal{RH}_{∞} , pues posibilitan el cálculo de las expresiones óptimas reportadas en este documento. A continuación se introduce su definición.

Definición 2.13 (Matrices coprimas en \mathcal{RH}_∞ [45]). *Dadas dos matrices $\mathbf{F}_1[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times p}$ y $\mathbf{H}_1[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times p}$, se dirá que son coprimas por la derecha (sobre \mathcal{RH}_∞) si y sólo si existen matrices $\mathbf{X}_1[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times n}$ e $\mathbf{Y}_1[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times m}$ tal que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1[z] & \mathbf{Y}_1[z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1[z] \\ \mathbf{H}_1[z] \end{bmatrix} = \mathbf{X}_1[z] \mathbf{F}_1[z] + \mathbf{Y}_1[z] \mathbf{H}_1[z] \triangleq \mathbf{I}_p, \quad (2.8.1)$$

o, equivalentemente, si la matriz

$$\mathbf{P}_1[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1[z] \\ \mathbf{H}_1[z] \end{bmatrix}, \quad (2.8.2)$$

es invertible por la izquierda en \mathcal{RH}_∞ .

De manera similar, se dirá que dos matrices $\mathbf{F}_2[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times n}$ y $\mathbf{H}_2[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times m}$ son coprimas por la izquierda (sobre \mathcal{RH}_∞) si y sólo si existen matrices $\mathbf{X}_2[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times p}$ e $\mathbf{Y}_2[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times p}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_2[z] & \mathbf{H}_2[z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_2[z] \\ \mathbf{Y}_2[z] \end{bmatrix} = \mathbf{F}_2[z] \mathbf{X}_2[z] + \mathbf{H}_2[z] \mathbf{Y}_2[z] \triangleq \mathbf{I}_p, \quad (2.8.3)$$

o, equivalentemente, si la matriz

$$\mathbf{P}_2[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2[z] & \mathbf{H}_2[z] \end{bmatrix}, \quad (2.8.4)$$

es invertible por la derecha en \mathcal{RH}_∞ .

La definición de matrices coprimas en \mathcal{RH}_∞ permite introducir la factorización coprime de sistemas multivariables en \mathcal{RH}_∞ :

Lema 2.5 (Factorización coprime de sistemas multivariables [45]). *Dada una matriz de transferencia $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}_p^{n \times m}$, entonces*

- Siempre es posible factorizar $\mathbf{G}[z]$ como

$$\mathbf{G}[z] \triangleq \mathbf{N}_D[z] \mathbf{D}_D[z]^{-1} = \mathbf{D}_I[z]^{-1} \mathbf{N}_I[z], \quad (2.8.5)$$

donde $\mathbf{N}_D[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$, $\mathbf{D}_D[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$, $\mathbf{N}_I[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$ y $\mathbf{D}_I[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$ satisfacen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_I[z] & -\mathbf{Y}_I[z] \\ -\mathbf{N}_I[z] & \mathbf{D}_I[z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_D[z] & \mathbf{Y}_D[z] \\ \mathbf{N}_D[z] & \mathbf{X}_D[z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \quad (2.8.6)$$

donde $\mathbf{X}_I[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$, $\mathbf{Y}_I[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$, $\mathbf{X}_D[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ e $\mathbf{Y}_D[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$. La igualdad (2.8.6) es conocida como la doble identidad de Bezout. Las matrices $\mathbf{N}_D[z]$ y $\mathbf{D}_D[z]$ forman la factorización coprime derecha de $\mathbf{G}[z]$, en tanto que $\mathbf{N}_I[z]$ y $\mathbf{D}_I[z]$ corresponden a la factorización coprime izquierda de $\mathbf{G}[z]$, tal como se presenta en (2.8.5).

- Si $c_0 \in \mathbb{C}$ es un cero de FNM de $\mathbf{G}[z]$, entonces c_0 es cero de $\mathbf{N}_I[z]$ y $\mathbf{N}_D[z]$.
- Si $p_0 \in \mathbb{C}$ es un polo inestable de $\mathbf{G}[z]$, entonces p_0 es cero de $\mathbf{D}_I[z]$ y $\mathbf{D}_D[z]$.

Los resultados presentados en esta sección serán de utilidad para la descripción de los problemas de optimización propuestos en esta tesis.

2.9. Factorización inner-outer e interactores

Un resultado relevante para los cálculos desarrollados en esta tesis corresponden a las factorizaciones inner-outer, las cuales permiten expresar una función definida en \mathcal{RH}_∞ como el producto de dos factores. A fin de definir las correctamente, se presentan a continuación algunas nociones previas.

Definición 2.14 (Operador tilde). Dada una función $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{L}_2^{n \times m}$, se define el operador tilde como

$$\mathbf{G}[z]^\sim \triangleq \mathbf{G}[1/\bar{z}]^H, \quad (2.9.1)$$

lo cual se reduce a $\mathbf{G}[z]^\sim = \mathbf{G}[z^{-1}]^T$ cuando $\mathbf{G}[z]$ es una matriz de transferencia real racional.

Observación 2.11. Cuando $z = e^{j\omega}$ y la matriz de transferencia $\mathbf{G}[z]$ es real racional, el operador tilde se reduce a $\mathbf{G}[e^{j\omega}]^\sim = \mathbf{G}[e^{j\omega}]^H$.

Observación 2.12. Dada una matriz de transferencia $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{RH}_2$, entonces al aplicar el operador tilde a $\mathbf{G}[z]$ se obtendrá una matriz $\mathbf{G}[z]^\sim \in \mathcal{RH}_2^\perp$. Esto se debe a que el operador tilde mapea un polo en $z = p_0$ ($|p_0| < 1$) a $z = 1/p_0$, cuyo módulo es mayor a 1. En consecuencia, $\mathbf{G}[z]^\sim$ posee todos sus polos fuera de la región $|z| < 1$.

Observación 2.13 (Expresión equivalente de norma 2 en función de $(\cdot)^\sim$). Es posible reescribir la norma 2 de una función $\mathbf{F}[z] \in \mathcal{L}_2^{n \times m}$ como

$$\|\mathbf{F}[z]\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza}\{\mathbf{F}[z]^\sim \mathbf{F}[z]\} \frac{dz}{z}}, \quad (2.9.2)$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $z = e^{j\omega}$ y la integral se calcula sobre la curva $|z| = 1$, recorrida en sentido antirreloj. Tal como se verá en capítulos posteriores, esta definición simplifica el cálculo de la norma 2, pues se puede emplear el Teorema del Residuo en variable compleja [43].

Definición 2.15 (Matriz unitaria). Sea una matriz $\mathbf{U}[z] \in \mathcal{L}_2^{n \times m}$, $n \geq m$. Se dice que $\mathbf{U}[z]$ es una matriz unitaria si satisface

$$\mathbf{U}[z]^\sim \mathbf{U}[z] = \mathbf{I}_m. \quad (2.9.3)$$

Observación 2.14. Cuando $\mathbf{U}[z]$ es una matriz constante, entonces (2.9.3) se reduce a $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_m$, lo cual concuerda con la definición de matriz unitaria entregada en [25].

Las matrices unitarias preservan el valor la norma 2, i.e., dada una matriz unitaria $\mathbf{M}[z] \in \mathcal{L}_2^{n \times m}$, entonces se cumple

$$\|\mathbf{M}[z] \mathbf{W}[z]\|_2^2 = \|\mathbf{W}[z]\|_2^2, \quad \forall \mathbf{W}[z] \in \mathcal{L}_2^{m \times p}. \quad (2.9.4)$$

Definición 2.16 (Matrices de transferencia inner y outer [34], [45]). Sean $\mathbf{A}[z], \mathbf{B}[z] \in \mathcal{R}$. Entonces,

1. Se dice que $\mathbf{A}[z]$ es una matriz inner si y sólo si $\mathbf{A}[z] \in \mathcal{RH}_\infty$ y es unitaria.
2. Se dice que $\mathbf{B}[z]$ es una matriz outer si y sólo si $\mathbf{B}[z] \in \mathcal{RH}_\infty$ y posee rango completo por filas en $|z| > 1$.

Note que una matriz inner es en general alta (número de filas mayor a su número de columnas), en tanto que una matriz outer es usualmente ancha (número de filas menor a su número de columnas). Sólo para estructuras particulares se tiene que ambas matrices son cuadradas.

Lema 2.6 (Factorización inner-outer [45], [46]). Si $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$ es una matriz de transferencia, entonces $\mathbf{G}[z]$ tiene una factorización inner-outer dada por

$$\mathbf{G}[z] = \mathbf{G}_i[z] \mathbf{G}_o[z], \quad (2.9.5)$$

donde $\mathbf{G}_i[z]$ es el factor inner y $\mathbf{G}_o[z]$ es el factor outer.

Observación 2.15. El Lema 2.6 no entrega datos sobre la estructura de las factorizaciones inner-outer. Sin embargo, a partir de las propiedades del factor inner, es posible establecer que, si $c_0 \in \mathbb{C}$ es un cero de fase no mínima de $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$, entonces c_0 será un cero de $\mathbf{G}_i[z]$, y $1/\bar{c}_0$ será cero de $\mathbf{G}_o[z]$.

Observación 2.16. En base al Lema 2.6, se puede establecer que

$$\mathbf{G}[z] \sim \mathbf{G}[z] = \mathbf{G}_o[z] \sim \mathbf{G}_o[z], \quad (2.9.6)$$

lo cual permite relacionar la factorización inner-outer con otro tipo de factorización: la factorización espectral [45], [47], [48].

Observación 2.17 (Sobre matriz unitaria particular [15], [16], [17]). Si $\mathbf{G}_i[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$ ($n \geq m$) es una matriz de transferencia inner, entonces

$$\mathbf{\Lambda}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i[z] \sim \\ \mathbf{I}_n - \mathbf{G}_i[z] \mathbf{G}_i[z] \sim \end{bmatrix}, \quad (2.9.7)$$

es una matriz unitaria. La matriz $\mathbf{\Lambda}[z]$ será empleada para la obtención de las expresiones reportadas en esta tesis.

Una clase particular de factores inner que son útiles en la teoría de sistemas multivariables son los interactores unitarios:

Definición 2.17 (Interactores unitarios izquierdo y derecho de grado [28], [30]). Considere una matriz de transferencia $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$, no singular casi en todas partes. Entonces,

- si $m \geq n$, entonces existe una única matriz de transferencia unitaria $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{d}}[z]$, tal que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{d}}[z]^{-1} \mathbf{G}[z] = \mathbf{K}_{\mathbf{I}}, \quad \text{donde} \quad (2.9.8)$$

$$0 \leq |K_{I,ij}| < \infty, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.9.9)$$

y $\text{rank}\{\mathbf{K}_{\mathbf{I}}\} = n$.

- si $m \leq n$, entonces existe una única matriz de transferencia unitaria $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{d}}[z]$, tal que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{G}[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{d}}[z]^{-1} = \mathbf{K}_{\mathbf{D}}, \text{ donde} \quad (2.9.10)$$

$$0 \leq |K_{D,ij}| < \infty, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.9.11)$$

y $\text{rank}\{\mathbf{K}_{\mathbf{D}}\} = m$.

Bajo los supuestos anteriores, se dirá que $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{d}}[z]$ y $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{d}}[z]$ son interactores unitarios izquierdo y derecho de grado de $\mathbf{G}[z]$, respectivamente.

De la misma manera, puede definirse interactores unitarios para ceros de fase no mínima finitos:

Definición 2.18 (Interactores unitarios izquierdo y derecho de ceros de FNM finitos [28], [30]). Considere una matriz de transferencia $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$ con n_c ceros de fase no mínima finitos $c_i \in \mathbb{C}$, ($i = 1, \dots, n_c$), no singular casi en todas partes. Entonces,

- si $m \geq n$, entonces existe una matriz de transferencia unitaria $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}}[z]$, tal que $\forall l \in \{1, \dots, n_c\}$:

$$\lim_{z \rightarrow c_l} \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}}[z]^{-1} \mathbf{G}[z] = \mathbf{R}_{\mathbf{I}}, \text{ donde} \quad (2.9.12)$$

$$0 \leq |R_{I,ij}| < \infty, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.9.13)$$

y donde $\text{rank}\{\mathbf{R}_{\mathbf{I}}\} = n$.

- si $m \leq n$, entonces existe una matriz de transferencia unitaria $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{c}}[z]$, tal que $\forall l \in \{1, \dots, n_c\}$:

$$\lim_{z \rightarrow c_l} \mathbf{G}[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{c}}[z]^{-1} = \mathbf{R}_{\mathbf{D}}, \text{ donde} \quad (2.9.14)$$

$$0 \leq |R_{D,ij}| < \infty, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.9.15)$$

y donde $\text{rank}\{\mathbf{R}_{\mathbf{D}}\} = m$.

Bajo los supuestos anteriores, se dirá que $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}}[z]$ y $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{c}}[z]$ son interactores unitarios izquierdo y derecho de ceros de fase no mínima finitos de $\mathbf{G}[z]$, respectivamente.

Observación 2.18 (Sobre construcción explícita de interactores unitarios [30]). Considere un sistema $\mathbf{P}[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$, $n \leq m$, con n_c ceros de FNM finitos y n_z ceros de FNM en infinito. Entonces, un interactor unitario izquierdo de ceros de FNM de $\mathbf{P}[z]$ puede ser obtenido como

$$\mathbf{P}_{\mathbf{FM}}[z] \triangleq \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}}[z]^{-1} \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{d}}[z]^{-1} \mathbf{P}[z], \quad (2.9.16)$$

donde $\mathbf{P}_{\mathbf{FM}}[z] \in \mathcal{R}_p^{n \times n}$ es una matriz de transferencia de FM y bipropia, en tanto que $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}}[z]$ y $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{d}}[z]$ corresponden a interactores unitarios izquierdos de ceros de FNM finitos e infinitos de $\mathbf{P}[z]$, respectivamente, donde

$$\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{d}}[z]^{-1} \triangleq \prod_{i=1}^{n_z} \{z \boldsymbol{\eta}_{\infty i} \boldsymbol{\eta}_{\infty i}^H + \mathbf{U}_{\infty i} \mathbf{U}_{\infty i}^H\}, \quad (2.9.17)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}} [z]^{-1} \triangleq \prod_{i=1}^{n_c} \left\{ \left(\frac{1 - c_i}{1 - \bar{c}_i} \cdot \frac{1 - z \bar{c}_i}{z - c_i} \right) \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_i^H + \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H \right\}, \quad (2.9.18)$$

donde $\boldsymbol{\eta}_{\infty i} \in \mathbb{C}^n$ corresponde a la dirección unitaria izquierda⁷ asociada al i -ésimo cero de FNM en infinito extraído de $\mathbf{P} [z]$, en tanto que $\boldsymbol{\eta}_i \in \mathbb{C}^n$ corresponde a la dirección unitaria izquierda asociada al i -ésimo cero de FNM finito extraído de $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{d}} [z]^{-1} \mathbf{P} [z]$. Por otro lado, $\mathbf{U}_{\infty i} \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)}$ y $\mathbf{U}_i \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)}$ constituyen matrices unitarias que satisfacen

$$\boldsymbol{\eta}_{\infty i} \boldsymbol{\eta}_{\infty i}^H + \mathbf{U}_{\infty i} \mathbf{U}_{\infty i}^H = \mathbf{I}_n, \quad (2.9.19)$$

$$\boldsymbol{\eta}_j \boldsymbol{\eta}_j^H + \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H = \mathbf{I}_n, \quad (2.9.20)$$

$\forall i \in \{1, \dots, n_z\}, \forall j \in \{1, \dots, n_c\}$.

Bajo la notación y definiciones anteriores,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [z] \triangleq \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{d}} [z] \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}} [z], \quad (2.9.21)$$

se define como un interactor unitario de ceros de FNM finitos e infinitos de $\mathbf{P} [z]$ ⁸. Note que se puede obtener $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}} [z]$ para el caso $n > m$ a través del mismo procedimiento, considerando la planta $\mathbf{P} [z]^T$.

2.10. Lazos de control multivariable

Todo el marco teórico precedente está motivado por el fin último del control de sistemas. Esta sección introduce la noción del problema de control y cómo éste puede caracterizarse usando una configuración de lazo cerrado con un grado de libertad [28].

2.10.1. El problema de control

El problema central en control es encontrar una manera técnicamente factible para actuar sobre un proceso determinado de forma que el sistema se comporte de un modo prefijado. Este comportamiento debe ser logrado a pesar de incertezas en el modelo del proceso y pese a la presencia de perturbaciones externas actuando sobre el proceso [28].

Una de las formas más sencillas de controlar un proceso es usar la arquitectura que se presenta en la Figura 2.1. Este esquema es conocido como *lazo cerrado de control con un grado de libertad* [28]. En dicha figura, $\mathbf{G}_0 [z] \in \mathcal{R}^{n \times m}$ corresponde al modelo del proceso y $\mathbf{C} [z] \in \mathcal{R}^{m \times n}$ es el controlador en lazo cerrado. El controlador recibe como entrada al error de seguimiento⁹ $\mathbf{e} [k] \in \mathbb{R}^n$, el cual es el resultado de la diferencia entre una referencia prescrita $\mathbf{r} [k] \in \mathbb{R}^n$ y la medición de la respuesta del sistema $\mathbf{y}_m [k] \in \mathbb{R}^n$. En base al error de seguimiento $\mathbf{e} [k]$, el controlador genera una señal de control $\mathbf{u} [k] \in \mathbb{R}^m$, la cual es aplicada como entrada al sistema $\mathbf{G}_0 [z]$. El objetivo del esquema de control propuesto es lograr que la respuesta del sistema $\mathbf{y} [k] \in \mathbb{R}^n$ siga lo más cercanamente posible a una referencia prescrita

⁷Se define a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^n$ como *dirección izquierda* de un cero $c \in \mathbb{C}$ de $\mathbf{P} [z]$ si satisface $\boldsymbol{\eta}^H \mathbf{P} [c] = \mathbf{0}$

⁸Para mayores detalles sobre la construcción de interactores unitarios izquierdos, se invita al lector a revisar [6], [30]

⁹Para fines explicativos, se emplearán las señales temporales $\mathbf{e} [k]$, $\mathbf{r} [k]$, $\mathbf{y}_m [k]$, $\mathbf{d}_m [k]$, $\mathbf{d}_i [k]$, $\mathbf{d}_o [k]$ y $\mathbf{u} [k]$ en vez de las transformadas \mathcal{Z} de dichas señales, presentadas en la Figura 2.1.

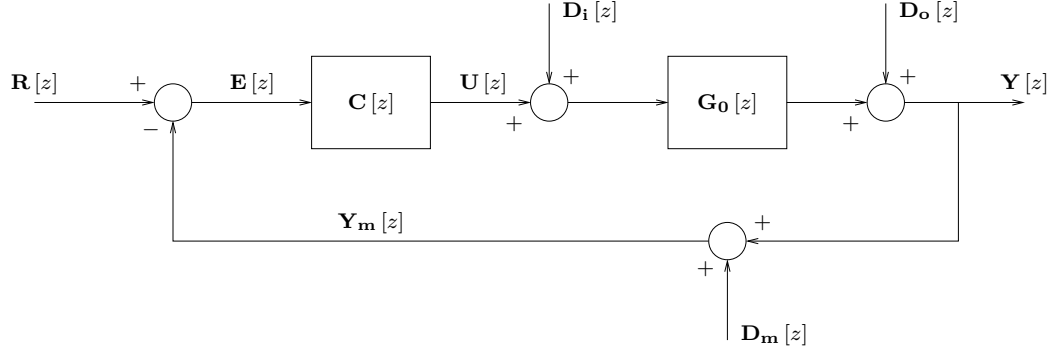


Figura 2.1. Lazo cerrado de control con un grado de libertad.

$\mathbf{r}[k]$, a pesar de la existencia de perturbaciones de entrada $\mathbf{d}_i[k] \in \mathbb{R}^m$, de salida $\mathbf{d}_o[k] \in \mathbb{R}^n$ y de ruido de medición $\mathbf{d}_m[k] \in \mathbb{R}^n$. Un aspecto adicional que debe ser considerado son las incertezas asociadas a $\mathbf{G}_o[z]$, las cuales corresponden a las diferencias estructurales entre el sistema real y el modelo empleado [28]. Estas diferencias pueden ocasionar que el sistema real no opere correctamente en lazo cerrado [28], [34], [49]. En caso que el modelo no sea lo suficientemente representativo del sistema real, es posible emplear métodos de identificación para mejorar su precisión [50], [51]. En el marco de la presente tesis, se supondrá que el modelo $\mathbf{G}_o[z]$ representa perfectamente al sistema real.

Del lazo cerrado de control presentado en la Figura 2.1, es posible establecer las siguientes relaciones entre las señales de interés:

$$\mathbf{Y}[z] \triangleq \mathbf{T}_o[z] \mathbf{R}[z] - \mathbf{T}_o[z] \mathbf{D}_m[z] + \mathbf{S}_o[z] \mathbf{D}_o[z] + \mathbf{S}_{io}[z] \mathbf{D}_i[z], \quad (2.10.1)$$

$$\mathbf{E}[z] \triangleq \mathbf{S}_o[z] \mathbf{R}[z] - \mathbf{S}_o[z] \mathbf{D}_m[z] - \mathbf{S}_o[z] \mathbf{D}_o[z] - \mathbf{S}_{io}[z] \mathbf{D}_i[z], \quad (2.10.2)$$

$$\mathbf{U}[z] \triangleq \mathbf{S}_{uo}[z] \mathbf{R}[z] - \mathbf{S}_{uo}[z] \mathbf{D}_m[z] - \mathbf{S}_{uo}[z] \mathbf{D}_o[z] - \mathbf{S}_{uo}[z] \mathbf{G}_o[z] \mathbf{D}_i[z], \quad (2.10.3)$$

donde las funciones

$$\mathbf{S}_o[z] \triangleq (\mathbf{I}_n + \mathbf{G}_o[z] \mathbf{C}[z])^{-1}, \quad (2.10.4)$$

$$\mathbf{T}_o[z] \triangleq \mathbf{I}_n - \mathbf{S}_o[z], \quad (2.10.5)$$

$$\mathbf{S}_{io}[z] \triangleq \mathbf{S}_o[z] \mathbf{G}_o[z], \quad (2.10.6)$$

$$\mathbf{S}_{uo}[z] \triangleq \mathbf{C}[z] \mathbf{S}_o[z], \quad (2.10.7)$$

se definen como las *funciones de sensibilidad*. En particular, $\mathbf{S}_o[z] \in \mathcal{R}^{n \times n}$ corresponde a la *sensibilidad*, $\mathbf{T}_o[z] \in \mathcal{R}^{n \times n}$ es la *sensibilidad complementaria*, $\mathbf{S}_{io}[z] \in \mathcal{R}^{n \times m}$ es la *sensibilidad de entrada* y $\mathbf{S}_{uo}[z] \in \mathcal{R}^{m \times n}$ corresponde a la *sensibilidad de control*.

2.10.2. Requisitos en un lazo de control

En un lazo cerrado de control, como el de la Figura 2.1, se exige el cumplimiento de diferentes requisitos. Algunos de ellos son fundamentales para la correcta operación del lazo cerrado (e.g. estabilidad), mientras que otros son función de las restricciones impuestas por

el sistema físico a ser controlado (e.g. presencia de perturbaciones y ruido de medición). El detalle de dichos requerimientos se presenta a continuación.

Requerimientos fundamentales

Antes de establecer restricciones sobre el lazo de control, es necesario garantizar que el sistema en lazo cerrado cumple los *requisitos fundamentales*, estos son realizabilidad y la estabilidad interna del lazo.

La *realizabilidad* está relacionada con la implementación física del controlador de lazo cerrado. En todo diseño que se efectúe, se debe considerar que no todos los controladores pueden ser implementados físicamente. En el caso de sistemas lineales de tiempo discreto, se dice que un controlador es realizable si y sólo si su matriz de transferencia es propia [30]. En términos del lazo cerrado, se dice que éste es realizable si y sólo si todas sus funciones de sensibilidad existen y son propias.

Otro requisito necesario para la correcta operación del lazo cerrado de control es la *estabilidad interna*, i.e., que para toda señal acotada, todas las respuestas del sistema sean acotadas (ver la Sección 2.4.4). La estabilidad interna es un requisito necesario para el funcionamiento del sistema real en lazo cerrado, pues no es admisible que las señales del lazo no sean acotadas, ya sea por razones de diseño o por la imposibilidad de su implementación física, pues los sistemas físicos poseen limitaciones en sus niveles de respuesta. A continuación se formaliza la definición de estabilidad interna.

Definición 2.19 (Estabilidad interna [28]). *Se dice que un lazo de control es internamente estable si y sólo si todas las funciones de sensibilidad (2.10.4)-(2.10.7) son estables, y si la matriz de transferencia $\mathbf{S}_{u0}[z]$ $\mathbf{G}_0[z]$ también lo es.*

Especificaciones de desempeño

Satisfechos los requerimientos fundamentales, es posible enfocar el esfuerzo de diseño en el cumplimiento de requisitos adicionales, los cuales están relacionados con la estructura del lazo de control. A fin de estudiar alguno de los requisitos adicionales, se centrará la atención en las expresiones (2.10.1)-(2.10.3). Algunos requerimientos adicionales son

- *Seguimiento de la señal de referencia:* Se desea que la respuesta del sistema sea lo más cercana posible a la señal de referencia empleada. Observando la expresión (2.10.1), este requerimiento se traduce a que la sensibilidad complementaria $\mathbf{T}_0[z]$, la cual relaciona la señales de referencia con la respuesta del sistema, satisfaga $\mathbf{T}_0[e^{j\omega}] = \mathbf{I}_n$, al menos en aquella zona de frecuencias donde la señal de referencia tenga energía significativa.
- *Compensación de perturbaciones:* Se desea que la respuesta del sistema se vea afectada lo menos posible por las perturbaciones de entrada y de salida. Observando la expresión (2.10.1), se aprecia que el efecto de dichas perturbaciones aparece en la salida a través de las sensibilidades $\mathbf{S}_0[z]$ y $\mathbf{S}_{i0}[z]$. Por lo tanto, para minimizar su efecto en la respuesta del lazo, es necesario que $|\mathbf{S}_0[e^{j\omega}]|$ y $|\mathbf{S}_{i0}[e^{j\omega}]|$ sean nulas, al menos en aquella zona de frecuencias donde el espectro de las perturbaciones de salida $\mathbf{D}_0[z]$ y de entrada $\mathbf{D}_i[z]$ tenga magnitud significativa. Si la magnitud de la respuesta en

frecuencia de $\mathbf{G}_0[z]$ es acotada, entonces bastará que $|\mathbf{S}_0[e^{j\omega}]|$ sea nula para satisfacer ambos requisitos.

- *Inmunidad al ruido:* Se desea que la respuesta del lazo de control sea afectada lo menos posible por el ruido de medición. Observando la expresión (2.10.1), se aprecia que la respuesta del sistema es afectada por el ruido de medición a través de la sensibilidad complementaria $\mathbf{T}_0[z]$. Con el objeto de rechazar el ruido de medición, se debe lograr que $|\mathbf{T}_0[e^{j\omega}]|$ sea nula al menos en aquella zona de frecuencias donde el ruido de medición posea energía significativa.

El cumplimiento simultáneo de las especificaciones enunciadas puede ser complejo. Esto se debe a que las especificaciones entregadas son contradictorias. En particular, cuando los espectros del ruido, la referencia y la perturbación tienen un traslape significativo (al menos en un intervalo), el requisito de inmunidad al ruido produce conflictos con los requerimientos de seguimiento y compensación de perturbaciones, pues no es posible lograr simultáneamente un buen rechazo al ruido y un buen seguimiento de referencias y compensación de perturbaciones. Este conflicto puede ser resuelto parcialmente¹⁰ imponiendo restricciones sobre el ancho de banda de las funciones de sensibilidad, en particular sobre la sensibilidad complementaria $\mathbf{T}_0[z]$. En el caso de sistemas multivariables, estas restricciones son impuestas sobre los *valores singulares* de las funciones de sensibilidad [32], [34], [39].

Cabe destacar que los requisitos antes mencionados no son los únicos, pues pueden existir requerimientos sobre la velocidad de la respuesta transitoria [28] y robustez del diseño de lazo cerrado [34], [39]. También se deben considerar las limitaciones fundamentales impuestas por los rasgos dinámicos de la planta [3].

2.10.3. Parametrización de controladores

Si se desearan introducir los requerimientos sobre el lazo de control en el controlador $\mathbf{C}[z]$ esto no sería sencillo, pues las funciones de sensibilidad (2.10.4)-(2.10.7) no son lineales en el parámetro de diseño $\mathbf{C}[z]$.

Una de las formas de obtener una representación equivalente de las funciones de sensibilidad, a través de un parámetro de diseño que aparece linealmente en las expresiones para las sensibilidades, fue propuesta por Youla [52], [28]. Esta parametrización permite caracterizar, mediante un parámetro de diseño estable y propio, a todos los controladores que logran estabilizar internamente el lazo. Con el propósito de cubrir todos los tópicos presentes en esta tesis, se presenta a continuación un resultado general que permite parametrizar a todos los controladores que estabilizan internamente al lazo cuando las plantas son generales.

Lema 2.7 (Parametrización de controladores estabilizantes [32]). *Sea un sistema $\mathbf{G}[z] \in \mathcal{R}_p^{n \times m}$, cuya factorización copríma está dada por*

$$\mathbf{G}[z] = \mathbf{N}_D[z] \mathbf{D}_D[z]^{-1} = \mathbf{D}_I[z]^{-1} \mathbf{N}_I[z], \quad (2.10.8)$$

¹⁰Se dice que el problema es resuelto en forma *parcial* puesto que, aún imponiendo restricciones sobre el ancho de banda de las funciones de sensibilidad, el traslape de la banda de frecuencias del ruido y de la referencia (y/o la perturbación) todavía puede producir problemas (e.g. no logrando un buen seguimiento o no logrando un buen rechazo al ruido). Una posible solución es mejorar la calidad de la medición de la respuesta del sistema, y/o atenuar el efecto de las perturbaciones vía otros mecanismos.

donde $\mathbf{N}_D[z]$, $\mathbf{D}_D[z]$, $\mathbf{N}_I[z]$, $\mathbf{D}_I[z] \in \mathcal{RH}_\infty$ satisfacen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_I[z] & -\mathbf{Y}_I[z] \\ -\mathbf{N}_I[z] & \mathbf{D}_I[z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_D[z] & \mathbf{Y}_D[z] \\ \mathbf{N}_D[z] & \mathbf{X}_D[z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}. \quad (2.10.9)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \triangleq \left\{ \mathbf{C}[z] : \mathbf{C}[z] &= (\mathbf{Y}_D[z] - \mathbf{D}_D[z] \mathbf{Q}[z]) (\mathbf{N}_D[z] \mathbf{Q}[z] - \mathbf{X}_D[z])^{-1} \right. \\ &= (\mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_I[z] - \mathbf{X}_I[z])^{-1} (\mathbf{Y}_I[z] - \mathbf{Q}[z] \mathbf{D}_I[z]), \quad \mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty \left. \right\}, \end{aligned} \quad (2.10.10)$$

describe al conjunto de todos los controladores que estabilizan internamente al lazo cerrado, con $\mathbf{G}[z]$ como planta.

El lema anterior permite diseñar un lazo cerrado internamente estable escogiendo simplemente un parámetro de diseño $\mathbf{Q}[z]$ tal que sea real racional, estable y propio. Este parámetro de diseño se denomina comúnmente *parámetro de Youla*. En lo sucesivo, se referirá a $\mathbf{Q}[z]$ como el *parámetro de diseño*.

Empleando la expresión (2.10.10) en las funciones de sensibilidad (2.10.4)-(2.10.7), se obtiene

$$\mathbf{S}_0[z] \triangleq (\mathbf{X}_D[z] - \mathbf{N}_D[z] \mathbf{Q}[z]) \mathbf{D}_I[z], \quad (2.10.11)$$

$$\mathbf{T}_0[z] \triangleq -\mathbf{N}_D[z] (\mathbf{Y}_I[z] - \mathbf{Q}[z] \mathbf{D}_I[z]), \quad (2.10.12)$$

$$\mathbf{S}_{i0}[z] \triangleq (\mathbf{X}_D[z] - \mathbf{N}_D[z] \mathbf{Q}[z]) \mathbf{N}_I[z], \quad (2.10.13)$$

$$\mathbf{S}_{u0}[z] \triangleq (\mathbf{D}_D[z] \mathbf{Q}[z] - \mathbf{Y}_D[z]) \mathbf{D}_I[z]. \quad (2.10.14)$$

A partir de las expresiones (2.10.11)-(2.10.14) se puede concluir que todas las funciones de sensibilidad son afines en el parámetro de diseño $\mathbf{Q}[z]$. Esto permite resolver problemas de optimización cuadráticos que involucren a las funciones de sensibilidad (2.10.11)-(2.10.14) [28], [53].

Cuando la planta $\mathbf{G}[z]$ es estable, entonces es posible hacer las siguientes elecciones

$$\mathbf{N}_D[z] = \mathbf{N}_I[z] = \mathbf{G}[z], \quad (2.10.15)$$

$$\mathbf{D}_D[z] = \mathbf{X}_I[z] = \mathbf{I}_m, \quad (2.10.16)$$

$$\mathbf{D}_I[z] = \mathbf{X}_D[z] = \mathbf{I}_n, \quad (2.10.17)$$

$$\mathbf{Y}_D[z] = \mathbf{Y}_I[z] = \mathbf{0}, \quad (2.10.18)$$

lo que permite escribir las funciones de sensibilidad para el caso estable como

$$\mathbf{S}_0[z] = \mathbf{I}_n - \mathbf{G}[z] \mathbf{Q}[z], \quad (2.10.19)$$

$$\mathbf{T}_0[z] = \mathbf{G}[z] \mathbf{Q}[z], \quad (2.10.20)$$

$$\mathbf{S}_{i0}[z] = (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}[z] \mathbf{Q}[z]) \mathbf{G}[z], \quad (2.10.21)$$

$$\mathbf{S}_{u0}[z] = \mathbf{Q}[z]. \quad (2.10.22)$$

De la expresión (2.10.20) se puede apreciar que, para lograr una sensibilidad complementaria cercana a la identidad, es necesario escoger el parámetro de diseño $\mathbf{Q}[z]$ igual a

la inversa por la derecha de la planta $\mathbf{G}[z]$. Esto es concordante con la idea de inversión en sistemas de control [28], [54]. Sin embargo, en sistemas altos, el inverso por la derecha no se encuentra definido, por lo que el concepto de inversión no puede ser explotado directamente en esta clase de sistemas.

2.11. Resumen

El presente capítulo ha introducido la notación y conceptos relevantes para la lectura de esta tesis. Se ha introducido el concepto de rango normal, útil para definir los rasgos dinámicos de un sistema. Se han introducido las representaciones de sistemas lineales a través de variables de estado y matrices de transferencia, las cuales están relacionadas entre sí. Se han estudiado los rasgos dinámicos de un sistema lineal a través de las factorizaciones coprimas en \mathcal{RH}_∞ , además de introducir el concepto de estabilidad de sistemas lineales. Se definen espacios y subespacios de funciones, los cuales permiten introducir la norma 2, empleada en esta tesis para definir funciones de costo. Un concepto útil de la teoría de control óptimo es la factorización inner-outer, cuya definición se ha entregado en este capítulo.

Las definiciones introducidas permiten fundamentar el marco teórico sobre lazos de control multivariables, el cual define el problema de control e introduce la estructura de lazo cerrado con un grado de libertad. Se explican los conceptos de lazos realizables y estables, además de entregar un resumen sobre los requerimientos típicos en un lazo de control. Finalmente, se define la parametrización de controladores estabilizantes, la cual permite que todas las funciones de sensibilidad sean afines en el parámetro de diseño. Esto posibilita que los problemas sean tratables, obteniendo formas cerradas explícitas para los valores óptimos.

LÍMITES DE DESEMPEÑO EN SISTEMAS AUMENTADOS: PROBLEMA DE REGULACIÓN

3.1. Introducción

Este capítulo presenta resultados sobre límites de desempeño en sistemas aumentados. Se entiende por *sistema aumentado* aquel que resulta de la adición de nuevos canales de control. La adición de nuevos canales está motivada por la obtención de mejoras en el desempeño de los sistemas iniciales. En esta tesis, los sistemas originales serán plantas altas, i.e., cuyo número de entradas es menor a su número de salidas. Sistemas altos pueden ser encontrados en la reducción de vibraciones en estructuras flexibles [9], el control de represas [10], situaciones que involucran piezoactuadores [11], control activo de ruido en conductos [12], reactores químicos [13] y sistemas de rodamientos magnéticos [14]. El problema con este tipo de sistemas es que no es posible obtener error de seguimiento cero en estado estacionario para todas sus salidas, salvo en casos particulares. Una condición necesaria para garantizar cero error estacionario ante referencias constantes es que la dirección de la referencia esté en el espacio barrido por la ganancia a continua de la planta [15], [17], [18]. Sin embargo, estos resultados no pueden ser empleados para cuantificar los beneficios de agregar canales de control a una planta alta, ya que la naturaleza de la dirección de la referencia impide evaluar correctamente las mejoras de desempeño en sistemas aumentados. En la dirección inversa, el análisis desarrollado en este capítulo permite cuantificar la pérdida de desempeño cuando, a partir de una planta cuadrada, se suprimen canales de control, convirtiendo una planta en un sistema alto.

Las cotas de desempeño calculadas en este capítulo cuantifican los beneficios de agregar nuevos canales de control a una planta alta. Los resultados abordan problemas de regulación, suponiendo que la perturbación de entrada es un delta de Kronecker. Si bien el tipo de perturbación es particular, su importancia está en que el problema es equivalente a optimizar la respuesta del lazo de control ante condiciones iniciales en la planta (ver, e.g., [55], [56]). Resultados sobre regulación en sistemas altos de tiempo discreto han sido reportados en [16]. En dicho artículo, se estudia el problema de regulación en sistemas de una entrada

y múltiples salidas (SIMO), considerando un funcional de costo cuadrático que pondera la respuesta del sistema y la señal de control empleada. Así, [16] busca minimizar el efecto de la perturbación sobre la salida del sistema, garantizando niveles de actuación razonables. Los resultados en [16] son explícitos y están expresados en función de los rasgos dinámicos de la planta. No obstante, los resultados consideran sólo ceros de fase no mínima de multiplicidad simple, incluyendo aquellos en infinito. En consecuencia, los sistemas considerados en [16] poseen sólo retardos unitarios.

Con el propósito de extender parcialmente los resultados entregados en [16], este capítulo resuelve el problema de regulación en sistemas altos considerando ceros de fase no mínima de multiplicidad mayor a 1. Los resultados obtenidos para sistemas altos serán particularizados al caso de plantas SIMO, obteniéndose una forma cerrada para el desempeño óptimo, la que es expresada en función de los rasgos dinámicos de la planta. Finalmente, con el propósito de comparar los desempeños alcanzables, se presenta una forma cerrada para el desempeño óptimo de sistemas aumentados, bajo supuestos que permitan comparar de manera justa los beneficios de agregar canales de control.

El presente capítulo se organiza como sigue: la Sección 3.2 introduce el funcional de costo empleado para medir el desempeño alcanzable por ambos sistemas; la Sección 3.3 estudia el mejor desempeño alcanzable por sistemas altos, cuando se supone que la perturbación de entrada es un Delta de Kronecker; la Sección 3.4 introduce el mejor desempeño alcanzable por sistemas aumentados considerando el mismo tipo de perturbación; la Sección 3.5 presenta resultados sobre los beneficios de agregar canales adicionales a un sistema alto a fin de mejorar su desempeño. A modo de ilustrar los resultados, se presenta un ejemplo que ilustra las ideas presentadas en este capítulo. Finalmente, la Sección 3.6 presenta un resumen de los resultados obtenidos y conclusiones.

3.2. Índice de desempeño para el problema de regulación

La mayor parte de los problemas sobre límites de desempeño en sistemas de control considera medidas de desempeño cuadráticas. Esta medida puede involucrar al error de seguimiento [1], [4], [6], o también ponderar conjuntamente el error de seguimiento y la señal de actuación [17], [18], [57].

En la aproximación que se abordará en este capítulo, se analizará el problema de regulación a través del comportamiento en el tiempo del error del seguimiento $\mathbf{e}[k] \in \mathbb{R}^n$. Consideraremos el funcional

$$J \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}[k]^T \mathbf{e}[k] . \quad (3.2.1)$$

La definición de J entregada en (3.2.1) considera sólo el error de seguimiento y no otras señales del lazo cerrado. Esto, a fin de que el mínimo de J constituya el mejor desempeño alcanzable por cualquier controlador lineal, entregando así un referente de diseño.

Por otro lado, (3.2.1) puede interpretarse como la energía total del error de seguimiento [53], [58]. Usando el Teorema de Parseval (Teorema 2.1 en la página 14), se puede escribir

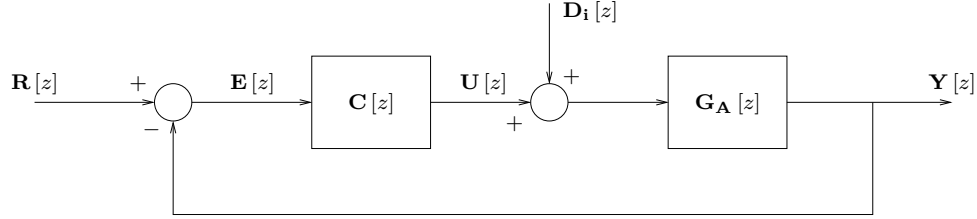


Figura 3.1. Lazo cerrado de control considerado en el problema de regulación de sistemas altos.

J como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}[k]^T \mathbf{e}[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{traza} \left\{ \mathbf{E}[e^{j\omega}]^H \mathbf{E}[e^{j\omega}] \right\} d\omega = \|\mathbf{E}[z]\|_2^2, \quad (3.2.2)$$

donde $\mathbf{E}[z]$ es la transformada \mathcal{Z} de $\mathbf{e}[k]$. Lo anterior permite transformar el problema desde el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Así, la ponderación cuadrática de una señal da lugar a un problema definido como el cuadrado de la norma 2 de la misma señal en el dominio de la frecuencia.

La expresión (3.2.2) es válida si y sólo si $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{e}[k]| = \mathbf{0}$, lo que es garantizado si y sólo si el lazo cerrado es internamente estable, constituyendo la base para el trabajo que se presenta a continuación.

3.3. Problema de regulación en sistemas altos

3.3.1. Formulación del problema

Considérese el esquema de control en tiempo discreto de la Figura 3.1. En dicho esquema, $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$, $n > m$, corresponde a la planta, $\mathbf{C}[z] \in \mathcal{R}_p^{m \times n}$ es el controlador del sistema en lazo cerrado, y $\mathbf{d}_i[k] \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{r}[k] \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}[k] \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u}[k] \in \mathbb{R}^m$ corresponden a las señales de perturbación de entrada, referencia, error de seguimiento y control, respectivamente.

El problema a analizar en esta sección considera el funcional presentado en (3.2.1), en ausencia de referencia ($\mathbf{r}[k] = \mathbf{0}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$) y cuando la perturbación de entrada está dada por $\mathbf{d}_i[k] \triangleq \boldsymbol{\nu} \delta[k]$, con $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^m$. Evidentemente, nuestro interés recae sobre lazos internamente estables. Por lo tanto, podemos reescribir J en (3.2.1) como se indica en (3.2.2).

Usando las ideas de la Sección 2.10.1, es posible escribir $\mathbf{E}[z]$ en función de la transformada \mathcal{Z} de la perturbación de entrada como

$$\mathbf{E}[z] = -\mathbf{S}_{i0}[z] \mathbf{D}_i[z] = -(\mathbf{I}_n + \mathbf{G}_A[z] \mathbf{C}[z])^{-1} \mathbf{G}_A[z] \mathbf{D}_i[z], \quad (3.3.1)$$

lo que permite reescribir J como

$$J = \left\| (\mathbf{I}_n + \mathbf{G}_A[z] \mathbf{C}[z])^{-1} \mathbf{G}_A[z] \mathbf{D}_i[z] \right\|_2^2. \quad (3.3.2)$$

El funcional J presentado en (3.3.2) es no lineal en el parámetro de diseño $\mathbf{C}[z]$. Por lo tanto, es necesario parametrizar el controlador de modo que el funcional resulte lineal en

el parámetro de diseño. Tal como se presenta en la Sección 2.10.3, es posible definir una factorización coprima para $\mathbf{G}_A [z]$ dada por

$$\mathbf{G}_A [z] = \mathbf{N}_D [z] \mathbf{D}_D [z]^{-1} = \mathbf{D}_I [z]^{-1} \mathbf{N}_I [z], \quad (3.3.3)$$

donde $\mathbf{N}_D [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$, $\mathbf{N}_I [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$, $\mathbf{D}_D [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$ y $\mathbf{D}_I [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ satisfacen la doble igualdad de Bezout, definida en (2.8.6), que puede expresarse de manera equivalente como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_D [z] & \mathbf{Y}_D [z] \\ \mathbf{N}_D [z] & \mathbf{X}_D [z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_I [z] & -\mathbf{Y}_I [z] \\ -\mathbf{N}_I [z] & \mathbf{D}_I [z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \quad (3.3.4)$$

con $\mathbf{X}_D [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$, $\mathbf{X}_I [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$, $\mathbf{Y}_D [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$ e $\mathbf{Y}_I [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$. La parametrización anterior permite expresar el funcional J como

$$J = \|(\mathbf{X}_D [z] - \mathbf{N}_D [z] \mathbf{Q} [z]) \mathbf{N}_I [z] \boldsymbol{\nu}\|_2^2, \quad (3.3.5)$$

donde $\mathbf{Q} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$ es la variable de decisión, y donde se ha usado el que $\mathbf{D}_I [z] = \boldsymbol{\nu}$ corresponde a la transformada \mathcal{Z} de la perturbación de entrada.

A fin de simplificar el análisis, se introduce la siguiente suposición.

Suposición 3.1 (Naturaleza de la dirección de perturbación $\boldsymbol{\nu}$). *La dirección de perturbación $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^m$ es una variable aleatoria que satisface*

$$\mathcal{E} \{\boldsymbol{\nu}\} = \mathbf{0}, \quad (3.3.6)$$

$$\mathcal{E} \{\boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T\} = \mathbf{I}_m. \quad (3.3.7)$$

Tomando esperanza en (3.3.5), y considerando la Suposición 3.1, se obtiene

$$J_A = \mathcal{E} \{J\} = \|(\mathbf{X}_D [z] - \mathbf{N}_D [z] \mathbf{Q} [z]) \mathbf{N}_I [z]\|_2^2. \quad (3.3.8)$$

Finalmente, el problema de optimización de nuestro interés consiste en obtener el ínfimo de J_A , cuando $\mathbf{Q} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$:

Problema 3.1 (Regulación en sistemas altos). *Obtenga*

$$J_A^{\text{opt}} = \inf_{\mathbf{Q} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} J_A = \inf_{\mathbf{Q} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} \|(\mathbf{X}_D [z] - \mathbf{N}_D [z] \mathbf{Q} [z]) \mathbf{N}_I [z]\|_2^2 \quad (3.3.9)$$

y, si el ínfimo es alcanzable, obtenga también el parámetro $\mathbf{Q} [z]$ que alcanza dicho ínfimo.

Calcular J_A^{opt} será el centro de atención en la próxima sección.

3.3.2. Desempeño óptimo de regulación: caso general

Considerando la formulación del problema dada en la sección precedente, se presenta a continuación una caracterización de J_A^{opt} cuando $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$, $n > m$.

Teorema 3.1. (Desempeño óptimo de regulación en sistemas altos) *Considere la solución óptima del Problema 3.1, una planta $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$, con n_c ceros de FNM finitos $c_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, n_c$) y n_z ceros de FNM en infinito. Adicionalmente, considere que $\mathbf{G}_A [z]$*

no tiene ceros en $|z| = 1$. Defina $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z] \triangleq \mathbf{N}_{\mathbf{I}}[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}}[z]^{-1}$, donde $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}}[z] \in \mathcal{R}^{m \times m}$ es un interactor unitario derecho de grado y de ceros de FNM finitos de $\mathbf{N}_{\mathbf{I}}[z]$. Entonces, la solución óptima del Problema 3.1 se obtiene escogiendo $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{\text{opt}}[z]$, donde

$$\mathbf{Q}^{\text{opt}}[z] \triangleq \arg \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}} J_A = \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z]^{-1} \left(\left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_{\mathbf{I}}[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2^{\perp}} \Big|_{z=0} + \left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_{\mathbf{I}}[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2} \right) \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z]^{\dagger}, \quad (3.3.10)$$

donde $\mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times m}$ es un factor outer tal que $\mathbf{N}_{\mathbf{D}}[z] \triangleq \mathbf{N}_{\mathbf{D}_i}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z]$, con $\mathbf{N}_{\mathbf{D}_i}[z]$ inner, y $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z]^{\dagger} \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}$ es una pseudo inversa izquierda de $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z]$.

El costo óptimo J_A^{opt} está dado por

$$J_A^{\text{opt}} = \left\| \left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_{\mathbf{I}}[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2^{\perp}} - \left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_{\mathbf{I}}[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2^{\perp}} \Big|_{z=0} \right\|_2^2. \quad (3.3.11)$$

Demostración: A partir de (3.3.4) se tiene que $\mathbf{X}_{\mathbf{D}}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}}[z] = \mathbf{N}_{\mathbf{D}}[z] \mathbf{X}_{\mathbf{I}}[z]$, lo que permite escribir (3.3.9) como

$$\begin{aligned} & \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}} \|(\mathbf{X}_{\mathbf{D}}[z] - \mathbf{N}_{\mathbf{D}}[z] \mathbf{Q}[z]) \mathbf{N}_{\mathbf{I}}[z]\|_2^2 \\ &= \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}} \|\mathbf{N}_{\mathbf{D}}[z] \mathbf{X}_{\mathbf{I}}[z] - \mathbf{N}_{\mathbf{D}}[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}}[z]\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

y, considerando la matriz unitaria

$$\mathbf{\Lambda}[z] = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\mathbf{D}_i}[z]^{\sim} \\ \mathbf{I}_n - \mathbf{N}_{\mathbf{D}_i}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{D}_i}[z]^{\sim} \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

en la expresión (3.3.12), se obtiene

$$J_A^{\text{opt}} = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}} \|\mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_{\mathbf{I}}[z] - \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}}[z]\|_2^2. \quad (3.3.14)$$

Empleando el interactor unitario derecho $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}}[z]$ en (3.3.14), es posible expresar J_A^{opt} como

$$J_A^{\text{opt}} = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}} \left\| \underbrace{\mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_{\mathbf{I}}[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}}[z]^{-1}}_{\mathbf{A}[z]} - \underbrace{\mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z]}_{\mathbf{B}[z]} \right\|_2^2. \quad (3.3.15)$$

En la expresión (3.3.15) se cumple que $\mathbf{A}[z]$ tiene términos tanto estables como inestables, estos últimos aportados por el interactor unitario $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}}[z]$. En consecuencia, $\mathbf{A}[z] \in \mathcal{RL}_2^{m \times m}$. Por otro lado, dado que $\mathbf{B}[z]$ contiene sólo términos estables y propios, se cumple que $\mathbf{B}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times m}$. Esto permite efectuar la separación dada por

$$\begin{aligned}
J_A^{opt} = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} & \left\| \underbrace{\left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_I[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \text{dc}}[z]^{-1} \right\}}_{\mathbf{A}_n[z]} \right\|_{\mathcal{H}_2^\perp} \\
& + \left\| \underbrace{\left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_I[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \text{dc}}[z]^{-1} \right\}}_{\mathbf{B}_n[z]} - \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \text{FM}}[z] \right\|_2^2. \quad (3.3.16)
\end{aligned}$$

En la expresión (3.3.16), el término $\mathbf{A}_n[z]$ sólo contiene expresiones inestables e impropias, por lo que $\mathbf{A}_n[z] \in \mathcal{RH}_2^{\perp m \times m}$. Por otro lado, $\mathbf{B}_n[z]$ sólo contiene términos estables y propios, por lo que $\mathbf{B}_n[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$. En consecuencia, es posible aplicar la propiedad presentada en (2.5.10) para expresar (3.3.16) como

$$\begin{aligned}
J_A^{opt} = & \left\| \left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_I[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \text{dc}}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2^\perp} - \left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_I[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \text{dc}}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2^\perp} \Big|_{z=0} \right\|_2^2 \\
& + \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} \left\| \left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_I[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \text{dc}}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2^\perp} \Big|_{z=0} \right. \\
& \left. + \left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_I[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \text{dc}}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2} - \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \text{FM}}[z] \right\|_2^2, \quad (3.3.17)
\end{aligned}$$

donde es posible escoger $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{opt}[z]$ tal como se presenta (3.3.10), por lo que el costo óptimo puede expresarse como

$$\begin{aligned}
J_A^{opt} = & \left\| \left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_I[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \text{dc}}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2^\perp} \right. \\
& \left. - \left\{ \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_I[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \text{dc}}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2^\perp} \Big|_{z=0} \right\|_2^2, \quad (3.3.18)
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ■

Lema 3.1 (Sobre obtención de la pseudo inversa $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \text{FM}}[z]^\dagger$). *Considere la matriz de transferencia $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \text{FM}}[z]$, definida en el Teorema 3.1. Entonces*

1. *Es posible definir la matriz*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\mathbf{N}, \text{FM}}[z] \\ \hline \mathbf{D}_{\mathbf{N}, \text{FM}}[z] \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{\Xi} \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \text{FM}}[z], \quad (3.3.19)$$

donde $\mathbf{\Xi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{N}_{\mathbf{N}, \text{FM}}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(n-m) \times m}$ y $\mathbf{D}_{\mathbf{N}, \text{FM}}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$, esta última con inversa en $\mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$.

2. *Si $\mathbf{\Xi}$ se elige de modo tal que $\mathbf{D}_{\mathbf{N}, \text{FM}}[z]$ en (3.3.19) sea invertible en \mathcal{RH}_∞ , entonces $\mathbf{N}_{\mathbf{N}, \text{FM}}[z]$ y $\mathbf{D}_{\mathbf{N}, \text{FM}}[z]$ son factores coprimos por la derecha en \mathcal{RH}_∞ .*

3. Una pseudo inversa de $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z]$ en \mathcal{RH}_∞ se define como

$$\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z]^\dagger \triangleq \left[-\mathbf{Y}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \middle| \mathbf{X}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \right] \Xi, \quad (3.3.20)$$

donde $\mathbf{X}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$ e $\mathbf{Y}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times (n-m)}$ satisfacen

$$\mathbf{X}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \mathbf{D}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z] - \mathbf{Y}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \mathbf{N}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z] = \mathbf{I}_m. \quad (3.3.21)$$

Demostración: Procedemos por partes:

1. Dado que $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z]$ es una matriz de transferencia estable, bipropia y de fase mínima, entonces es posible escoger una matriz de permutación de filas $\Xi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que la partición definida según (3.3.19) tenga las propiedades mencionadas.
2. Para demostrar que $\mathbf{N}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z]$ y $\mathbf{D}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z]$ son factores coprimos por la derecha en \mathcal{RH}_∞ , basta probar que no existe una matriz de transferencia $\mathbf{H}[z] \in \mathcal{R}^{m \times m}$, tal que cumpla simultáneamente con ser un divisor común derecho de $\mathbf{N}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z]$ y $\mathbf{D}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z]$ y que su inversa $\mathbf{H}[z]^{-1}$ sea inestable y/o impropia. Para ello, supongamos que existe una matriz de transferencia $\mathbf{H}[z] \in \mathcal{R}^{m \times m}$ tal que satisface simultáneamente ambas condiciones. Dado lo anterior, entonces es posible establecer que $\mathbf{N}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z]$ y $\mathbf{D}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z]$ tienen al menos un cero de FNM (finito o infinito) en común. Sin embargo, esto no puede ser posible, pues implica que la matriz de transferencia $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z]$ posee al menos un cero de FNM, lo que es una contradicción. En consecuencia, no existe una matriz $\mathbf{H}[z] \in \mathcal{R}^{m \times m}$ tal que satisfaga simultáneamente ambas condiciones, lo que permite concluir lo esperado.
3. Dado que $\mathbf{N}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z]$ y $\mathbf{D}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z]$ son factores coprimos por la derecha en \mathcal{RH}_∞ , entonces existen $\mathbf{Y}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z]$ y $\mathbf{X}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z]$ estables tales que

$$\mathbf{X}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \mathbf{D}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z] - \mathbf{Y}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \mathbf{N}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z] = \mathbf{I}_m, \quad (3.3.22)$$

o, equivalentemente,

$$\left[-\mathbf{Y}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \middle| \mathbf{X}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \right] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z] \\ \hline \mathbf{D}_{\mathbf{N}, \mathbf{FM}}[z] \end{bmatrix} = \mathbf{I}_m. \quad (3.3.23)$$

Empleando la definición (3.3.19) en (3.3.23) resulta

$$\underbrace{\left[-\mathbf{Y}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \middle| \mathbf{X}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^t[z] \right]}_{\mathbf{A}[z]} \Xi \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z] = \mathbf{I}_m. \quad (3.3.24)$$

Observe que el término $\mathbf{A}[z]$ corresponde a una pseudo inversa estable de $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z]$. En consecuencia, definiendo $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}[z]^\dagger \triangleq \mathbf{A}[z]$ se obtiene el resultado deseado, finalizando así la demostración. \blacksquare

El resultado presentado en el Teorema 3.1 indica que la menor energía del error de seguimiento cuando la perturbación de entrada es un delta de Kronecker, es función implícita de los ceros de FNM de la planta, tanto finitos como infinitos, contenidos en el interactor unitario derecho $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \text{dc}}[z]$. Estos ceros de FNM son ponderados en el costo óptimo por términos dependientes de la planta $\mathbf{G}_{\mathbf{A}}[z]$. Un aspecto que debe destacarse es que el valor óptimo J_A^{opt} no depende en forma explícita de los polos inestables del sistema. Esto se debe a que en (3.3.9) no aparecen términos relacionados con los polos inestables ($\mathbf{D}_{\mathbf{D}}[z]$ o $\mathbf{D}_{\mathbf{I}}[z]$)¹.

3.3.3. Desempeño óptimo de regulación: plantas SIMO

El resultado presentado en el Teorema 3.1 es válido para plantas altas con un número arbitrario de entradas y salidas². Sin embargo, si se restringe el estudio a un caso particular de sistemas, se pueden obtener formas cerradas explícitas para el Problema 3.1 en la página 28. Esto permitirá estudiar el valor óptimo del funcional J_A como función de los rasgos dinámicos de la planta. A continuación, se presenta un resultado que entrega una forma cerrada para el desempeño óptimo en la regulación de plantas de una entrada y múltiples salidas (SIMO)

Teorema 3.2 (Desempeño óptimo de regulación en sistemas SIMO). *Considere un sistema de una entrada y múltiples salidas (SIMO) $\mathbf{G}_{\mathbf{A}}[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times 1}$, con n_c ceros de FNM c_i , ($i = 1, \dots, n_c$), y n_z ceros de FNM en infinito. Adicionalmente, suponga que $\mathbf{G}_{\mathbf{A}}[z]$ no tiene ceros en $|z| = 1$ y que los n_c ceros de FNM finitos no son repetidos. Defina $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \text{FM}}[z] \triangleq \mathbf{N}_{\mathbf{I}}[z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \text{dc}}[z]^{-1}$, donde $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \text{dc}}[z] \in \mathcal{R}$ es un interactor unitario derecho de grado n_z y de ceros de FNM finitos de $\mathbf{N}_{\mathbf{I}}[z]$. Considere la factorización inner-outer $\mathbf{N}_{\mathbf{D}}[z] \triangleq \mathbf{N}_{\mathbf{D}_i}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z]$, y una expansión en serie de potencias para $\mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_{\mathbf{I}}[z]$, definida como*

$$\mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_{\mathbf{I}}[z] \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{-k}, \quad (3.3.25)$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Entonces, el valor óptimo (3.3.9) se obtiene escogiendo $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{\text{opt}}[z]$, donde

$$\mathbf{Q}^{\text{opt}}[z] \triangleq \arg \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{1 \times n}} J_A = \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z]^{-1} (\mathbf{M}_1[0] + \mathbf{M}_2[z]) \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \text{FM}}[z]^{\dagger}, \quad (3.3.26)$$

$\mathbf{M}_2[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}$ está dado por

$$\mathbf{M}_2[z] \triangleq \prod_{i=1}^{n_c} \frac{1 - z \bar{c}_i}{z - c_i} \sum_{l=n_z}^{\infty} \alpha_l z^{n_z - l} - \sum_{j=1}^{n_c} \left\{ m_j \frac{1 - z \bar{c}_j}{z - c_j} \sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i c_j^{n_z - i} \right\}, \quad (3.3.27)$$

$$\mathbf{M}_1[0] \triangleq - \sum_{j=1}^{n_c} \left\{ m_j \sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i c_j^{n_z - i - 1} \right\}, \quad (3.3.28)$$

¹Lo anterior es consistente con limitaciones fundamentales [3] en problemas de regulación.

²Este número arbitrario de entradas y salidas sólo debe cumplir los requisitos de dimensionalidad para que la estructura de la planta sea alta.

$$m_j \triangleq \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_c} \frac{1 - c_j \bar{c}_k}{c_j - c_k}, \quad (3.3.29)$$

y $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}} [z]^\dagger \in \mathcal{RH}_\infty^{1 \times n}$ es una pseudo inversa izquierda de $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}} [z]$.

Bajo los supuestos y definiciones anteriores, el valor óptimo J_A^{opt} puede expresarse como

$$J_A^{opt} = \sum_{i=0}^{n_z-1} \alpha_i^2 + \sum_{h=1}^{n_c} \sum_{l=1}^{n_c} \left\{ m_h m_l \frac{(|c_h|^2 - 1)(|c_l|^2 - 1)}{c_h c_l - 1} \times \sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i c_h^{n_z-i-1} \sum_{j=n_z}^{\infty} \alpha_j c_l^{n_z-j-1} \right\}. \quad (3.3.30)$$

Demostración: La demostración de este teorema sigue las mismas líneas de la demostración del Teorema 3.1 hasta la expresión (3.3.15). Esta demostración se realizará a partir de dicha expresión. Considere

$$J_A^{opt} = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{1 \times n}} \left\| \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o} [z] \mathbf{X}_{\mathbf{I}} [z] \mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}} [z]^{-1} - \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o} [z] \mathbf{Q} [z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}} [z] \right\|_2^2. \quad (3.3.31)$$

En plantas SIMO, el interactor unitario derecho $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}} [z]$ puede ser definido como

$$\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}} [z] \triangleq \frac{1}{z^{n_z}} \prod_{i=1}^{n_c} \frac{z - c_i}{1 - z \bar{c}_i}, \quad (3.3.32)$$

lo que permite escribir (3.3.31) como

$$J_A^{opt} = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{1 \times n}} \left\| \mathbf{R} [z] + \mathbf{M} [z] - \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o} [z] \mathbf{Q} [z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}} [z] \right\|_2^2, \quad (3.3.33)$$

donde (vea (3.3.25))

$$\mathbf{R} [z] \triangleq \prod_{i=1}^{n_c} \frac{1 - z \bar{c}_i}{z - c_i} \sum_{i=0}^{n_z-1} \alpha_i z^{n_z-i}, \quad (3.3.34)$$

$$\mathbf{M} [z] \triangleq \prod_{i=1}^{n_c} \frac{1 - z \bar{c}_i}{z - c_i} \sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i z^{n_z-i}. \quad (3.3.35)$$

El término $\mathbf{R} [z]$ es impropio e inestable, por lo que se satisface $\mathbf{R} [z] \in \mathcal{RH}_2^\perp$. Por otro lado, $\mathbf{M} [z]$ contiene términos tanto estables como inestables, por lo que $\mathbf{M} [z] \in \mathcal{RL}_2$. Para separar los términos estables de los inestables en $\mathbf{M} [z]$, se recurre a la técnica ilustrada en [1], lo que permite expresar $\mathbf{M} [z]$ como

$$\mathbf{M} [z] \triangleq \underbrace{\sum_{j=1}^{n_c} \left\{ m_j \frac{1 - z \bar{c}_j}{z - c_j} \sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i c_j^{n_z-i} \right\}}_{\mathbf{M}_1[z]} + \mathbf{M}_2 [z], \quad (3.3.36)$$

con m_j definido según (3.3.29), y $\mathbf{M}_2 [z] \in \mathcal{RH}_\infty$. El término $\mathbf{M}_1 [z]$ sólo contiene elementos inestables, por lo que $\mathbf{M}_1 [z] \in \mathcal{RH}_2^\perp$. Dado que

$$(\mathbf{R} [z] + \mathbf{M}_1 [z]) \in \mathcal{RH}_2^\perp, \quad (3.3.37)$$

$$(\mathbf{M}_2 [z] - \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o} [z] \mathbf{Q} [z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}} [z]) \in \mathcal{RH}_\infty, \quad (3.3.38)$$

entonces es posible emplear la propiedad (2.5.10) para expresar (3.3.33) como

$$J_A^{opt} = \|\mathbf{R} [z] + \mathbf{M}_1 [z] - \mathbf{R} [0] - \mathbf{M}_1 [0]\|_2^2 + \inf_{\mathbf{Q} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{1 \times n}} \|\mathbf{R} [0] + \mathbf{M}_1 [0] + \mathbf{M}_2 [z] - \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o} [z] \mathbf{Q} [z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}} [z]\|_2^2, \quad (3.3.39)$$

y, dado que $\mathbf{R} [0] = 0$, entonces se puede escoger $\mathbf{Q} [z] = \mathbf{Q}^{opt} [z]$ definido en (3.3.26) para obtener como valor óptimo

$$J_A^{opt} = \|\mathbf{R} [z] + \mathbf{M}_1 [z] - \mathbf{M}_1 [0]\|_2^2. \quad (3.3.40)$$

Aplicando la definición de la norma 2 dada en (2.5.3) al valor óptimo (3.3.40), se obtiene

$$J_A^{opt} = \frac{1}{2\pi j} \oint (\mathbf{R} [z] + \mathbf{M}_1 [z] - \mathbf{M}_1 [0])^\sim (\mathbf{R} [z] + \mathbf{M}_1 [z] - \mathbf{M}_1 [0]) \frac{dz}{z}, \quad (3.3.41)$$

donde la integral es sobre la circunferencia unitaria, recorrida en sentido contrarreloj. Empleando el Lema A.1 del Apéndice A, se puede demostrar que $J_A^{opt} = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$, donde

$$\gamma_1 \triangleq \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R} [z]^\sim \mathbf{R} [z] \frac{dz}{z}, \quad (3.3.42)$$

$$\gamma_2 \triangleq \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{M}_1 [z]^\sim \mathbf{M}_1 [z] \frac{dz}{z}, \quad (3.3.43)$$

$$\gamma_3 \triangleq \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{M}_1 [z]^\sim \mathbf{M}_1 [0] \frac{dz}{z}. \quad (3.3.44)$$

Es posible demostrar que

$$\gamma_1 \triangleq \sum_{i=0}^{n_z-1} \alpha_i^2, \quad (3.3.45)$$

y que

$$\gamma_2 - \gamma_3 \triangleq \sum_{h=1}^{n_c} \sum_{l=1}^{n_c} \left\{ m_h m_l \frac{(|c_h|^2 - 1)(|c_l|^2 - 1)}{c_h c_l - 1} \times \sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i c_h^{n_z-i-1} \sum_{j=n_z}^{\infty} \alpha_j c_l^{n_z-j-1} \right\}, \quad (3.3.46)$$

lo que permite concluir la demostración. ■

Observación 3.1 (Sobre el cómputo de J_A^{opt} en el Teorema 3.2). *La demostración del Teorema 3.2 ha sido resumida a fin de privilegiar su comprensión por sobre su extensión y demostración paso a paso. Para mayores detalles sobre la demostración, se invita al lector a revisar el Apéndice A, donde se detalla el cálculo del costo óptimo.*

El valor óptimo J_A^{opt} presentado en (3.3.30) permite apreciar de manera explícita el efecto de los ceros de fase no mínima sobre el desempeño. El lado derecho de la igualdad (3.3.30) puede ser analizado por partes. El primer término, hace explícito el efecto de los ceros de FNM en infinito sobre el desempeño óptimo, ponderados por la estructura de la planta. Por otro lado, el segundo término, hace explícito el efecto de los ceros de FNM finitos en el mejor desempeño alcanzable. El resultado presentado en el Teorema 3.2 en la página 32 extiende parcialmente los resultados en [16] al caso de plantas SIMO que poseen más de un cero de FNM en infinito. Evidentemente, nuestros resultados colapsan a los de [16] cuando $n_z = 1$.

Corolario 3.1 (Desempeño óptimo en sistemas SIMO con retardo unitario). *Considere la notación y supuestos efectuados del Teorema 3.2 en la página 32. Si $n_z = 1$, entonces*

$$J_A^{opt} = \left(\mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[\infty] \mathbf{D}_D[\infty]^{-1} \right)^2 + \sum_{h=1}^{n_c} \sum_{l=1}^{n_c} \left\{ m_h m_l \frac{(|c_h|^2 - 1)(|c_l|^2 - 1)}{c_h c_l - 1} \right. \\ \times \left(\mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[\infty] \mathbf{D}_D[\infty]^{-1} - \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[c_h] \mathbf{D}_D[c_h]^{-1} \right) \\ \left. \times \left(\mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[\infty] \mathbf{D}_D[\infty]^{-1} - \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[c_l] \mathbf{D}_D[c_l]^{-1} \right) \right\}. \quad (3.3.47)$$

Demostración: Cuando se considera $n_z = 1$, los términos que conforman al valor óptimo J_A^{opt} son

$$\sum_{i=0}^{n_z-1} \alpha_i^2 = \left(\mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[\infty] \mathbf{X}_I[\infty] \right)^2, \quad (3.3.48)$$

$$\sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i z^{n_z-i-1} = \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[z] \mathbf{X}_I[z] - \mathbf{N}_{\mathbf{D}_o}[\infty] \mathbf{X}_I[\infty]. \quad (3.3.49)$$

De (2.8.6) se puede demostrar que, si $c_i \in \mathbb{C}$ es un cero de FNM (finito o infinito) de $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times 1}$, entonces

$$\mathbf{X}_I[\infty] = \mathbf{D}_D[\infty]^{-1}, \quad (3.3.50)$$

$$\mathbf{X}_I[c_i] = \mathbf{D}_D[c_i]^{-1}. \quad (3.3.51)$$

Empleando las igualdades (3.3.48)-(3.3.51) en J_A^{opt} se obtiene el resultado buscado. \blacksquare

El resultado presentado en el Corolario 3.1 es consistente con las expresiones reportadas en [16], cuando se particulariza el índice de desempeño al considerado en esta tesis.

El fin último del estudio de los valores óptimos de los índices de desempeño considerados en esta sección, es cuantificar las mejoras obtenidas al agregar nuevos canales de control, modificando la estructura de la matriz de transferencia del sistema alto original. Con tal objeto, la sección siguiente presenta límites de desempeño para sistemas aumentados.

3.4. Problema de regulación en sistemas aumentados

Esta sección aborda problemas de regulación para sistemas aumentados, entregando una caracterización del mejor desempeño alcanzable. Comenzaremos formulando el problema, para luego presentar los resultados obtenidos.

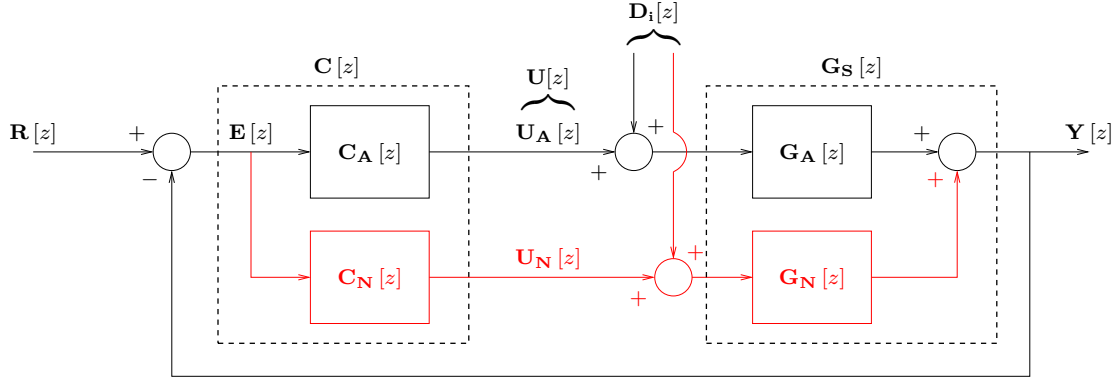


Figura 3.2. Lazo cerrado de control considerado en el problema de regulación de sistemas aumentados.

3.4.1. Formulación del problema

La formulación del problema de regulación para sistemas aumentados sigue las líneas del problema de regulación de sistemas altos, con ciertas modificaciones, que permiten cuantificar de manera justa los beneficios de agregar nuevos canales de control.

Considere el lazo cerrado de control de tiempo discreto de la Figura 3.2, donde $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$ ($n > m$) es la matriz de transferencia de la planta alta y $\mathbf{G}_N[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times (n-m)}$ corresponde a la matriz de transferencia que relaciona los $n-m$ nuevos canales de control con las n salidas del sistema. De esta manera, $\mathbf{G}_A[z]$ y $\mathbf{G}_N[z]$ constituyen el sistema aumentado $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times n}$ definido como

$$\mathbf{G}_S[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A[z] \\ \mathbf{G}_N[z] \end{bmatrix}. \quad (3.4.1)$$

Por otro lado, el controlador del sistema aumentado, denotado por $\mathbf{C}[z] \in \mathcal{R}^{n \times n}$, puede ser separado en dos partes, tal como se muestra en la Figura 3.2. Así, la matriz de transferencia $\mathbf{C}_A[z] \in \mathcal{R}^{m \times n}$ corresponde a aquella parte del controlador que manipula a los primeros m canales de control de $\mathbf{G}_S[z]$, en tanto que $\mathbf{C}_N[z] \in \mathcal{R}^{(n-m) \times n}$ es la parte del controlador que manipula a los últimos $n-m$ canales de control de $\mathbf{G}_S[z]$.

En la Figura 3.2, $\mathbf{y}[k] \in \mathbb{R}^n$ es la salida del sistema, mientras que $\mathbf{r}[k] \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{e}[k] \in \mathbb{R}^n$ corresponden a las señales de referencia y error de seguimiento, respectivamente. La señal $\mathbf{d}_i[k] \in \mathbb{R}^n$ corresponde a la perturbación de entrada, en tanto que $\mathbf{u}[k] \in \mathbb{R}^n$ corresponde a la señal de control. Particionamos $\mathbf{u}[k]$ como

$$\mathbf{u}[k] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A[k] \\ \mathbf{u}_N[k] \end{bmatrix}, \quad (3.4.2)$$

donde $\mathbf{u}_A[k] \in \mathbb{R}^m$ es la señal de control asociada a la planta alta $\mathbf{G}_A[z]$, en tanto que $\mathbf{u}_N[k] \in \mathbb{R}^{(n-m)}$ es la señal de control asociada a la matriz de transferencia adicional $\mathbf{G}_N[z]$.

El problema de interés se centra en el funcional J definido en (3.2.1), en ausencia de referencias, y cuando la perturbación de entrada está dada por $\mathbf{d}_i[k] = \boldsymbol{\nu} \delta[k]$, donde $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$. El funcional J puede ser llevado al dominio de la frecuencia aplicando el Teorema de Parseval, obteniéndose

$$J = \|\mathbf{E}[z]\|_2^2, \quad (3.4.3)$$

donde $\mathbf{E}[z]$ corresponde a la transformada \mathcal{Z} del error de seguimiento $\mathbf{e}[k]$. Procediendo como en la sección anterior, y utilizando la misma notación introducida allí, es posible concluir que

$$J = \|(\mathbf{X}_D[z] - \mathbf{N}_D[z] \mathbf{Q}[z]) \mathbf{N}_I[z] \boldsymbol{\nu}\|_2^2, \quad (3.4.4)$$

donde $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ es el parámetro de diseño, y donde se ha usado el que $\mathbf{D}_I[z] = \boldsymbol{\nu}$.

Con el fin de cuantificar de manera justa los beneficios de agregar nuevos canales de control, se efectúa la siguiente suposición sobre la dirección de perturbación $\boldsymbol{\nu}$.

Suposición 3.2. (Naturaleza de la dirección de perturbación $\boldsymbol{\nu}$ en sistemas aumentados) *La dirección de perturbación $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria que satisface*

$$\mathcal{E}\{\boldsymbol{\nu}\} = \mathbf{0}, \quad (3.4.5)$$

$$\mathcal{E}\{\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T\} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.4.6)$$

La Suposición 3.2 garantiza que la dirección de la perturbación es tal que ésta sólo afecta a los primeros m canales de control de $\mathbf{G}_S[z]$. Este supuesto permite medir en forma justa el efecto de la adición de nuevos canales de control.

Considere la partición

$$\mathbf{N}_I[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{N}_I^a[z] \\ \mathbf{N}_I^s[z] \end{bmatrix}, \quad (3.4.7)$$

donde $\mathbf{N}_I^a[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$ y $\mathbf{N}_I^s[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times (n-m)}$. Lo anterior, en conjunto con la Suposición 3.2, permiten escribir $\mathcal{E}\{J\}$ como

$$J_S = \mathcal{E}\{J\} = \|(\mathbf{X}_D[z] - \mathbf{N}_D[z] \mathbf{Q}[z]) \mathbf{N}_I^a[z]\|_2^2. \quad (3.4.8)$$

Finalmente, el problema de obtener el desempeño óptimo en sistemas aumentados es equivalente a hallar el ínfimo de J_S :

Problema 3.2 (Regulación en sistemas aumentados). *Obtenga*

$$J_S^{opt} = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} J_S = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \|(\mathbf{X}_D[z] - \mathbf{N}_D[z] \mathbf{Q}[z]) \mathbf{N}_I^a[z]\|_2^2 \quad (3.4.9)$$

y, si el ínfimo es alcanzable, obtenga también el parámetro $\mathbf{Q}[z]$ que alcanza dicho ínfimo.

El valor óptimo (3.4.8) será calculado en la siguiente sección.

3.4.2. Desempeño óptimo de regulación en sistemas aumentados

En base al Problema 3.2, se presenta una caracterización para el desempeño óptimo alcanzable en regulación de sistemas aumentados.

Teorema 3.3. (Desempeño óptimo de regulación en sistemas aumentados) *Considere el Problema 3.2, y una planta $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times n}$ con n_c ceros de FNM finitos no repetidos ubicados en c_i , ($i = 1, \dots, n_c$) y n_z ceros de FNM en infinito. Adicionalmente, suponga que $\mathbf{G}_S[z]$ no posee ceros ni polos en $|z| = 1$. Defina*

$$\mathbf{N}_D[z] \triangleq \mathbf{E}_{I,dc}[z] \mathbf{N}_{D,FM}[z], \quad (3.4.10)$$

donde $\mathbf{E}_{I,dc}[z]$ es el interactor unitario izquierdo de ceros de FNM de $\mathbf{N}_D[z]$, y $\mathbf{N}_{D,FM}[z]$ es la parte estable, bipropia y de fase mínima de $\mathbf{N}_D[z]$. Defina, además,

$$\mathbf{N}_I^a[z] \triangleq \mathbf{N}_{I,FM}^a[z] \mathbf{E}_{D,dc}^a[z], \quad (3.4.11)$$

donde $\mathbf{E}_{D,dc}^a[z]$ es el interactor unitario derecho de ceros de FNM de $\mathbf{N}_I^a[z]$, y $\mathbf{N}_{I,FM}^a[z]$ es la parte estable, bipropia y de fase mínima de $\mathbf{N}_I^a[z]$. Entonces, la solución óptima del Problema 3.2 se obtiene escogiendo $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{opt}[z]$, donde

$$\mathbf{Q}^{opt}[z] \triangleq \arg \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}} J_S = \mathbf{N}_{D,FM}[z]^{-1} \left(\mathbf{R}_2[z] - \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_k}{c_k} \right) \mathbf{N}_{I,FM}^a[z]^{\dagger}, \quad (3.4.12)$$

donde $\mathbf{N}_{I,FM}^a[z]^{\dagger} \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}$ es una pseudo inversa izquierda de $\mathbf{N}_{I,FM}^a[z]$,

$$\mathbf{A}_k \triangleq \mathbf{M}_k \sum_{i=0}^r \sum_{j=i}^{\infty} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j c_k^{i-j}, \quad (3.4.13)$$

$\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son los coeficientes de la expansión en serie de potencias

$$\mathbf{X}_D[z] \mathbf{N}_{I,FM}^a[z] \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{B}_j z^{-j}, \quad (3.4.14)$$

$$\mathbf{E}_{I,d}[z] \triangleq \sum_{i=0}^r \mathbf{C}_i z^i, \quad (3.4.15)$$

$\mathbf{R}_2[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times m}$ está dado por

$$\mathbf{R}_2[z] \triangleq \mathbf{E}_{I,c}[z]^{-1} \sum_{i=0}^r \sum_{j=i}^{\infty} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j z^{i-j} - \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_k}{z - c_k}, \quad (3.4.16)$$

con $\mathbf{E}_{I,c}[z]$ definido como en (2.9.18), y

$$\mathbf{M}_k \triangleq \mathbf{L}_{k,1,k-1} \left\{ \frac{1 - c_k}{1 - \bar{c}_k} \left(1 - |c_k|^2 \right) \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^H \right\} \mathbf{L}_{k,k+1,n_c}, \quad (3.4.17)$$

donde

$$\mathbf{L}_{k,j,h} \triangleq \prod_{i=j}^h \left\{ \left(\frac{1 - c_i}{1 - \bar{c}_i} \cdot \frac{1 - c_k \bar{c}_i}{c_k - c_i} \right) \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_i^H + \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H \right\}. \quad (3.4.18)$$

En base a las definiciones anteriores, el valor óptimo J_S^{opt} está dado por

$$J_S^{opt} = \text{traza} \left\{ \mathbf{T}_1 + \sum_{l=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_k}{\bar{c}_l c_k (\bar{c}_l c_k - 1)} - \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_k^H}{c_k} \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}} [\bar{c}_k^{-1}]^{-1} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j \bar{c}_k^{j-i} \right\}, \quad (3.4.19)$$

donde

$$\mathbf{T}_1 \triangleq \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{l=0}^r \mathbf{B}_j^T \mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_l \mathbf{B}_{j-i+l}. \quad (3.4.20)$$

Demostración: Empleando los interactores unitarios $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [z]$ y $\mathbf{E}_{\mathbf{D}, \mathbf{dc}} [z]$ en la expresión (3.4.9), se obtiene

$$J_S^{opt} = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}} \left\| \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [z]^{-1} \mathbf{X}_{\mathbf{D}} [z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^{\mathbf{a}} [z] - \mathbf{N}_{\mathbf{D}, \mathbf{FM}} [z] \mathbf{Q} [z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^{\mathbf{a}} [z] \right\|_2^2. \quad (3.4.21)$$

Empleando la Observación 2.18 en la página 18 para construir el interactor unitario izquierdo $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [z]^{-1}$, y empleando la expansión en serie de potencias definida en (3.4.14), es posible expresar (3.4.9) como

$$\begin{aligned} J_S^{opt} &= \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}} \left\| \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}} [z]^{-1} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j z^{i-j} - \mathbf{N}_{\mathbf{D}, \mathbf{FM}} [z] \mathbf{Q} [z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^{\mathbf{a}} [z] \right\|_2^2 \\ &= \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}} \left\| \underbrace{\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}} [z]^{-1} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j z^{i-j}}_{\mathbf{H}[z]} + \underbrace{\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}} [z]^{-1} \sum_{i=0}^r \sum_{j=i}^{\infty} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j z^{i-j}}_{\mathbf{R}[z]} - \mathbf{N}_{\mathbf{D}, \mathbf{FM}} [z] \mathbf{Q} [z] \mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}}^{\mathbf{a}} [z] \right\|_2^2. \quad (3.4.22) \end{aligned}$$

El término $\mathbf{H} [z]$ contiene sólo términos impropios e inestables, por lo que $\mathbf{H} [z] \in \mathcal{RH}_2^{\perp n \times m}$. Por otra parte, la expresión definida como $\mathbf{R} [z]$ contiene elementos tanto estables como inestables, por lo tanto $\mathbf{R} [z] \in \mathcal{RL}_2^{n \times m}$. Para separar los términos estables de los inestables, se propone una expansión en fracciones parciales de $\mathbf{R} [z]$, lo que lleva a

$$\mathbf{R} [z] \triangleq \underbrace{\sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_k}{z - c_k}}_{\mathbf{R}_1 [z]} + \mathbf{R}_2 [z], \quad (3.4.23)$$

donde $\mathbf{R}_2[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$ y $\mathbf{A}_k = \lim_{z \rightarrow c_k} (z - c_k) \mathbf{R}[z]$, con³ $\mathbf{A}_k \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Dado que $|c_k| > 1$, $\forall k = 1, \dots, n_c$, se tiene entonces que $\mathbf{R}_1[z]$ contiene todos los términos inestables de $\mathbf{R}[z]$. Sustituyendo la expresión (3.4.23) en (3.4.22), se obtiene

$$J_S^{opt} = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \|\mathbf{H}[z] + \mathbf{R}_1[z] + \mathbf{R}_2[z] - \mathbf{N}_{\mathbf{D}, \mathbf{FM}}[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{IFM}}^{\mathbf{a}}[z]\|_2^2. \quad (3.4.24)$$

Dado que $(\mathbf{H}[z] + \mathbf{R}_1[z]) \in \mathcal{RH}_2^{1 \times n \times m}$ y $(\mathbf{R}_2[z] - \mathbf{N}_{\mathbf{D}, \mathbf{FM}}[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{IFM}}^{\mathbf{a}}[z]) \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$, es posible aplicar la propiedad de la norma 2 enunciada en (2.5.10) para reescribir el valor óptimo (3.4.24) como

$$J_S^{opt} = \|\mathbf{H}[z] + \mathbf{R}_1[z] - \mathbf{R}_1[0]\|_2^2 + \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \|\mathbf{R}_1[0] + \mathbf{R}_2[z] - \mathbf{N}_{\mathbf{D}, \mathbf{FM}}[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_{\mathbf{IFM}}^{\mathbf{a}}[z]\|_2^2. \quad (3.4.25)$$

Escogiendo $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{opt}[z]$ tal como se define en (3.4.12)⁴, es posible expresar el costo óptimo J_S^{opt} como

$$J_S^{opt} = \|\mathbf{H}[z] + \mathbf{R}_1[z] - \mathbf{R}_1[0]\|_2^2, \quad (3.4.26)$$

y aplicando la definición de norma 2 entregada en (2.9.2), se obtiene

$$J_S^{opt} = \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint (\mathbf{H}[z] + \mathbf{R}_1[z] - \mathbf{R}_1[0])^{\sim} (\mathbf{H}[z] + \mathbf{R}_1[z] - \mathbf{R}_1[0]) \frac{dz}{z} \right\}, \quad (3.4.27)$$

donde la integral se calcula sobre la curva $|z| = 1$, recorrida en sentido contrarreloj. A pesar del gran número de productos cruzados, se puede expresar $J_S^{opt} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, donde

$$\beta_1 = \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{H}[z]^{\sim} \mathbf{H}[z] \frac{dz}{z} \right\}, \quad (3.4.28)$$

$$\beta_2 = \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R}_1[0]^{\sim} \mathbf{H}[z] \frac{dz}{z} \right\}, \quad (3.4.29)$$

$$\beta_3 = \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R}_1[z]^{\sim} (\mathbf{R}_1[z] - \mathbf{R}_1[0]) \frac{dz}{z} \right\}. \quad (3.4.30)$$

Se puede demostrar mediante los resultados expresados en [59] que las integrales (3.4.28)-(3.4.30) resultan en

$$\beta_1 = \text{traza} \{ \mathbf{T}_1 \}, \quad (3.4.31)$$

$$\beta_2 = \text{traza} \left\{ - \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_k^H}{\bar{c}_k} \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}} [\bar{c}_k^{-1}]^{-1} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j \bar{c}_k^{j-i} \right\}, \quad (3.4.32)$$

$$\beta_3 = \text{traza} \left\{ \sum_{l=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_k}{\bar{c}_l c_k (\bar{c}_l c_k - 1)} \right\}, \quad (3.4.33)$$

lo que permite finalizar la demostración. ■

³La definición de \mathbf{A}_k entregada en esta parte de la demostración es consistente con la expresión entregada en (3.4.13).

⁴Se debe observar que $\mathbf{R}_1[0] = - \sum_{k=1}^{n_c} \mathbf{A}_k / c_k$.

Observación 3.2 (Sobre el cómputo de J_S^{opt} en el Teorema 3.3). *La demostración del Teorema 3.3 en la página 38 ha sido reducida a fin de favorecer su comprensión por sobre su cálculo extensivo. Para mayores detalles, se invita al lector a revisar el Apéndice A de esta tesis.*

El resultado del Teorema 3.3 permite observar en forma explícita la dependencia del costo óptimo J_S^{opt} con respecto a los rasgos dinámicos de la planta $\mathbf{G}_S[z]$, en particular de los ceros de fase no mínima finitos e infinitos del sistema. Así, la expresión J_S^{opt} puede ser entendida por partes. El primer término en (3.4.19) expresa la dependencia del costo óptimo en función del número de ceros de FNM en infinito, ponderados por matrices que reflejan la estructura del sistema $\mathbf{G}_S[z]$. El segundo término en (3.4.19) refleja la dependencia del costo óptimo en función de los ceros de FNM finitos del sistema. Finalmente, el tercer término en (3.4.19) incluye la interacción entre los ceros de FNM finitos e infinitos de la planta $\mathbf{G}_S[z]$. Tal como ocurre en sistemas altos, el costo óptimo de regulación no depende de los polos inestables de la planta, lo cual es consistente con limitaciones fundamentales [3].

3.5. Comparación de desempeño en sistemas altos y aumentados

El objetivo último del cálculo de expresiones cerradas para el desempeño óptimo alcanzable en el control de sistemas altos y aumentados, es la cuantificación de los beneficios que se obtienen al agregar nuevos canales de control a un sistema alto. Intuitivamente, se espera que el desempeño alcanzable en un sistema aumentado sea mejor que el desempeño de un sistema alto. En esta sección se formalizará este resultado intuitivo empleando los índices de desempeño definidos en este capítulo. Luego, se presentará un ejemplo simple que ilustra, cualitativamente, el efecto de agregar un nuevo canal de control. Estos resultados también se pueden aplicar en sentido inverso, i.e., cuando se desea evaluar el impacto en el desempeño de la supresión de canales de actuación.

3.5.1. Mejoras en el desempeño: resultado intuitivo

Tal como se ha descrito, la intuición indica que si la estructura de una planta alta es modificada mediante la adición de nuevos canales de control, entonces el desempeño de dicho sistema aumentado debiese ser mejor que el alcanzable con la planta alta original. A continuación se entrega un resultado que formaliza esta idea:

Teorema 3.4 (Mejoras en el desempeño de sistemas aumentados). *Considere la notación y los supuestos de los Teoremas 3.1 en la página 28 y 3.3 en la página 38. Si un sistema $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$ es aumentado a una planta $\mathbf{G}_S[z] = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A[z] \\ \mathbf{G}_N[z] \end{bmatrix} \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times n}$, entonces $J_S^{\text{opt}} \leq J_A^{\text{opt}}$.*

Demostración: Es directo demostrar la desigualdad si se observa que existe $\mathbf{Q}_S[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}$ tal que

$$\mathbf{Q}_S[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A^{\text{opt}}[z] \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.5.1)$$

con $\mathbf{Q}_A^{\text{opt}}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}$ definido según la expresión (3.3.10). En consecuencia, el valor óptimo J_S^{opt} es siempre menor o igual que el costo definido por J_A^{opt} . ■

3.5.2. Mejoras en el desempeño: un ejemplo simple

A modo de ilustrar los resultados presentados en este capítulo se presenta un ejemplo que permite comparar, cualitativamente, el desempeño alcanzable en plantas altas y aumentadas.

Ejemplo 3.1. *Considere un sistema de una entrada y dos salidas (SITO), cuya matriz de transferencia $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{2 \times 1}$ está dada por*

$$\mathbf{G}_A[z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{3(z-c)}{z^2(z-0.8)} \\ \frac{2(z-c)}{z^2(z-0.2)} \end{bmatrix}, \quad (3.5.2)$$

con $c \in \mathbb{R}$, tal que $|c| > 1$. El sistema presentado en (3.5.2) es estable y posee 3 ceros de FNM: 2 de ellos están en infinito ($n_z = 2$), mientras que el tercero está ubicado en $z = c$ ($n_c = 1$). Con el propósito de mejorar el desempeño del sistema, se analiza la posibilidad de agregar un nuevo canal de control, lo que lleva, por ejemplo, a que la estructura del sistema aumentado $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{2 \times 2}$ pueda ser descrita por

$$\mathbf{G}_S[z] \triangleq \begin{bmatrix} \vdots & \frac{z-0.3}{z^2} \\ \mathbf{G}_A[z] & \vdots \\ \vdots & \frac{2(z-0.3)}{z(z-0.2)} \end{bmatrix}. \quad (3.5.3)$$

El sistema aumentado $\mathbf{G}_S[z]$ tiene 4 ceros de FNM: 3 en infinito y 1 en $z = c$, además de 2 ceros de FM adicionales ubicados en $z = 0.3$ y $z = -0.4$. En consecuencia, el canal de control adicional sólo agrega 1 cero de FNM en infinito.

Se medirá el desempeño de los sistemas $\mathbf{G}_A[z]$ y $\mathbf{G}_S[z]$ cuando existe una perturbación de entrada definida como $\mathbf{d}_i[k] = \boldsymbol{\nu} \delta[k]$, con $\boldsymbol{\nu}$ un vector aleatorio de dimensiones apropiadas que satisface las Suposiciones 3.1 en la página 28 y 3.2 en la página 37 (según corresponda), y siendo $\delta[k]$ un Delta de Kronecker. Bajo las condiciones enunciadas, el desempeño óptimo para $\mathbf{G}_A[z]$ está dado por J_A^{opt} , donde

$$J_A^{opt} = \sum_{i=0}^1 \alpha_i^2 + (c^2 - 1) \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i c^{1-i} \right\}^2, \quad (3.5.4)$$

donde α_i se ha definido en el Teorema 3.2 en la página 32. En el caso de la planta $\mathbf{G}_S[z]$, el desempeño óptimo J_S^{opt} está dado por

$$J_S^{opt} = \frac{\mathbf{A}_1^H \mathbf{A}_1}{c^2(c^2 - 1)} + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{l=0}^2 \mathbf{B}_j^T \mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_l \mathbf{B}_{j-i+l}, \quad (3.5.5)$$

donde \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_j y \mathbf{C}_i se han definido en el Teorema 3.3 en la página 38. A modo de comparar el desempeño óptimo alcanzado en cada caso, se usa el índice

$$\Delta \triangleq \frac{J_A^{opt} - J_S^{opt}}{J_A^{opt}}, \quad (3.5.6)$$

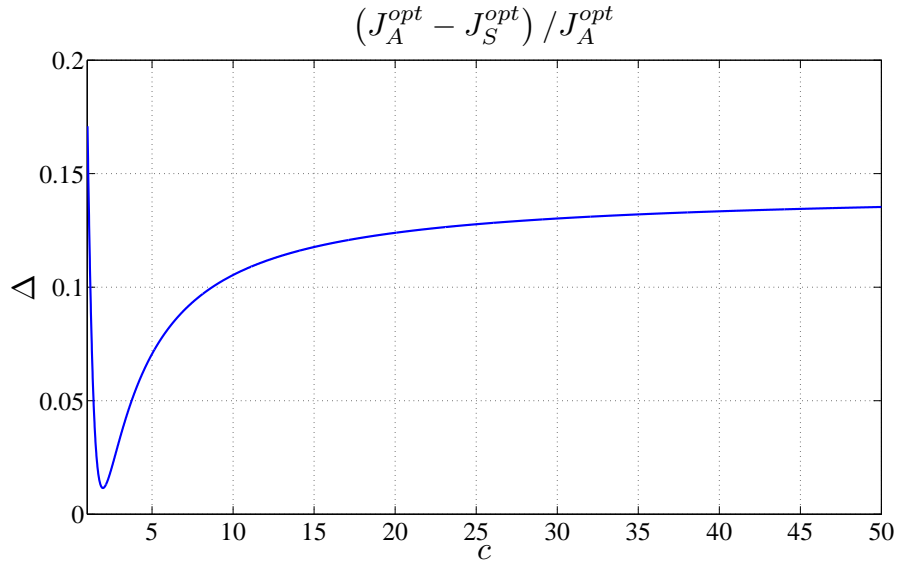


Figura 3.3. Evolución de Δ como función del cero de FNM ubicado en $z = c$.

el cual es analizado como función del cero de FNM ubicado en $z = c$. La Figura 3.3 presenta la evolución de Δ como función de $|c| > 1$. A partir de la figura es posible observar lo siguiente:

- Si bien el ejemplo considerado es sencillo, la evolución de Δ como función del cero de FNM c no es trivial. Tal como se aprecia en la Figura 3.3, la función Δ presenta un mínimo, ubicado en un punto intermedio de la curva y no en uno de sus extremos, tal como se pudiese pensar de manera intuitiva. Aún más, cuando $c \rightarrow \infty$, la mejora en el desempeño Δ tiende asintóticamente a un valor cercano a 0.13, lo cual es difícil de predecir en base a las estructuras de desempeño óptimo J_A^{opt} y J_S^{opt} estudiadas en este capítulo.
- Acorde al Teorema 3.4 en la página 41, la Figura 3.3 muestra que la función Δ es siempre mayor a 0. Esto implica que el desempeño óptimo alcanzable para el problema de regulación de una planta alta es siempre peor (o a lo sumo igual) que el desempeño óptimo alcanzable por una estructura aumentada para el mismo problema.

El ejemplo presentado en esta sección ha permitido observar que la cuantificación del desempeño óptimo a través del problema de regulación puede ser compleja, aún para casos sencillos, como es el caso de esta sección. La razón de esta complejidad se debe a que la relación entre los ceros de FNM está dada por funciones que dependen de la estructura de la planta. Sin embargo, la diferencia $J_A^{opt} - J_S^{opt}$ cumple con el requisito intuitivo definido en el Teorema 3.4 en la página 41, por lo que constituye una manera de cuantificar los beneficios de agregar nuevos canales de control a un sistema alto.

3.6. Resumen

El presente capítulo ha abordado el problema de regulación en sistemas multivariables de tiempo discreto. Se ha introducido un índice de desempeño basado en la suma cuadrática del error de seguimiento, ante una perturbación tipo Delta de Kronecker. En base al índice de desempeño previamente definido, se ha estudiado el problema de regulación para dos clases de sistemas: plantas altas y cuadradas, donde la estructura de estas últimas es la resultante de incluir nuevos canales de control en una planta alta. En el caso de sistemas aumentados, el problema fue formulado de manera de que se pondere en forma justa el efecto de incluir estos nuevos canales de control. En ambos casos, se han presentado formas cerradas para el desempeño óptimo alcanzable, en donde se aprecia de manera explícita el impacto de los ceros de FNM finitos e infinitos sobre el costo óptimo. Los resultados obtenidos reflejan que el costo óptimo es independiente de los polos inestables de la planta, lo que es consistente con limitaciones fundamentales [3].

Considerando las expresiones cerradas obtenidas, se exploran, en forma cuantitativa, los beneficios de agregar nuevos canales de control a fin de mejorar el desempeño del sistema en lazo cerrado. Se ha formalizado un resultado intuitivo, el cual demuestra que el desempeño óptimo alcanzable en sistemas aumentados es siempre mejor que el desempeño óptimo en sistemas altos. Con el propósito de ilustrar los resultados presentados en este capítulo se presentó un ejemplo sencillo, el cual cuantifica los beneficios de agregar un nuevo canal de control a una planta SITO. Los resultados obtenidos permiten apreciar que la cuantificación de los beneficios resulta compleja, aún para sistemas sencillos.

LÍMITES DE DESEMPEÑO EN SISTEMAS AUMENTADOS: PROBLEMA DE SEGUIMIENTO

4.1. Introducción

En el Capítulo 3 se abordó un problema de regulación para sistemas aumentados, ofreciendo una cuantificación de los beneficios de agregar nuevos canales de control a una planta alta. Si bien los resultados concuerdan con lo esperado, éstos no consideran casos en que existan referencias. El problema de seguimiento óptimo ha sido objeto de estudio durante la última década. Así, es posible encontrar artículos¹ que abordan el problema de seguimiento en sistemas tanto escalares [7], [59] como multivariados [4], [6], [15]. En particular, [4] presenta resultados para el desempeño óptimo alcanzable por sistemas invertibles por la derecha, sujetos a referencias tipo escalón, sinusoidales y rampa. Los resultados reportados en ese artículo reflejan la dependencia del costo óptimo con respecto a los rasgos dinámicos de la planta, i.e., con respecto a los ceros de FNM y polos inestables. Sin embargo, la restricción impuesta sobre la estructura de la planta impide que dichos resultados puedan ser adaptados al caso de sistemas altos.

Un acercamiento al problema de seguimiento en plantas altas es propuesto en [15]. En dicho trabajo, se entrega una forma cerrada para el desempeño óptimo alcanzable en sistemas de una entrada y múltiples salidas (SIMO) de tiempo continuo, cuando son sometidos al control en lazo cerrado en presencia de una referencia tipo escalón. Los resultados obtenidos reflejan, como es de esperarse, la dependencia del costo óptimo con respecto a los rasgos dinámicos de la planta. Similares resultados son reportados en [17], donde se estudia el caso de sistemas de tiempo discreto, además de incluir una penalización sobre el esfuerzo de control. Sin embargo, el rango de validez de estos resultados se restringe a direcciones de la referencia que pertenecen al espacio barrido por la ganancia a continua de la planta. Este supuesto impone limitaciones si se desean efectuar comparaciones de desempeño entre sistemas altos y aumentados.

¹Para una mayor profundización en el estado del arte sobre desempeño óptimo en seguimiento, se invita al lector a revisar el Capítulo 1

Lo anterior motiva la definición de un índice de desempeño que permita medir la calidad del seguimiento de referencias, bajo supuestos válidos tanto para sistemas altos como aumentados, y que permita comparar, de manera justa, los beneficios obtenidos de agregar nuevos canales de control.

Uno de los funcionales de costo propuestos para resolver la convergencia del índice de desempeño, cuando se considera una referencia tipo escalón con referencia arbitraria, es propuesto en [60]. En dicho trabajo, donde se garantiza la convergencia del índice de desempeño para sistemas altos mediante la ponderación del error de seguimiento por un factor λ^k , donde $k \in \mathbb{N}_0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $|\lambda| < 1$. Si bien los resultados en [60] son interesantes, la formulación no garantiza la estabilidad del lazo resultante, salvo en casos particulares.

Otro método propuesto en la literatura para garantizar la convergencia del índice de desempeño en sistemas altos es propuesto en [61]. En ese caso, se analiza el desempeño óptimo alcanzable por un sistema alto cuando es controlado en lazo cerrado, sujeto a la presencia de una referencia tipo escalón. El índice de desempeño propuesto considera la medición de las desviaciones de la respuesta del sistema con respecto a su valor óptimo en estado estacionario. El costo óptimo obtenido para el desempeño queda expresado en función de los rasgos dinámicos de la planta y de su estructura. A pesar de que el índice de desempeño propuesto permite garantizar la convergencia del funcional de costo, su definición ignora el valor en estado estacionario del error de seguimiento, midiéndose sólo las desviaciones con respecto a dicho valor.

El presente capítulo introduce un índice de desempeño que permite medir la calidad del seguimiento de referencias, y es válido tanto para sistemas altos como aumentados, pues su convergencia está garantizada independientemente de la estructura de la planta. Adicionalmente, permite cuantificar, de manera justa, los beneficios de agregar nuevos canales de control a un lazo cerrado, posibilitando así una comparación entre el desempeño alcanzable por sistemas altos y aumentados. La organización de este capítulo se presenta a continuación. La Sección 4.2 introduce el problema de desempeño en sistemas de control ante la presencia de señales de referencia; la Sección 4.3 presenta el problema de desempeño en el seguimiento de referencia para sistemas altos; la Sección 4.4 trata el problema de desempeño en el seguimiento de referencia para sistemas aumentados; la Sección 4.5 presenta resultados obtenidos en el marco de desempeño óptimo de sistemas aumentados, cuando los canales adicionales poseen limitaciones en su ancho de banda; la Sección 4.6 introduce una comparación entre los desempeños anteriormente calculados; finalmente, la Sección 4.7 presenta un resumen de los contenidos tratados en el presente capítulo.

4.2. Índice de desempeño para el problema de seguimiento

Al igual que en el Capítulo 3, consideraremos el funcional de costo

$$J \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}[k]^T \mathbf{e}[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \{ \mathbf{E}[e^{j\omega}] \mathbf{E}[e^{j\omega}] \} \frac{dz}{z} = \|\mathbf{E}[z]\|_2^2, \quad (4.2.1)$$

donde $\mathbf{e}[k]$ denota al error de seguimiento, y $\mathbf{E}[z]$ corresponde a su transformada \mathcal{Z} . A diferencia de la situación considerada en el Capítulo 3, aquí consideraremos problemas de seguimiento en que la referencia es decreciente en el tiempo.

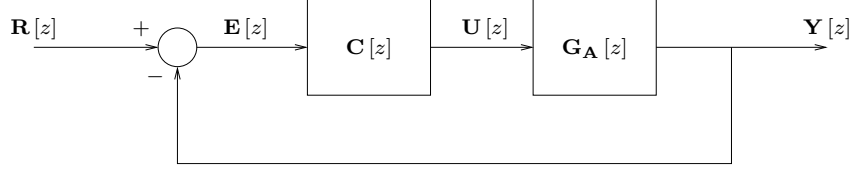


Figura 4.1. Lazo cerrado de control considerado para el problema de seguimiento en sistemas altos.

4.3. Problema de seguimiento en sistemas altos

En esta sección se construyen expresiones para el desempeño óptimo en el seguimiento de referencias decrecientes para sistemas altos. A continuación, se presentará la formulación del problema, para luego entregar una forma cerrada para el valor óptimo del problema propuesto.

4.3.1. Formulación del problema

Considere el sistema LTI de tiempo discreto presentado en la Figura 4.1, donde $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$, $n \geq m$, corresponde a la descripción en matriz de transferencia del sistema y $\mathbf{C}[z] \in \mathcal{RH}_2^{m \times n}$ corresponde al controlador en lazo cerrado. Se definen $\mathbf{r}[k] \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}[k] \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}[k] \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u}[k] \in \mathbb{R}^m$ como las señales de referencia, error de seguimiento, respuesta y control, respectivamente.

El problema a analizar en esta sección corresponde a minimizar el funcional J definido en (4.2.1), en ausencia de perturbaciones y cuando la referencia es definida como $\mathbf{r}[k] \triangleq \boldsymbol{\nu} \lambda^k$, $\forall k \geq 0$, con $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $|\lambda| < 1$. La referencia definida es decreciente en el tiempo, lo cual garantiza inmediatamente la convergencia del funcional (4.2.1) cuando el lazo cerrado es internamente estable.

Empleando las funciones de sensibilidad definidas en el Capítulo 2, es posible escribir J como

$$J = \|\mathbf{S}_0[z] \mathbf{R}[z]\|_2^2 = \left\| (\mathbf{I}_n + \mathbf{G}_A[z] \mathbf{C}[z])^{-1} \mathbf{R}[z] \right\|_2^2, \quad (4.3.1)$$

donde $\mathbf{R}[z]$ corresponde a la transformada \mathcal{Z} de la referencia $\mathbf{r}[k]$, i.e.

$$\mathbf{R}[z] \triangleq \frac{z}{z - \lambda} \boldsymbol{\nu}. \quad (4.3.2)$$

La expresión (4.3.1) es no lineal en el parámetro de diseño $\mathbf{C}[z]$. Ahora bien, bajo la suposición de que la planta $\mathbf{G}_A[z]$ es estable, se puede emplear la parametrización definida en la Sección 2.10.3, para reescribir el funcional como

$$J = \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A[z] \mathbf{Q}[z]) \mathbf{R}[z] \right\|_2^2, \quad (4.3.3)$$

donde $\mathbf{Q}[z]$ es un parámetro de diseño en $\mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$.

Con el propósito de simplificar el análisis, se presenta a continuación una suposición sobre la dirección de referencia $\boldsymbol{\nu}$.

Suposición 4.1 (Naturaleza de la dirección de referencia $\boldsymbol{\nu}$). *La dirección de referencia $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria que satisface*

$$\mathcal{E} \{ \boldsymbol{\nu} \} = \mathbf{0}, \quad (4.3.4)$$

$$\mathcal{E} \{ \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T \} = \mathbf{I}_n. \quad (4.3.5)$$

El Supuesto 4.1 permitirá independizar el resultado de la dirección de referencia $\boldsymbol{\nu}$, dado que efectúa un promedio sobre todas las direcciones posibles. Al tomar la esperanza de (4.3.3) y considerando la Suposición 4.1 se obtiene

$$J_A \triangleq \mathcal{E} \{ J \} = \left\| \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q} [z] \right) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2, \quad (4.3.6)$$

donde se ha empleado la definición de la referencia dada en (4.3.2), considerando adicionalmente que z es un término unitario.

El foco de estudio de esta sección será hallar el ínfimo de la expresión (4.3.6), restringiendo el análisis al conjunto de controladores que estabilizan internamente el lazo cerrado. En términos analíticos, la afirmación anterior es equivalente a resolver el problema siguiente:

Problema 4.1 (Seguimiento en sistemas altos). *Obtenga*

$$J_A^{opt} \triangleq \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} J_A = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} \left\| \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q} [z] \right) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 \quad (4.3.7)$$

y, si el ínfimo es alcanzable, entonces calcule un parámetro $\mathbf{Q} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$ que lo alcance.

El Problema 4.1 constituye el punto de partida para los resultados presentados en la siguiente sección.

4.3.2. Desempeño óptimo de seguimiento en sistemas altos

En esta sección se presenta la solución óptima para el Problema 4.1.

Teorema 4.1. (Desempeño óptimo de seguimiento en sistemas altos). *Considérese el Problema 4.1, una planta $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$, sin ceros en $|z| = 1$ y con descripción inner-outer $\mathbf{G}_A [z] \triangleq \mathbf{G}_{A_i} [z] \mathbf{G}_{A_o} [z]$. Bajo los supuestos anteriores, el valor óptimo J_A^{opt} se obtiene escogiendo $\mathbf{Q} [z] = \mathbf{Q}^{opt} [z]$, donde*

$$\mathbf{Q}^{opt} [z] \triangleq \arg \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} J_A = \mathbf{G}_{A_o} [z]^{-1} \mathbf{G}_{A_i} [\lambda^{-1}]^T, \quad (4.3.8)$$

y el costo óptimo está dado por

$$J_A^{opt} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \mathbf{G}_{A_i} [\lambda^{-1}]^T \mathbf{G}_{A_i} [\lambda^{-1}] \right\} \right). \quad (4.3.9)$$

Demostración: Premultiplicando la expresión (4.3.7) por el factor unitario

$$\boldsymbol{\Lambda} [z] = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{A_i} [z]^\sim \\ \mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{A_i} [z] \mathbf{G}_{A_i} [z]^\sim \end{bmatrix}, \quad (4.3.10)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} \left\| \mathbf{A}[z] (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A[z] \mathbf{Q}[z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 &= \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{A_i}[z] \mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \\ &+ \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} \left\| (\mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{A_o}[z] \mathbf{Q}[z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Definiendo

$$\alpha \triangleq \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{A_i}[z] \mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2, \quad (4.3.12)$$

y notando que

$$(\mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}) \frac{1}{z-\lambda} \in \mathcal{RH}_2^{m \times n}, \quad (4.3.13)$$

$$(\mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim|_{z=\lambda} - \mathbf{G}_{A_o}[z] \mathbf{Q}[z]) \frac{1}{z-\lambda} \in \mathcal{RH}_2^{m \times n}, \quad (4.3.14)$$

es posible reescribir (4.3.11) como

$$\begin{aligned} J_A^{opt} &= \alpha + \left\| (\mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \\ &+ \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} \left\| (\mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim|_{z=\lambda} - \mathbf{G}_{A_o}[z] \mathbf{Q}[z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Observando que el tercer término al lado derecho de la igualdad en (4.3.15) puede anularse escogiendo $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{opt}[z]$, se tiene que el costo óptimo J_A^{opt} puede expresarse como

$$J_A^{opt} = \alpha + \left\| (\mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2, \quad (4.3.16)$$

aplicando la definición de norma 2 dada en (2.9.2) al cálculo del término α , se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \left[(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{A_i}[z] \mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim) \frac{1}{z-\lambda} \right]^\sim \left[(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{A_i}[z] \mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim) \frac{1}{z-\lambda} \right] \right\} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \frac{\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{A_i}[z] \mathbf{G}_{A_i}[z]^\sim}{(1-z\lambda)(z-\lambda)} \right\} dz \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \frac{\mathbf{I}_n}{(1-z\lambda)(z-\lambda)} \right\} dz - \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \frac{\mathbf{I}_m}{(1-z\lambda)(z-\lambda)} \right\} dz \quad (4.3.18)$$

$$= \frac{n-m}{1-\lambda^2}. \quad (4.3.19)$$

Las integrales presentadas anteriormente se efectúan sobre la curva $|z| = 1$, recorrida en sentido contrarrelój. En (4.3.17) se ha efectuado la expansión del producto dado en la primera línea, empleando que el factor inner $\mathbf{G}_{A_i}[z]$ es unitario. La expresión (4.3.18) es obtenida utilizando las propiedades de linealidad y conmutatividad del argumento de la

traza², además del que $\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]$ es unitario. Finalmente, la expresión (4.3.19) es obtenida mediante el cálculo de los residuos³ de la integral (4.3.18).

Procediendo de manera similar, se tiene que el segundo término en el lado derecho de la igualdad (4.3.16) puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 = \\ & \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \left[(\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}) \frac{1}{z-\lambda} \right]^\sim \right. \\ & \quad \left. \times \left[(\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}) \frac{1}{z-\lambda} \right] \right\} \frac{dz}{z}, \quad (4.3.20) \end{aligned}$$

y, reordenando, se obtiene

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 = \\ & \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \frac{\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z] (\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda})}{(1-z\lambda)(z-\lambda)} \right\} dz \\ & + \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \underbrace{\frac{(\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda})^\sim (\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda} - \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim)}{(1-z\lambda)(z-\lambda)}}_{\mathbf{M}[z]} \right\} dz. \quad (4.3.21) \end{aligned}$$

El término $\mathbf{M}[z]$ no posee elementos estables, pues se cancela el polo en $z = \lambda$. En consecuencia $\mathbf{M}[z] \in \mathcal{RH}_2^{\frac{1}{2}m \times n}$ y, por lo tanto, su contribución a la expresión (4.3.21) es cero. De esta manera, el cálculo se reduce a

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 = \\ & \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \frac{\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z] (\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda})}{(1-z\lambda)(z-\lambda)} \right\} dz. \quad (4.3.22) \end{aligned}$$

Empleando las propiedades de la traza y del factor inner $\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]$ en la expresión (4.3.22), se logra

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \frac{I_m}{(1-z\lambda)(z-\lambda)} \right\} dz \\ & \quad - \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \underbrace{\frac{\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z] \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}}{(1-z\lambda)(z-\lambda)}}_{\mathbf{N}[z]} \right\} dz. \quad (4.3.23) \end{aligned}$$

²Ver, e.g., [25], [62].

³Ver, e.g., [43].

El término $\mathbf{N}[z]$ tiene grado relativo a lo menos 2 y un único polo inestable en $z = \lambda^{-1}$. Lo anterior permite aplicar el Lema A.1 en la página 91 en el Apéndice A, y concluir que

$$\left\| (\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim - \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 = \frac{m}{1-\lambda^2} + \operatorname{Res}_{z=\lambda^{-1}} \left\{ \operatorname{traza} \left\{ \frac{\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z] \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}}{(1-z\lambda)(z-\lambda)} \right\} \right\}, \quad (4.3.24)$$

donde el residuo en $z = \lambda^{-1}$ puede calcularse como

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\lambda^{-1}} \left\{ \operatorname{traza} \left\{ \frac{\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z] \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}}{(1-z\lambda)(z-\lambda)} \right\} \right\} &= \lim_{z \rightarrow \lambda^{-1}} (z - \lambda^{-1}) \operatorname{traza} \left\{ \frac{\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z] \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]^\sim|_{z=\lambda}}{(1-z\lambda)(z-\lambda)} \right\} \\ &= - \frac{\operatorname{traza} \left\{ \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[\lambda^{-1}]^T \right\}}{1-\lambda^2}, \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

en donde se ha considerado que $\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]$ es una función real racional.

Empleando los resultados presentados para α y los expuestos en (4.3.24) y (4.3.25), se obtiene

$$\begin{aligned} J_A^{opt} &= \frac{n-m}{1-\lambda^2} + \frac{m - \operatorname{traza} \left\{ \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[\lambda^{-1}]^T \right\}}{1-\lambda^2} \\ &= \frac{1}{1-\lambda^2} \left(n - \operatorname{traza} \left\{ \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[\lambda^{-1}]^T \right\} \right), \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

lo que permite concluir la demostración. \blacksquare

Observación 4.1. Note que J_A^{opt} puede ser reescrito como

$$J_A^{opt} = \frac{1}{1-\lambda^2} \left(n - \|\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[\lambda^{-1}]\|_F^2 \right), \quad (4.3.27)$$

donde $\|\cdot\|_F$ denota la norma Fröbenius.

La expresión cerrada para J_A^{opt} en (4.3.9) caracteriza el mejor desempeño alcanzable por una planta alta, cuando la referencia es definida como una señal decreciente en el tiempo. Se puede observar que el costo óptimo depende del número de canales de salida de la planta, como así también del factor inner de la misma. Dado que el factor inner contiene todos los ceros de FNM de la planta, el costo óptimo depende en forma implícita de los rasgos dinámicos del sistema. Un aspecto relevante del valor óptimo J_A^{opt} definido en (4.3.9) es que no es una función acotada para $\lambda = 1$. Esto concuerda con lo esperado: $\lambda = 1$ equivale a la consideración de una referencia tipo escalón, señal que una planta alta no puede seguir de manera perfecta en estado estacionario, salvo para casos particulares. En consecuencia, el funcional definido en (4.2.1) no posee un valor acotado, corroborándose lo obtenido.

A continuación se presenta un teorema que entrega algunos resultados relativos al comportamiento de J_A^{opt} en función del parámetro λ .

Teorema 4.2 (Comportamiento de J_A^{opt} como función de λ). Considere la notación y los supuestos del Teorema 4.1 en la página 48. Entonces:

1. J_A^{opt} es una función creciente y convexa de λ , (para $\lambda \in [0, 1[$).

2.

$$J_A^{opt} \geq \frac{n-m}{1-\lambda^2}, \quad (4.3.28)$$

donde n es el número de salidas y m es el número de canales de control de la planta $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$, y $\lambda \in [0, 1[$.

Demostración: Usaremos el Teorema del módulo máximo, enunciado en el Teorema 2.2 en la página 14. Note, por definición, que $J_A^{opt} \geq 0$. Por lo tanto si se define $f(\lambda) \triangleq J_A^{opt}$, se tendrá que $f(\lambda)$ es una función real continua siempre mayor o igual a 0, $\forall \lambda \in [0, 1[$. Generalizando, se podría decir que $f(\lambda)$ es una función restringida a la recta real positiva, con módulo igual a la misma función, i.e., $|f(\lambda)| = f(\lambda)$, $\forall \lambda \in [0, 1[$. Adicionalmente, se tiene que $f(z)$ es analítica y no constante en la región $|z| < 1$, con $z \in \mathbb{C}$. En consecuencia, se puede establecer que $f(\lambda)$ satisface las condiciones del Teorema del módulo máximo y, por lo tanto, $|f(z)|$ siempre alcanza su máximo en el borde de cada región $|z| < 1 - \varepsilon$, con $z \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon \in]0, 1[$. Esto permite demostrar que $f(\lambda)$ es un función monótonamente creciente $\forall \lambda \in [0, 1[$.

Para demostrar la convexidad de J_A^{opt} se debe observar que, dado que $f(\lambda)$ es una función real $\forall \lambda \in [0, 1[$, entonces

$$f(\lambda)' = \frac{df(\lambda)}{d\lambda}, \quad (4.3.29)$$

debe ser una función real $\forall \lambda \in [0, 1[$. Es más, se satisface que $f(\lambda)' > 0$, debido a que $f(\lambda)$ es una función monótonamente creciente. Al calcular $f(\lambda)'$ se obtiene

$$f(\lambda)' = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2} f(\lambda) - \frac{2}{1-\lambda^2} \text{traza} \left\{ \mathbf{G}_{A_i} [\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{A_i} [\lambda^{-1}]^T \right\}, \quad (4.3.30)$$

la cual es una función analítica $\forall \lambda \in [0, 1[$. En consecuencia, $f(\lambda)'$ posee las mismas características enunciadas para $f(\lambda)$ y, por lo tanto, satisface los supuestos del Teorema del módulo máximo [43], permitiendo concluir así que $|f(z)|$ siempre alcanza su máximo en el borde de cada región $|z| < 1 - \varepsilon$, con $z \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon \in]0, 1[$. Esto último conduce a que $f(\lambda)'$ es un función monótonamente creciente $\forall \lambda \in [0, 1[$. Dado que $f(\lambda)'$ es una función monótonamente creciente, entonces se implica que $f(\lambda)$ es una función convexa, $\forall \lambda \in [0, 1[$. Esto permite finalizar la demostración del primer punto del Teorema.

Para la demostración del segundo punto del Teorema es necesario notar que la función

$$g(z) \triangleq \text{traza} \left\{ \mathbf{G}_{A_i} [z^{-1}] \mathbf{G}_{A_i} [z^{-1}]^T \right\}, \quad (4.3.31)$$

es continua, analítica y no constante en la región $|z| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}$, por lo que satisface igualmente el Teorema del módulo máximo. Además, se cumple que $g(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \in [0, 1[$. En consecuencia, $|g(\lambda)| = g(\lambda)$ en dicho intervalo y, dado que $g(z)$ satisface el Teorema del módulo máximo, se tiene que

$$g(\lambda) \leq g(1) = m, \quad \forall \lambda \in [0, 1[. \quad (4.3.32)$$

Empleando la desigualdad expresada en (4.3.32) en el costo óptimo J_A^{opt} , se obtiene inmediatamente la desigualdad enunciada en (4.3.28), finalizando así la demostración. ■

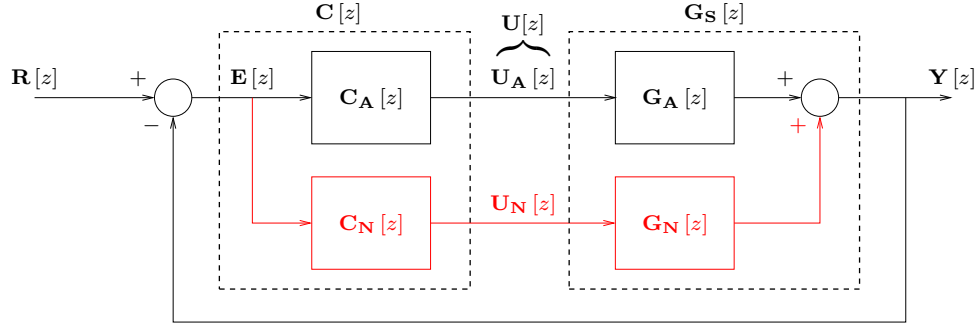


Figura 4.2. Lazo cerrado de control considerado para el problema de seguimiento en sistemas aumentados.

El resultado presentado en el Teorema 4.2 permite comprender la naturaleza del costo óptimo J_A^{opt} como función del parámetro de referencia λ . Esto complementa el resultado presentado en el Teorema 4.1 en la página 48.

El desempeño óptimo obtenido en esta sección para sistemas altos será comparado con el desempeño óptimo de un sistema aumentado, el cual es obtenido mediante la adición de nuevos canales de control a la planta alta. En la siguiente sección se introduce una expresión cerrada para el desempeño óptimo en dichos sistemas.

4.4. Problema de seguimiento en sistemas aumentados

Esta sección abordará el problema de desempeño en sistemas aumentados, cuando la referencia es una señal decreciente en el tiempo. Tal como se explicará posteriormente, los sistemas aumentados considerados en esta sección resultan de la adición de nuevos canales de control a una planta alta, cuyo desempeño óptimo ya ha sido calculado en la sección anterior. Se procederá a explicar la configuración del problema, para luego dar paso a los resultados óptimos obtenidos.

4.4.1. Formulación del problema

Considere el lazo cerrado de control LTI de tiempo discreto presentado en la Figura 4.2. En dicho esquema, $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$, $n > m$, corresponde a la planta alta estudiada en el problema anterior, y $\mathbf{C}_A[z] \in \mathcal{R}^{m \times n}$ su respectivo controlador en lazo cerrado. Con el propósito de mejorar el desempeño del sistema, se agregan $n - m$ nuevos canales de control, los cuales se relacionan con la salida del sistema a través de una nueva matriz de transferencia $\mathbf{G}_N[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times (n-m)}$. Dado que se disponen de $n - m$ nuevos canales, se requerirá de un controlador que las manipule, el cual es denotado por $\mathbf{C}_N[z] \in \mathcal{R}^{(n-m) \times n}$. Así, el nuevo lazo cerrado puede ser expresado en términos del sistema aumentado $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$, donde

$$\mathbf{G}_S[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A[z] \\ \mathbf{G}_N[z] \end{bmatrix}. \quad (4.4.1)$$

Usaremos $\mathbf{y}[k] \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}[k] \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r}[k] \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u}[k] \in \mathbb{R}^n$ para denotar a la respuesta del sistema, al error de seguimiento, a la referencia y a la señal de control, respectivamente. En

particular, la señal de control $\mathbf{u}[k]$ puede ser particionada como

$$\mathbf{u}[k] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A[k] \\ \mathbf{u}_N[k] \end{bmatrix}, \quad (4.4.2)$$

donde $\mathbf{u}_A[k] \in \mathbb{R}^m$ corresponde a las señales de control asociadas a $\mathbf{G}_A[z]$, en tanto que $\mathbf{u}_N[k] \in \mathbb{R}^{(n-m)}$ corresponde al conjunto de señales de control asociadas a $\mathbf{G}_N[z]$. El problema a ser estudiado considera el funcional definido en (4.2.1), en ausencia de perturbaciones y cuando la referencia se define como $\mathbf{r}[k] \triangleq \boldsymbol{\nu} \lambda^k$, $\forall k \geq 0$, con $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $|\lambda| < 1$. Esta elección para la referencia permitirá cuantificar de manera justa los beneficios de agregar los nuevos $n - m$ canales de control al lazo cerrado, cuando se compara con la situación estudiada en la sección anterior.

Tal como se presentó en la sección anterior, el funcional (4.2.1) puede reescribirse en términos de las funciones de sensibilidad definidas en el Capítulo 2 como

$$J = \|\mathbf{S}_0[z] \mathbf{R}[z]\|_2^2 = \left\| (\mathbf{I}_n + \mathbf{G}_S[z] \mathbf{C}[z])^{-1} \mathbf{R}[z] \right\|_2^2, \quad (4.4.3)$$

donde $\mathbf{R}[z]$ corresponde a la transformada \mathcal{Z} de la referencia, i.e.,

$$\mathbf{R}[z] \triangleq \frac{z}{z - \lambda} \boldsymbol{\nu}. \quad (4.4.4)$$

El funcional (4.4.3) es no lineal en el parámetro de diseño $\mathbf{C}[z]$. Por lo tanto, se emplea la parametrización de sistemas estables entregada en la Sección 2.10.3 para reescribir J como

$$J = \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_S[z] \mathbf{Q}[z]) \mathbf{R}[z] \right\|_2^2, \quad (4.4.5)$$

el cual es convexo en el parámetro de diseño $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$.

Con el objeto de mantener la simetría de este problema con respecto a la formulación efectuada para sistemas altos, se impone que la dirección de referencia $\boldsymbol{\nu}$ satisfaga la Suposición 4.1 en la página 48. En consecuencia, aplicando el operador esperanza en (4.4.5), se obtiene

$$J_S \triangleq \mathcal{E}\{J\} = \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_S[z] \mathbf{Q}[z]) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2. \quad (4.4.6)$$

El objeto de estudio de esta sección es hallar el ínfimo de (4.4.6), cuando $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$. Lo anterior es equivalente a resolver el siguiente problema:

Problema 4.2 (Seguimiento en sistemas aumentados). *Obtenga*

$$J_S^{opt} \triangleq \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} J_S = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_S[z] \mathbf{Q}[z]) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2, \quad (4.4.7)$$

y, si el ínfimo es alcanzable, entonces calcule un parámetro $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ que lo alcance.

El Problema 4.2 es resuelto en la siguiente sección.

4.4.2. Desempeño óptimo de seguimiento en sistemas aumentados

Se presenta a continuación un resultado que caracteriza a J_S^{opt} :

Corolario 4.1. (Desempeño óptimo de seguimiento en sistemas aumentados). *Considérese el Problema 4.2, una planta $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$, sin ceros en $|z| = 1$. Defina $\mathbf{G}_S[z] \triangleq \mathbf{E}_{I,dc}[z] \mathbf{G}_{S,FM}[z]$, donde $\mathbf{E}_{I,dc}[z] \in \mathcal{R}^{n \times n}$ es el interactor unitario izquierdo de ceros de FNM de $\mathbf{G}_S[z]$, y $\mathbf{G}_{S,FM}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ es la parte estable, bipropia y de fase mínima de $\mathbf{G}_S[z]$. Bajo los supuestos anteriores, la solución óptima del Problema 4.2 se obtiene escogiendo $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{opt}[z]$, donde*

$$\mathbf{Q}^{opt}[z] \triangleq \arg \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} J_S = \mathbf{G}_{S,FM}[z]^{-1} \mathbf{E}_{I,dc}[\lambda^{-1}]^T, \quad (4.4.8)$$

y el costo óptimo es

$$J_S^{opt} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{I,dc}[\lambda^{-1}]^T \mathbf{E}_{I,dc}[\lambda^{-1}] \right\} \right). \quad (4.4.9)$$

Demostración: Directa de la demostración del Teorema 4.1 en la página 48, reemplazando $\mathbf{E}_{I,dc}[z]$ por $\mathbf{G}_{Ai}[z]$ y $\mathbf{G}_{Ao}[z]$ por $\mathbf{G}_{S,FM}[z]$ donde sea necesario. ■

Observación 4.2. *El costo óptimo J_S^{opt} puede escribirse como*

$$J_S^{opt} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(n - \|\mathbf{E}_{I,dc}[\lambda^{-1}]\|_F^2 \right), \quad (4.4.10)$$

donde $\|\cdot\|_F$ denota la norma Fröbenius.

El Corolario 4.1 permite apreciar que el costo óptimo J_S^{opt} depende de los rasgos dinámicos del sistema. En efecto, la expresión (4.4.9) indica que el costo óptimo depende de los ceros de FNM de $\mathbf{G}_S[z]$, contenidos en $\mathbf{E}_{I,dc}[z]$, además del parámetro de referencia λ y del número de canales de salida n . Se debe enfatizar que el costo óptimo J_S^{opt} es acotado para $\lambda = 1$ pues, a diferencia de los sistemas altos, se puede lograr error estacionario cero en todas las salidas del sistema (recuerde que se supone $\mathbf{G}_S[z]$ sin ceros en $|z| = 1$). A continuación, se presenta un teorema que analiza el valor de J_S^{opt} cuando $\lambda = 1$.

Teorema 4.3 (Valor de J_S^{opt} cuando $\lambda = 1$). *Considere la notación y supuestos del Corolario 4.1. Suponga que $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$ posee n_c ceros de FNM finitos ubicados en $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n_c$ y n_z ceros de FNM en infinito. Considere además la estructura de $\mathbf{E}_{I,dc}[z] \in \mathcal{R}^{n \times n}$ entregada en la Observación 2.18 en la página 18. Entonces,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} J_S^{opt} = n_z + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{|c_i|^2 - 1}{|c_i - 1|^2}. \quad (4.4.11)$$

Demostración: Desarrollando el límite presentado en (4.4.11) se obtiene

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} J_S^{opt} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{I,dc}[\lambda^{-1}] \mathbf{E}_{I,dc}[\lambda^{-1}]^T \right\} \right). \quad (4.4.12)$$

Observe que tanto el numerador como el denominador del lado derecho de (4.4.12) se anulan para $\lambda = 1$. En consecuencia, es posible aplicar el Teorema de L'Hôpital⁴ para calcular el límite como

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} J_S^{opt} = \frac{\text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}]' \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}]^T \right\} + \text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}] \left(\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}]' \right)^T \right\}}{2\lambda}, \quad (4.4.13)$$

donde $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}]'$ denota la derivada de $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}]$ con respecto a λ . Considerando la estructura del interacto unitario izquierdo definida en la Observación 2.18 en la página 18, es posible establecer que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}] \triangleq \prod_{i=1}^{n_c} \mathbf{L}_{\mathbf{c}, i} [\lambda^{-1}] \prod_{j=1}^{n_z} \mathbf{L}_{\mathbf{d}, j} [\lambda^{-1}], \quad (4.4.14)$$

donde

$$\mathbf{L}_{\mathbf{c}, i} [\lambda^{-1}] \triangleq \left(\frac{1 - \bar{c}_i}{1 - c_i} \cdot \frac{1 - \lambda c_i}{\lambda - \bar{c}_i} \right) \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_i^H + \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H, \quad (4.4.15)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{d}, j} [\lambda^{-1}] \triangleq \lambda \boldsymbol{\eta}_{\infty, j} \boldsymbol{\eta}_{\infty, j}^H + \mathbf{U}_{\infty, j} \mathbf{U}_{\infty, j}^H. \quad (4.4.16)$$

Lo anterior permite calcular $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}]'$ según

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}]' &= \\ & \sum_{l=1}^{n_c} \left(\prod_{i=1}^{l-1} \mathbf{L}_{\mathbf{c}, i} [\lambda^{-1}] \left(\mathbf{L}_{\mathbf{c}, l} [\lambda^{-1}]' \right) \prod_{i=l+1}^{n_c} \mathbf{L}_{\mathbf{c}, i} [\lambda^{-1}] \prod_{j=1}^{n_z} \mathbf{L}_{\mathbf{d}, j} [\lambda^{-1}] \right) \\ & + \sum_{k=1}^{n_z} \left(\prod_{j=1}^{n_c} \mathbf{L}_{\mathbf{c}, j} [\lambda^{-1}] \prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{L}_{\mathbf{d}, i} [\lambda^{-1}] \left(\mathbf{L}_{\mathbf{d}, k} [\lambda^{-1}]' \right) \prod_{i=k+1}^{n_z} \mathbf{L}_{\mathbf{d}, i} [\lambda^{-1}] \right), \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

donde

$$\mathbf{L}_{\mathbf{c}, l} [\lambda^{-1}]' = -\frac{1 - \bar{c}_l}{1 - c_l} \left\{ \frac{1 - \lambda c_l}{(\lambda - \bar{c}_l)^2} + \frac{c_l}{\lambda - \bar{c}_l} \right\} \boldsymbol{\eta}_l \boldsymbol{\eta}_l^H, \quad (4.4.18)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{d}, l} [\lambda^{-1}]' = \boldsymbol{\eta}_{\infty, l} \boldsymbol{\eta}_{\infty, l}^H, \quad (4.4.19)$$

lo que permite obtener que

$$\mathbf{L}_{\mathbf{c}, l} [1]' = \frac{|c_l|^2 - 1}{|c_l - 1|^2} \boldsymbol{\eta}_l \boldsymbol{\eta}_l^H, \quad (4.4.20)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{d}, l} [1]' = \boldsymbol{\eta}_{\infty, l} \boldsymbol{\eta}_{\infty, l}^H. \quad (4.4.21)$$

⁴Ver, e.g., [63]

Empleando las expresiones (4.4.20) y (4.4.21), además de la propiedad unitaria del interactor $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}]$, en el límite (4.4.12), se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1} J_S^{opt} &= \text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}]' \Big|_{\lambda=1} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n_c} \frac{|c_i|^2 - 1}{|c_i - 1|^2} \text{traza} \{ \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_i^H \} + \sum_{j=1}^{n_z} \text{traza} \{ \boldsymbol{\eta}_{\infty, j} \boldsymbol{\eta}_{\infty, j}^H \} \\ &= n_z + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{|c_i|^2 - 1}{|c_i - 1|^2}, \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

donde se ha empleado que $\boldsymbol{\eta}_i$ y $\boldsymbol{\eta}_{\infty, i}$ son vectores unitarios. De esta manera, la expresión (4.4.22) permite verificar el resultado propuesto en este teorema, concluyendo así la demostración. \blacksquare

El resultado presentado en el Teorema 4.3 es consistente con los resultados en [6] y [64]. Nuestro resultado generaliza a aquéllos, pues considera no sólo referencias constantes.

Un segundo resultado complementario se presenta a continuación:

Teorema 4.4 (Comportamiento de J_S^{opt} como función de λ). *Considere la notación y los supuestos realizados en el Teorema 4.1. Entonces:*

1. J_S^{opt} es una función creciente y convexa de λ (para $\lambda \in [0, 1]$).
- 2.

$$J_S^{opt} \leq \lambda \left(n_z + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{|c_i|^2 - 1}{|c_i - 1|^2} \right) + (1 - \lambda) n, \quad (4.4.23)$$

donde n es el número de canales de salida de la planta $\mathbf{G}_{\mathbf{S}} [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$, y $\lambda \in [0, 1]$.

Demostración: La demostración del primer punto se efectúa empleando el Teorema del módulo máximo y siguiendo las mismas líneas presentadas en el Teorema 4.2 en la página 51, considerando $f(\lambda) \triangleq J_S^{opt}$.

El segundo punto puede demostrarse considerando que la función convexa $f(\lambda)$ puede ser acotada superiormente por una recta que una los extremos de la curva. En este caso, los puntos extremos son

$$f(0) = n, \quad f(1) = n_z + \sum_{i=1}^{n_c} \frac{|c_i|^2 - 1}{|c_i - 1|^2}, \quad (4.4.24)$$

lo que permite construir la recta como

$$p(\lambda) \triangleq \lambda f(1) + (1 - \lambda) f(0), \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (4.4.25)$$

Empleando la recta $p(\lambda)$ definida en (4.4.25) como cota superior de J_S^{opt} se obtiene el resultado presentado en (4.4.23), lo que permite concluir la demostración. \blacksquare

El resultado del Teorema 4.4 establece un límite superior sobre el desempeño óptimo cuando la planta presenta ceros de FNM en su estructura. Lo anterior permite estimar, fácilmente, la evolución de J_S^{opt} como función del parámetro λ .

Los resultados obtenidos en esta sección son válidos bajo el supuesto de que los nuevos canales de control no presentan limitaciones en su ancho de banda, aunque sí pueden presentar retardos (los cuales se incorporan como parte del interactor unitario izquierdo $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}}[z]$). La siguiente sección presenta una formulación para el problema de desempeño óptimo en casos en que los nuevos canales de control poseen limitaciones en su ancho de banda.

4.5. Problema de seguimiento en sistemas aumentados con canales defectuosos

Los lazos de control considerados hasta el momento suponen que los canales de control adicionales no poseen defectos, salvo retardos de propagación. No obstante, en ciertas ocasiones este supuesto no es realista. Pueden existir, por ejemplo, restricciones sobre la velocidad del control. Estas restricciones se traducen en limitaciones en el ancho de banda de los canales que comunican el controlador con el sistema a ser controlado. Esta sección introduce el problema de desempeño óptimo de sistemas de control frente a referencias decrecientes en el tiempo, cuando en el sistema aumentado existen limitaciones en el ancho de banda de los nuevos canales de control.

4.5.1. Formulación del problema

Considere el lazo de la Figura 4.2 en la página 53. La notación que usaremos aquí es idéntica a la usada en la Sección 4.4. Sin embargo, en esta sección, se considera la adición de $l \leq n - m$ nuevos canales de control.

En esta sección interesa estudiar el funcional

$$J_r \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{e}[k]^T \mathbf{e}[k] + \mathbf{u}_{\mathbf{F}}[k]^T \mathbf{u}_{\mathbf{F}}[k] \right), \quad (4.5.1)$$

donde $\mathbf{e}[k]$ es el error de seguimiento y $\mathbf{u}_{\mathbf{F}}[k]$ es una versión filtrada de la actuación. El estudio se hará en ausencia de perturbaciones y cuando la referencia es definida como $\mathbf{r}[k] \triangleq \boldsymbol{\nu} \lambda^k$, $\forall k \geq 0$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ y con $|\lambda| < 1$. La señal $\mathbf{u}_{\mathbf{F}}[k] \in \mathbb{R}^{(m+l)}$ se define como

$$\mathbf{U}_{\mathbf{F}}[z] \triangleq \mathbf{N}[z] \mathbf{U}[z], \quad (4.5.2)$$

donde $\mathbf{U}_{\mathbf{F}}[z]$ y $\mathbf{U}[z]$ corresponden a la transformadas \mathcal{Z} de $\mathbf{u}_{\mathbf{F}}[k]$ y $\mathbf{u}[k]$, respectivamente, y $\mathbf{N}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{(m+l) \times (m+l)}$ es un filtro apropiado. Una elección adecuada para la matriz $\mathbf{N}[z]$ permitiría modelar el efecto de restricciones sobre el ancho de banda de los canales de control, en particular de los l nuevos canales disponibles para manipular la planta en el lazo cerrado.

Considerando la definición entregada en (4.5.2), se observa que el funcional J_r , dado por (4.5.1), incluye una penalización de la actuación, filtrada por $\mathbf{N}[z]$. Esto implica que la actuación incide en el valor final de J_r . En consecuencia, su evolución temporal se encuentra restringida, pues debe garantizar la convergencia de J_r . Además, si el filtro $\mathbf{N}[z]$ amplifica señales de alta frecuencia, entonces $\mathbf{u}[k]$ deberá presentar un comportamiento acotado, a fin de garantizar que (4.5.1) converja a un valor finito. Por lo tanto, el funcional (4.5.1) permite incluir limitaciones en la respuesta en frecuencia de $\mathbf{U}[z]$.

Empleando el Teorema de Parseval, es posible trasladar el funcional (4.5.1) desde el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y escribir

$$J_r = \|\mathbf{E}[z]\|_2^2 + \|\mathbf{U}_F[z]\|_2^2. \quad (4.5.3)$$

Empleando las funciones de sensibilidad definidas en el Capítulo 2, es posible escribir el funcional en términos de la transformada \mathcal{Z} de la referencia como

$$\begin{aligned} J_r &= \|\mathbf{S}_0[z] \mathbf{R}[z]\|_2^2 + \|\mathbf{N}[z] \mathbf{C}[z] \mathbf{S}_0[z] \mathbf{R}[z]\|_2^2 \\ &= \left\| (\mathbf{I}_n + \mathbf{G}[z] \mathbf{C}[z])^{-1} \mathbf{R}[z] \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{N}[z] \mathbf{C}[z] (\mathbf{I}_n + \mathbf{G}[z] \mathbf{C}[z])^{-1} \mathbf{R}[z] \right\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

donde

$$\mathbf{R}[z] = \frac{z}{z-\lambda} \boldsymbol{\nu}. \quad (4.5.5)$$

El funcional definido en (4.5.4) es no lineal en el parámetro de diseño $\mathbf{C}[z]$. Para simplificar el problema, se emplea la parametrización de controladores para sistemas estables, entregada en la Sección 2.10.3. Esto permite reescribir J_r como

$$J_r = \|(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}[z] \mathbf{Q}[z]) \mathbf{R}[z]\|_2^2 + \|\mathbf{N}[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{R}[z]\|_2^2, \quad (4.5.6)$$

donde $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}$ es el parámetro de diseño.

Consistente con nuestro marco de trabajo, supondremos que la dirección de la referencia $\boldsymbol{\nu}$ satisface la Suposición 4.1 en la página 48. En consecuencia, al aplicar el operador esperanza a (4.5.6) y bajo los supuestos sobre $\boldsymbol{\nu}$, se obtiene

$$J_{S,r} = \mathcal{E}\{J_r\} = \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}[z] \mathbf{Q}[z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{N}[z] \mathbf{Q}[z] \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2. \quad (4.5.7)$$

Finalmente, el problema de esta sección se centra en calcular el ínfimo de la expresión (4.5.7) para $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}$. En términos formales interesa resolver el siguiente problema:

Problema 4.3. (Seguimiento en sistemas aumentados con restricciones) *Obtenga*

$$\begin{aligned} J_{S,r}^{opt} &\triangleq \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} J_{S,r} = \\ &\inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}[z] \mathbf{Q}[z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{N}[z] \mathbf{Q}[z] \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

y, si el ínfimo es alcanzable, entonces calcule un parámetro $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}$ que lo alcance.

La resolución de este problema será el centro de atención de la siguiente sección.

4.5.2. Desempeño óptimo de seguimiento en sistemas aumentados: caso general

Se presenta a continuación una caracterización para $J_{S,r}^{opt}$, cuando se agregan $l \leq n - m$ nuevos canales de control.

Teorema 4.5. (Desempeño óptimo de seguimiento en sistemas aumentados con restricciones: caso general) *Considere una planta $\mathbf{G}_S [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times (m+l)}$, $n \geq m+l$, con descripción inner-outer $\mathbf{G}_S [z] \triangleq \mathbf{G}_{S_i} [z] \mathbf{G}_{S_o} [z]$. Defina la planta aumentada $\mathbf{G}_{\text{aug}} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{2(m+l) \times (m+l)}$ y su factorización inner-outer como*

$$\mathbf{G}_{\text{aug}} [z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_o} [z] \\ \hline -\mathbf{N} [z] \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z] \mathbf{G}_{\text{aug}_o} [z]. \quad (4.5.9)$$

Bajo las definiciones anteriores, la solución óptima del Problema 4.3 se logra escogiendo $\mathbf{Q} [z] = \mathbf{Q}^{\text{opt}} [z]$, donde

$$\mathbf{Q}^{\text{opt}} [z] \triangleq \arg \inf_{\mathbf{Q} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} J_{S,r} = \mathbf{G}_{\text{aug}_o} [z]^{-1} \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [\lambda^{-1}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}]^T \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.5.10)$$

y el costo óptimo es

$$J_{S,r}^{\text{opt}} = \frac{1}{1-\lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}] \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [\lambda^{-1}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}]^T \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \right). \quad (4.5.11)$$

Demostración: Empleando la matriz unitaria

$$\mathbf{\Lambda} [z] = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim \\ \hline \mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{S_i} [z] \mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim \end{bmatrix}, \quad (4.5.12)$$

en (4.5.8), se obtiene

$$\begin{aligned} & \inf_{\mathbf{Q} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} \left\| \mathbf{\Lambda} [z] (\mathbf{I}_n - \mathbf{G} [z] \mathbf{Q} [z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{N} [z] \mathbf{Q} [z] \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \\ &= \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{S_i} [z] \mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \\ &+ \inf_{\mathbf{Q} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} \left\| (\mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim - \mathbf{G}_{S_o} [z] \mathbf{Q} [z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{N} [z] \mathbf{Q} [z] \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

Definiendo

$$\alpha \triangleq \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{S_i} [z] \mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2, \quad (4.5.14)$$

y notando que

$$(\mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim - \mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim|_{z=\lambda}) \frac{1}{z-\lambda} \in \mathcal{RH}_2^{\perp(m+l) \times n}, \quad (4.5.15)$$

$$(\mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim|_{z=\lambda} - \mathbf{G}_{S_o} [z] \mathbf{Q} [z]) \frac{1}{z-\lambda} \in \mathcal{RH}_2^{(m+l) \times n}, \quad (4.5.16)$$

es posible reescribir (4.5.13) como

$$\begin{aligned}
 J_{S,r}^{opt} = & \alpha + \left\| \left(\mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim - \mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim|_{z=\lambda} \right) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \\
 & + \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} \left\| \left(\mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim|_{z=\lambda} - \mathbf{G}_{S_o} [z] \mathbf{Q} [z] \right) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{N} [z] \mathbf{Q} [z] \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2.
 \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

La parte superior de la expresión (4.5.17) ha sido calculada en el Teorema 4.1 en la página 48, reemplazando por $\mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}]$ donde sea necesario. Por lo tanto, esta demostración estará centrada en calcular

$$\beta = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [z]^\sim|_{z=\lambda} - \mathbf{G}_{S_o} [z] \mathbf{Q} [z] \\ \mathbf{N} [z] \mathbf{Q} [z] \end{bmatrix} \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2. \tag{4.5.18}$$

Empleando en (4.5.18) el factor unitario $\mathbf{\Lambda}_2 [z]$, definido como

$$\mathbf{\Lambda}_2 [z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z]^\sim \\ \mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z] \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z]^\sim \end{bmatrix}, \tag{4.5.19}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 J_{S,r}^{opt} = & J_A^{opt} + \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} \left\| \mathbf{\Lambda}_2 [z] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}]^T - \mathbf{G}_{S_o} [z] \mathbf{Q} [z] \\ \mathbf{N} [z] \mathbf{Q} [z] \end{bmatrix} \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 = J_A^{opt} \\
 & + \left\| \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z] \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z]^\sim \right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \\
 & + \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} \left\| \left(\mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z]^\sim \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mathbf{G}_{\text{aug}_o} [z] \mathbf{Q} [z] \right) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2,
 \end{aligned} \tag{4.5.20}$$

donde es posible emplear la definición de la norma 2 entregada en (2.9.2) para escribir

$$\begin{aligned}
 J_B = & \left\| \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z] \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z]^\sim \right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \\
 = & \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}] \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z] \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z]^\sim \right) \frac{z}{1-z\lambda} \right. \\
 & \left. \cdot \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z] \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z]^\sim \right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{z-\lambda} \right\} \frac{dz}{z} \\
 = & \frac{1}{1-\lambda^2} \text{traza} \left\{ \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}]^T \right\} \\
 - & \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}] \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z] \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z]^\sim}{(z-\lambda)(1-z\lambda)} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S_i} [\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} dz,
 \end{aligned} \tag{4.5.21}$$

lo que permite escribir (4.5.20) como

$$\begin{aligned}
 J_{S,r}^{opt} &= J_A^{opt} + J_B \\
 &+ \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} \left\| \left(\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z] \sim \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}}[\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] \mathbf{Q}[z] \right) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2. \quad (4.5.22)
 \end{aligned}$$

Considerando que

$$\left\| \left(\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z^{-1}]^T - \mathbf{G}_{\text{aug}_i}[\lambda^{-1}]^T \right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}}[\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \in \mathcal{RH}_2^{\perp(m+l) \times n}, \quad (4.5.23)$$

$$\left\| \left(\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[\lambda^{-1}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}}[\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] \mathbf{Q}[z] \right) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \in \mathcal{RH}_2^{(m+l) \times n}, \quad (4.5.24)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
 &\inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} \left\| \left(\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z] \sim \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}}[\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] \mathbf{Q}[z] \right) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \\
 &= \left\| \left(\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z^{-1}]^T - \mathbf{G}_{\text{aug}_i}[\lambda^{-1}]^T \right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}}[\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \\
 &+ \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} \left\| \left(\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[\lambda^{-1}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}}[\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] \mathbf{Q}[z] \right) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2. \quad (4.5.25)
 \end{aligned}$$

Escogiendo $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{opt}[z]$ tal como se define en (4.5.10), se obtiene

$$\inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+l) \times n}} \left\| \left(\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[\lambda^{-1}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}}[\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] \mathbf{Q}[z] \right) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 = 0, \quad (4.5.26)$$

por lo que el costo óptimo puede expresarse como

$$J_{S,r}^{opt} = J_A^{opt} + J_B + \left\| \left(\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z^{-1}]^T - \mathbf{G}_{\text{aug}_i}[\lambda^{-1}]^T \right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}}[\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2, \quad (4.5.27)$$

en donde

$$\begin{aligned}
 &\left\| \left(\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z^{-1}]^T - \mathbf{G}_{\text{aug}_i}[\lambda^{-1}]^T \right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}}[\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}}[\lambda^{-1}] \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \times \frac{(\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z] - \mathbf{G}_{\text{aug}_i}[\lambda^{-1}]) (\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z^{-1}]^T - \mathbf{G}_{\text{aug}_i}[\lambda^{-1}]^T)}{(z-\lambda)(1-z\lambda)} \left. \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}}[\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} dz, \quad (4.5.28)
 \end{aligned}$$

lo que es equivalente a

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left(\mathbf{G}_{\text{augi}} [z^{-1}]^T - \mathbf{G}_{\text{augi}} [\lambda^{-1}]^T \right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}} [\lambda^{-1}]^T \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 = \\
 & \frac{1}{2\pi j} \oint \text{traza} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}} [\lambda^{-1}] \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\mathbf{G}_{\text{augi}} [z] \mathbf{G}_{\text{augi}} [z]^{\sim}}{(z - \lambda)(1 - z\lambda)} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}} [\lambda^{-1}]^T \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} dz \\
 & - \frac{1}{1 - \lambda^2} \text{traza} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}} [\lambda^{-1}] \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{augi}} [\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{\text{augi}} [\lambda^{-1}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}} [\lambda^{-1}]^T \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}, \quad (4.5.29)
 \end{aligned}$$

donde se ha empleado exhaustivamente las propiedades enunciadas en el Lema A.1 del Apéndice A para el cálculo de los residuos. Finalmente, reemplazando J_A^{opt} , (4.5.21) y (4.5.28) en (4.5.27) resulta

$$\begin{aligned}
 J_{S,r}^{\text{opt}} = & \\
 & \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}} [\lambda^{-1}] \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{augi}} [\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{\text{augi}} [\lambda^{-1}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Si}} [\lambda^{-1}]^T \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \right). \quad (4.5.30)
 \end{aligned}$$

El resultado (4.5.30) permite finalizar la demostración. \blacksquare

El Teorema 4.5 entrega una forma cerrada para el desempeño óptimo de un sistema aumentado con restricciones sobre el ancho de banda de los nuevos canales de control. La expresión cerrada para $J_{S,r}^{\text{opt}}$ indica una dependencia implícita del costo óptimo con respecto a los rasgos dinámicos de la planta, como son los ceros de FNM finitos e infinitos, y también del filtro de penalización. Estos resultados son válidos aún cuando el número de canales de actuación adicionales no permitan igualar la cantidad de entradas y salidas, i.e., el desempeño óptimo de esta sección permite estudiar sistemas aumentados no cuadrados, con restricciones en sus canales de control.

Para el caso de sistemas cuadrados con limitaciones en sus canales de actuación, es posible establecer un resultado inmediato a partir del Teorema 4.5:

Corolario 4.2. (Desempeño óptimo de seguimiento en sistemas aumentados con restricciones: sistemas cuadrados) *Considere una planta cuadrada estable definida como*

$$\mathbf{G}_{\text{S}} [z] \triangleq \mathbf{E}_{\text{I,dc}} [z] \mathbf{G}_{\text{S,FM}} [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}, \quad (4.5.31)$$

donde $\mathbf{E}_{\text{I,dc}} [z] \in \mathcal{R}^{n \times n}$ corresponde al interactor unitario izquierdo de ceros de fase no mínima de $\mathbf{G}_{\text{S}} [z]$, y $\mathbf{G}_{\text{S,FM}} [z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}$ es definida como la parte estable, bipropia y de fase mínima de $\mathbf{G}_{\text{S}} [z]$. Además, considere la factorización inner-outer

$$\mathbf{G}_{\text{aug}} [z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{S,FM}} [z] \\ \hline -\mathbf{N} [z] \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{\text{augi}} [z] \mathbf{G}_{\text{augo}} [z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{2n \times n}. \quad (4.5.32)$$

Bajo las definiciones anteriores, el valor óptimo $J_{S,r}^{\text{opt}}$ del problema (4.5.8) se logra escogiendo $\mathbf{Q} [z] = \mathbf{Q}^{\text{opt}} [z]$, donde

$$\mathbf{Q}^{\text{opt}} [z] \triangleq \arg \min_{\mathbf{Q} [z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}} J_{S,r} = \mathbf{G}_{\text{augo}} [z]^{-1} \mathbf{G}_{\text{augi}} [\lambda^{-1}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{\text{I,dc}} [\lambda^{-1}]^T \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.5.33)$$

y el costo óptimo es

$$J_{S,r}^{opt} = \frac{1}{1-\lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [\lambda^{-1}] \right. \right. \\ \left. \left. \times \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [\lambda^{-1}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}} [\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \right). \quad (4.5.34)$$

En el marco de esta tesis, el objetivo es analizar el desempeño óptimo de un sistema aumentado cuando existen restricciones de ancho de banda en los nuevos $n - m$ canales de control. Con el propósito de introducir estas restricciones, es necesario establecer una estructura particular para el filtro $\mathbf{N}[z]$, el cual es definido como

$$\mathbf{N}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag} \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-m} \} \end{bmatrix} F[z], \quad (4.5.35)$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, \dots, n - m\}$, y $F[z] \in \mathcal{RH}_\infty$. Esta elección permite restringir el ancho de banda de los nuevos $n - m$ canales de control a una zona definida a través de los factores de ponderación α_i y del filtro escalar $F[z]$. La elección de $\mathbf{N}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ según (4.5.35) permite establecer algunas propiedades adicionales sobre la matriz $\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z]$, las cuales son enunciadas en el Apéndice B de esta tesis.

4.6. Comparación de desempeño en sistemas altos y aumentados

El objetivo de las formas cerradas entregadas para el desempeño de sistemas altos y aumentados, es establecer una cuantificación de los beneficios obtenidos al agregar nuevos canales de control a un lazo cerrado. En el Capítulo 3, se formalizó un resultado intuitivo para el problema de regulación, concluyendo que la adición de nuevos canales de control siempre es beneficioso (o, al menos, no perjudicial) para el desempeño óptimo de regulación de un sistema. Con el propósito de entregar una expresión equivalente para el problema de seguimiento, se establece un teorema que formaliza este resultado intuitivo.

4.6.1. Mejoras en el desempeño

Teorema 4.6 (Mejoras en el desempeño de sistemas aumentados). *Considere la notación, supuestos y resultados presentados en el Teorema 4.1 en la página 48 y el Corolario 4.1 en la página 55. Si una planta alta $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$, $n > m$, es modificada a una estructura cuadrada $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$ dada por (4.4.1), entonces se satisface siempre que $J_S^{opt} \leq J_A^{opt}$.*

Demostración: la demostración de este Teorema sigue las mismas líneas de la demostración del Teorema 3.4 en la página 41, pues el conjunto solución del problema dado para J_A^{opt} está contenido dentro del conjunto solución del problema entregado para J_S^{opt} . En consecuencia, es posible escoger un parámetro $\mathbf{Q}_S[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ tal que

$$\mathbf{Q}_S[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A^{opt}[z] \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.6.1)$$

con $\mathbf{Q}_A^{\text{opt}}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$ definido según (4.3.8). En consecuencia, el valor óptimo J_S^{opt} siempre es menor o igual al desempeño óptimo dado por J_A^{opt} , finalizando así la demostración. ■

El Teorema 4.6 permite corroborar que el desempeño óptimo de seguimiento en sistemas aumentados siempre es mejor, o al menos igual, que el desempeño óptimo alcanzado por una planta alta. Cabe destacar que este resultado ha sido demostrado para el caso de canales perfectos o con retardos de propagación, pues corresponden a los casos abordados por el problema de desempeño definido por J_S^{opt} . Resultados complementarios pueden obtenerse para el caso de canales con limitaciones en su ancho de banda, tal como se propone a continuación.

Teorema 4.7. (Mejoras en el desempeño de sistemas aumentados con limitaciones) *Considere la notación, supuestos y resultados presentados en el Teorema 4.1 en la página 48, y los Corolarios 4.1 en la página 55 y 4.2 en la página 63. Si una planta alta $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$, $n > m$, es modificada a una estructura cuadrada $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$ dada por (4.4.1), cuyos $n - m$ nuevos canales se encuentran restringidos en ancho de banda por un filtro $\mathbf{N}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ como en (4.5.35), con $\alpha_i = \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, \dots, n - m\}$, entonces*

$$\inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \lim_{\alpha \rightarrow 0} J_{S,r} = J_S^{\text{opt}}, \quad (4.6.2)$$

$$\inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} J_{S,r} = J_A^{\text{opt}}. \quad (4.6.3)$$

Demostración: Para demostrar el Teorema anterior se procederá por partes. La expresión (4.6.2) se puede obtener directamente de la formulación del problema entregada en (4.5.8), pues escogiendo $\mathbf{N}[z] \triangleq \mathbf{0}$, se obtiene que $J_{S,r} = J_S$, con J_S definido según (4.4.6). Esto último permite obtener inmediatamente (4.6.2).

Para la demostración de (4.6.3), considere una partición del parámetro de diseño $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ dada por

$$\mathbf{Q}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A[z] \\ \mathbf{Q}_N[z] \end{bmatrix}, \quad (4.6.4)$$

con $\mathbf{Q}_A[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$ y $\mathbf{Q}_N[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(n-m) \times n}$. Esto permite escribir

$$\frac{J_{S,r}}{1 + \alpha^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2} \left\| \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_S[z] \mathbf{Q}[z] \right) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \left\| F[z] \frac{\mathbf{Q}_N[z]}{z - \lambda} \right\|_2^2, \quad (4.6.5)$$

con $J_{S,r}$ y $F[z]$ definidos como (4.5.8) y (4.5.35), respectivamente. Tomando el límite de (4.6.5) cuando $\alpha \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{J_{S,r}}{1 + \alpha^2} = \left\| F[z] \frac{\mathbf{Q}_N[z]}{z - \lambda} \right\|_2^2. \quad (4.6.6)$$

En consecuencia, si se toma el ínfimo de la expresión (4.6.6), resulta

$$\inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{J_{S,r}}{1 + \alpha^2} = \inf_{\mathbf{Q}_N[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(n-m) \times n}} \left\| F[z] \frac{\mathbf{Q}_N[z]}{z - \lambda} \right\|_2^2 = 0, \quad (4.6.7)$$

el cual se obtiene escogiendo $\mathbf{Q}_N [z] \triangleq \mathbf{0}$ y $\mathbf{Q}_A [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$. El resultado presentado en (4.6.7) permite concluir que

$$\inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} J_{S,r} = \inf_{\mathbf{Q}_A [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} \left\| (\mathbf{I}_N - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z]) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 = J_A^{opt}, \quad (4.6.8)$$

finalizando así la demostración. \blacksquare

El Teorema 4.7 formaliza dos resultados intuitivos:

- Cuando $\alpha = 0$, el desempeño óptimo alcanzable $J_{S,r}^{opt}$ es equivalente a aquel obtenido cuando se agregan $n - m$ canales de actuación perfectos, i.e., el problema de desempeño se reduce a calcular el valor dado por J_S^{opt} .
- Por otro lado, cuando $\alpha \rightarrow \infty$, el desempeño óptimo alcanzable $J_{S,r}^{opt}$ corresponde al que se obtiene al considerar el problema dado por J_A^{opt} para la estructura inicial $\mathbf{G}_A [z]$, descartando así los nuevos $n - m$ canales de actuación disponibles. En otras palabras, cuando las limitaciones de ancho de banda son excesivas, entonces el desempeño óptimo alcanzable por el sistema aumentado se reduce a aquél alcanzable por el sistema alto original.

Hasta el momento se han formalizado los resultados correspondientes al desempeño óptimo de sistemas aumentados, cuando existen limitaciones sobre el ancho de banda de los nuevos canales de control. Uno de los fenómenos que es necesario formalizar es un resultado intuitivo respecto al comportamiento del desempeño óptimo $J_{S,r}^{opt}$ cuando los nuevos canales de control poseen retardos de propagación muy elevados.

Teorema 4.8. (Mejoras en el desempeño de sistemas aumentados con retardos) *Considere una planta estable $\mathbf{G}_S [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$ definida según (4.4.1), con $\mathbf{G}_N [z] \triangleq z^{-d} \mathbf{G}_{N,d} [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times (n-m)}$, siendo $\mathbf{G}_{N,d} [z]$ una matriz de transferencia estable, bipropia, y posiblemente con ceros de FNM finitos. Considere además los Problemas 4.1 en la página 48 y 4.2 en la página 54. Bajo los supuestos anteriores, se cumple que*

$$\inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \lim_{d \rightarrow \infty} J_S = J_A^{opt}. \quad (4.6.9)$$

Demostración: Considerando la partición (4.4.1) y definiendo

$$\mathbf{Q} [z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A [z] \\ \mathbf{Q}_N [z] \end{bmatrix}, \quad (4.6.10)$$

con $\mathbf{Q}_A [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$ y $\mathbf{Q}_N [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(n-m) \times n}$, es posible escribir J_S como

$$\begin{aligned} J_S &= \left\| (\mathbf{I}_N - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z] - \mathbf{G}_N [z] \mathbf{Q}_N [z]) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 \\ &= \left\| (\mathbf{I}_N - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z] - z^{-d} \mathbf{G}_{N,d} [z] \mathbf{Q}_N [z]) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

y tomando el límite cuando $d \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\lim_{d \rightarrow \infty} J_S = \lim_{d \rightarrow \infty} \left\| \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z] - z^{-d} \mathbf{G}_{N,d} [z] \mathbf{Q}_N [z] \right) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2, \quad (4.6.12)$$

lo que es equivalente a

$$\lim_{d \rightarrow \infty} J_S = \lim_{d \rightarrow \infty} \left\| \left(z^d \{ \mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z] \} - \mathbf{G}_{N,d} [z] \mathbf{Q}_N [z] \right) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2. \quad (4.6.13)$$

El funcional definido como J_S sólo es válido sobre el conjunto de parámetros de diseño $\mathbf{Q} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$, lo que implica necesariamente que $\mathbf{Q}_A [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$ y $\mathbf{Q}_N [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(n-m) \times n}$. En consecuencia, debido a que $|\lambda| < 1$, es posible establecer que

$$\{ \mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z] \} \frac{1}{z - \lambda} \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}, \quad (4.6.14)$$

y, por lo tanto, (4.6.14) posee una descripción en serie de potencias dada por

$$\{ \mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z] \} \frac{1}{z - \lambda} \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{R}_i z^{-i}, \quad (4.6.15)$$

con $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Empleando la definición (4.6.15) en (4.6.13), es posible establecer que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} J_S = \lim_{d \rightarrow \infty} \left\| z^d \sum_{i=1}^d \mathbf{R}_i z^{-i} + \mathbf{P} [z] - \mathbf{G}_{N,d} [z] \mathbf{Q}_N [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2, \quad (4.6.16)$$

con $\mathbf{P} [z]$ definido como

$$\mathbf{P} [z] \triangleq \left(\{ \mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z] \} \frac{1}{z - \lambda} - \sum_{i=1}^d \mathbf{R}_i z^{-i} \right) z^d \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}, \quad (4.6.17)$$

por lo que es posible concluir que

$$\mathbf{P} [z] - \mathbf{G}_{N,d} [z] \mathbf{Q}_N [z] \frac{1}{z - \lambda} \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}, \quad (4.6.18)$$

$$z^d \sum_{i=1}^d \mathbf{R}_i z^{-i} \in \mathcal{RH}_2^\perp{}^{n \times n}, \quad (4.6.19)$$

lo que permite expresar (4.6.16) como

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} J_S &= \lim_{d \rightarrow \infty} \left\| z^d \sum_{i=1}^d \mathbf{R}_i z^{-i} \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{P} [z] - \mathbf{G}_{N,d} [z] \mathbf{Q}_N [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 \\ &= \lim_{d \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^d \mathbf{R}_i z^{-i} \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{P} [z] - \mathbf{G}_{N,d} [z] \mathbf{Q}_N [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.6.20)$$

En base a las definiciones (4.6.15) y (4.6.17), es posible concluir que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^d \mathbf{R}_i z^{-i} = \{\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z]\} \frac{1}{z - \lambda}, \quad (4.6.21)$$

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \mathbf{P} [z] = \mathbf{0}, \quad (4.6.22)$$

por lo que el límite presentado en (4.6.20) resulta en

$$\lim_{d \rightarrow \infty} J_S = \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z]) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{G}_{N,d} [z] \mathbf{Q}_N [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2, \quad (4.6.23)$$

lo que permite observar que

$$\inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \lim_{d \rightarrow \infty} J_S = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \left\{ \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z]) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{G}_{N,d} [z] \mathbf{Q}_N [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 \right\}, \quad (4.6.24)$$

cuyo resultado óptimo puede obtenerse escogiendo $\mathbf{Q}_N [z] \triangleq \mathbf{0}$, por lo que el ínfimo (4.6.24) se reduce a

$$\inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \lim_{d \rightarrow \infty} J_S = \inf_{\mathbf{Q}_A [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}} \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A [z] \mathbf{Q}_A [z]) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 = J_A^{opt}, \quad (4.6.25)$$

con J_A^{opt} definido según (4.3.7), finalizando así la demostración. \blacksquare

El resultado presentado en (4.6.9) permite concluir que el desempeño óptimo de seguimiento en sistemas aumentados J_S^{opt} se reduce al desempeño óptimo de control del sistema alto inicial J_A^{opt} , cuando los retardos presentes en los nuevos $n - m$ canales de actuación son muy elevados. Lo anterior respalda los resultados esperados en forma intuitiva, pues si los nuevos canales de actuación poseen retardos muy elevados, entonces el beneficio de tenerlos a disposición para fines de control no se percibirá sino hasta varias muestras después de aplicada la referencia $\mathbf{r} [k]$.

Si bien los resultados anteriores permiten corroborar resultados esperados intuitivamente, ninguno de ellos ofrece una cuantificación, o al menos una cota, para las mejoras en el desempeño de un lazo cerrado con canales de control adicionales. El siguiente teorema permite profundizar en dicha cuantificación, entregando una cota superior para la mejora en el desempeño de seguimiento en sistemas aumentados.

Teorema 4.9. (Cota superior para la mejora en el desempeño de sistemas aumentados). *Considere los Problemas 4.1 en la página 48 y 4.2 en la página 54. Adicionalmente, defina una planta alta $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$ ($n > m$), y una planta cuadrada $\mathbf{G}_S [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$. Suponga además que la planta $\mathbf{G}_S [z]$ posee una partición*

$$\mathbf{G}_S [z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A [z] \\ \vdots \\ \mathbf{G}_N [z] \end{bmatrix}, \quad (4.6.26)$$

donde $\mathbf{G}_N[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times (n-m)}$. Por otro lado, defina

$$\mathcal{M} \triangleq J_A^{opt} - J_S^{opt}. \quad (4.6.27)$$

Bajo los supuestos realizados, es posible establecer

$$\mathcal{M} \leq \left\| \mathbf{G}_N[z] \mathbf{Q}_N^{opt}[z] \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2, \quad (4.6.28)$$

donde

$$\mathbf{Q}^{opt}[z] = \arg \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} J_S = \mathbf{G}_{S, FM}[z]^{-1} \mathbf{E}_{I, dc} [\lambda^{-1}]^T. \quad (4.6.29)$$

Demostración: Considerando la partición (4.6.26) y escribiendo

$$\mathbf{Q}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A[z] \\ \mathbf{Q}_N[z] \end{bmatrix}, \quad (4.6.30)$$

con $\mathbf{Q}_A[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$ y $\mathbf{Q}_N[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(n-m) \times n}$, es posible reescribir (4.4.6) como

$$J_S = \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A[z] \mathbf{Q}_A[z] - \mathbf{G}_N[z] \mathbf{Q}_N[z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2, \quad (4.6.31)$$

lo que por desigualdad triangular [28] conduce a

$$J_S \geq \left| \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A[z] \mathbf{Q}_A[z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 - \left\| \mathbf{G}_N[z] \mathbf{Q}_N[z] \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \right|. \quad (4.6.32)$$

Tomando el ínfimo de la expresión (4.6.32) se obtiene

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} J_S &\geq \\ \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} &\left| \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A[z] \mathbf{Q}_A[z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 - \left\| \mathbf{G}_N[z] \mathbf{Q}_N[z] \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \right|, \end{aligned} \quad (4.6.33)$$

donde $\mathbf{Q}[z]$ se ha particionado según (4.6.30). Dado que el ínfimo de J_S se obtiene escogiendo $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{opt}[z]$ tal como se expresa en (4.6.29), entonces la desigualdad (4.6.33) conduce a

$$J_S^{opt} \geq \left| \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A[z] \mathbf{Q}_A^{opt}[z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 - \left\| \mathbf{G}_N[z] \mathbf{Q}_N^{opt}[z] \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \right|. \quad (4.6.34)$$

Definiendo

$$J_A^{subopt} \triangleq \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A[z] \mathbf{Q}_A^{opt}[z]) \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2, \quad (4.6.35)$$

se tiene entonces que

$$J_S^{opt} \geq \left| J_A^{subopt} - \left\| \mathbf{G}_N[z] \mathbf{Q}_N^{opt}[z] \frac{1}{z-\lambda} \right\|_2^2 \right|. \quad (4.6.36)$$

Observe que $J_A^{subopt} \geq J_A^{opt}$, con J_A^{opt} definido según (4.3.7).

La expresión (4.6.36) debe ser analizada por casos:

- Caso 1: $J_A^{subopt} \geq \left\| \mathbf{G}_N [z] \mathbf{Q}_N^{opt} [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2$.

Considerando que se satisface la desigualdad propuesta, y empleando (4.6.35) en (4.6.36), se obtiene

$$J_S^{opt} \geq J_A^{subopt} - \left\| \mathbf{G}_N [z] \mathbf{Q}_N^{opt} [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 \geq J_A^{opt} - \left\| \mathbf{G}_N [z] \mathbf{Q}_N^{opt} [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2, \quad (4.6.37)$$

lo cual permite establecer que

$$\mathcal{M} = J_A^{opt} - J_S^{opt} \leq \left\| \mathbf{G}_N [z] \mathbf{Q}_N^{opt} [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2, \quad (4.6.38)$$

finalizando así la demostración para este caso.

- Caso 2: $J_A^{subopt} \leq \left\| \mathbf{G}_N [z] \mathbf{Q}_N^{opt} [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2$.

La desigualdad propuesta permite establecer que

$$0 \leq J_S^{opt} \leq J_A^{opt} \leq J_A^{subopt} \leq \left\| \mathbf{G}_N [z] \mathbf{Q}_N^{opt} [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2, \quad (4.6.39)$$

donde se hace uso del resultado presentado en el Teorema 4.6 en la página 64. Empleando las desigualdades mencionadas previamente, es posible establecer que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = J_A^{opt} - J_S^{opt} &\leq \left\| \mathbf{G}_N [z] \mathbf{Q}_N^{opt} [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 - J_S^{opt} \\ &\leq \left\| \mathbf{G}_N [z] \mathbf{Q}_N^{opt} [z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.6.40)$$

demostrando así la desigualdad para el segundo caso.

Las expresiones obtenidas en (4.6.38) y (4.6.40) permiten concluir la demostración. ■

El resultado obtenido en el Teorema 4.9 permite establecer una cota superior para el desempeño alcanzable por un sistema aumentado con canales adicionales perfectos, en función de la matriz de transferencia adicional $\mathbf{G}_N [z]$, y de la parte del parámetro de diseño óptimo asociado a dichos canales, i.e., $\mathbf{Q}_N^{opt} [z]$. Si bien la cota no puede ser calculada en forma cerrada, su importancia se halla en el hecho de que establece en forma explícita la dependencia de la mejora del desempeño, como función de las dinámicas que relacionan los nuevos canales de control con las salidas del sistema, definidas a través de la matriz de transferencia adicional $\mathbf{G}_N [z]$.

Los resultados expuestos en esta sección serán analizados a continuación, mediante el estudio de un ejemplo sencillo, el cual considera la misma planta estudiada en el Capítulo 3.

4.6.2. Mejoras en el desempeño: un ejemplo simple

A modo de ilustrar los resultados más relevantes de este capítulo, se propone el mismo ejemplo del Capítulo 3, pero esta vez considerando que el problema mide la calidad del seguimiento de referencias decrecientes en el tiempo.

Ejemplo 4.1. Considere un sistema de una entrada y dos salidas (SITO), cuya matriz de transferencia $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 1}$ es descrita como

$$\mathbf{G}_A[z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{3(z-c)}{z^2(z-0.8)} \\ \frac{2(z-c)}{z^2(z-0.2)} \end{bmatrix}, \quad (4.6.41)$$

con $c = 1.5$. Tal como fue presentado en el Capítulo 3, el sistema SITO definido en (4.6.41) es estable y posee 3 ceros de FNM: 2 de ellos están en infinito ($n_z = 2$), mientras que el tercero está ubicado en $z = 1.5$ ($n_c = 1$).

A fin de mejorar el desempeño del sistema, se estudia la posibilidad de agregar un nuevo canal de control. La instalación de un nuevo actuador en el sistema implica una modificación en la estructura de la matriz de transferencia. En este caso, la estructura del sistema aumentado $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 2}$ es descrita por

$$\mathbf{G}_S[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A[z] & \begin{bmatrix} \frac{z-0.3}{z^2} \\ \frac{2(z-0.3)}{z(z-0.2)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (4.6.42)$$

con $\mathbf{G}_A[z]$ como en (4.6.41). El sistema aumentado $\mathbf{G}_S[z]$ tiene 4 ceros de FNM: 3 en infinito y 1 en $z = 1.5$, y 2 ceros de FM adicionales ubicados en $z = 0.3$ y $z = -0.4$. De esta manera, la matriz de transferencia $\mathbf{G}_S[z]$ sólo agrega un cero de FNM en infinito.

A diferencia del desarrollo en el Capítulo 3, en este caso nos interesa analizar el efecto de agregar canales adicionales cuando la referencia es descrita por

$$\mathbf{r}[k] \triangleq (0.9)^k \boldsymbol{\nu}, \quad (4.6.43)$$

donde $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^2$ satisface la Suposición 4.1 en la página 48, $\lambda = 0.9$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Se estudiará el desempeño del sistema alto $\mathbf{G}_A[z]$ definido en (4.6.41), y del sistema aumentado $\mathbf{G}_S[z]$ definido en (4.6.42), para dos casos diferentes:

- Caso 1.* Se considerará que el nuevo canal de control no posee restricciones sobre su ancho de banda, i.e., se resuelve el problema de optimización dado en (4.4.7).
- Caso 2.* A fin de incluir limitaciones en la velocidad de control, se estudia el efecto de restricciones sobre el ancho de banda de los nuevos canales de control, mediante la definición de un filtro $\mathbf{N}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{2 \times 2}$ como sigue

$$\mathbf{N}[z] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} F[z], \quad (4.6.44)$$

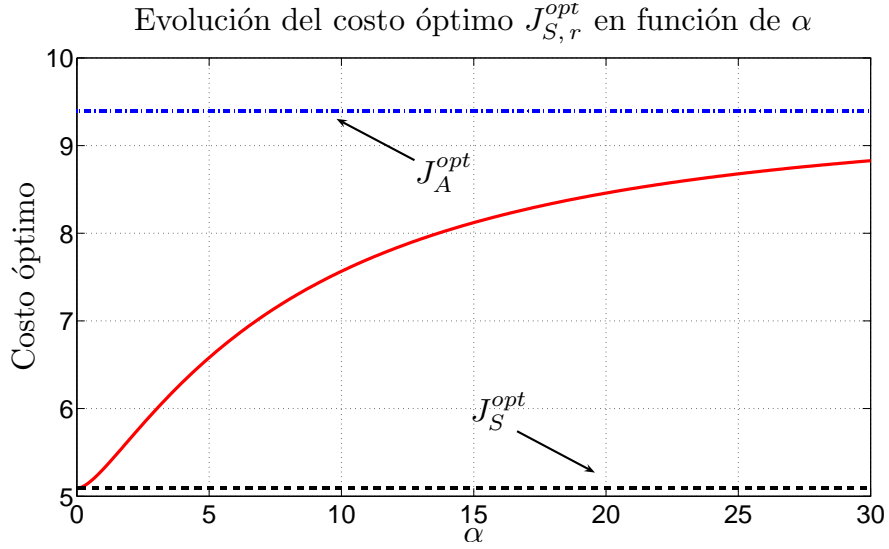


Figura 4.3. Evolución de $J_{S,r}^{opt}$ como función del parámetro de restricción α .

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha \geq 0$, y

$$F[z] = \frac{z-1}{z}, \quad (4.6.45)$$

i.e., el filtro $F[z]$ posee una característica pasa-altos, con ganancia a continua nula. Esto permite ponderar en mayor medida el contenido a alta frecuencia de la actuación en el nuevo canal de control.

En base al contexto presentado anteriormente, se puede establecer que el desempeño óptimo de seguimiento para el sistema alto $\mathbf{G}_A[z]$, cuando es sometido a una referencia del tipo (4.6.43), está dado por

$$J_A^{opt} = \frac{1}{1-(0.9)^2} \left(2 - \text{traza} \left\{ \mathbf{G}_{A_i} [0.9^{-1}] \mathbf{G}_{A_i} [0.9^{-1}]^T \right\} \right) = 9.39, \quad (4.6.46)$$

en tanto que el desempeño óptimo para la planta aumentada $\mathbf{G}_S[z]$, frente a las mismas condiciones presentadas para la planta $\mathbf{G}_A[z]$, está dado por

$$J_S^{opt} = \frac{1}{1-(0.9)^2} \left(2 - \text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{I,dc} [0.9^{-1}] \mathbf{E}_{I,dc} [0.9^{-1}]^T \right\} \right) = 5.09, \quad (4.6.47)$$

i.e., existe una mejora significativa en el desempeño del sistema en lazo cerrado, cuando se considera la opción de un nuevo canal de control en el sistema. En términos porcentuales, la mejora en el desempeño es de un

$$\Delta = \frac{J_A^{opt} - J_S^{opt}}{J_A^{opt}} \cdot 100\% = 45.79\%, \quad (4.6.48)$$

lo que implica que los beneficios reportados por la adición de este nuevo canal de control podrían ser comparables con los costos de implementación del nuevo actuador.

Ahora bien, si el escenario se modificase mediante la penalización de la nueva actuación mediante la matriz $\mathbf{N}[z]$ definida en (4.6.44), sería necesario cuantificar los beneficios entregados relativo a J_A^{opt} , como así también el empeoramiento del desempeño con respecto a J_S^{opt} . La Figura 4.3 presenta la evolución de $J_{S,r}^{opt}$ como función del parámetro α . En ella se pueden apreciar algunos aspectos relevantes:

- Cuando $\alpha \rightarrow 0$, el desempeño óptimo $J_{S,r}^{opt}$ tiende al costo óptimo dado por J_S^{opt} . Esto es consistente con los resultados entregados en el Teorema 4.7 en la página 65 y con la intuición pues, si no existen restricciones sobre los canales adicionales, entonces el desempeño óptimo debiese ser dado por J_S^{opt} .
- Cuando $\alpha \rightarrow \infty$, el desempeño óptimo $J_{S,r}^{opt}$ tiende al costo óptimo entregado por J_A^{opt} . Lo anterior nuevamente es consistente con el Teorema 4.7 en la página 65, además de coincidir con resultados intuitivos, pues, si los canales adicionales tienen limitaciones muy severas sobre su ancho de banda, entonces el desempeño óptimo alcanzable por el sistema aumentado debe tender en forma natural al costo óptimo J_A^{opt} resultante para la planta alta.

El ejemplo presentado en esta sección ha permitido observar algunos fenómenos estudiados en este capítulo. En particular, las mejoras del desempeño obtenidas cuando se agregan canales adicionales de control y su efecto en el costo óptimo cuando dichos canales poseen restricciones en su ancho de banda.

4.7. Resumen

El presente capítulo ha abordado el problema de límites de desempeño en el seguimiento de referencias, considerando sistemas LTI, estables y de tiempo discreto, definidos a través de matrices de transferencia altas y cuadradas. El tipo de referencia empleada es una señal decreciente en el tiempo, lo cual garantiza la convergencia de los índices de desempeño definidos, con independencia de la dirección de referencia involucrada en la optimización. Los índices de desempeño se han definido en base a la suma cuadrática del error de seguimiento, considerando un promedio sobre todas las posibles direcciones de referencia.

Tanto para sistemas altos como aumentados, se ha entregado una forma cerrada para el desempeño óptimo, en función del número de canales de salida, del tipo de referencia empleada y de la estructura de la planta. Los resultados obtenidos para estas estructuras han sido complementados con estudios sobre el comportamiento del costo óptimo en función del parámetro de referencia, concluyendo sobre su monotonicidad y convexidad, lo que ha permitido acotar dichos índices por funciones aproximadas. En el caso particular de las plantas aumentadas, se ha podido verificar que el índice de desempeño converge a resultados conocidos en la literatura cuando se consideran referencias tipo escalón.

Se ha incorporado a la discusión de este capítulo un caso adicional, el cual no tiene contraparte en los resultados presentados en el Capítulo 3. Con el propósito de incluir limitaciones en la velocidad de actuación, se ha desarrollado un índice de desempeño que incluye penalizaciones sobre las señales de control, cuyo valor óptimo ha sido presentado en una forma cerrada. El resultado obtenido permite apreciar una dependencia implícita para

el valor óptimo no sólo como función de los ceros de FNM del sistema aumentado, sino que también como una función de la matriz de penalización de las señales de control.

Empleando los índices de desempeño presentados en este capítulo, se han estudiado algunas de las propiedades que, intuitivamente, se esperan en sistemas aumentados. Se ha podido corroborar que, tanto los retardos de propagación como las limitaciones en el ancho de banda de los nuevos canales de control, empeoran el desempeño del sistema aumentado. Sin embargo, el límite de dicho empeoramiento está en el costo óptimo alcanzable por una planta alta sujeta a las mismas condiciones. Igualmente, se ha explorado una cota superior para las mejoras obtenidas al agregar nuevos canales de control, lo que permite presentar, de manera explícita, la dependencia de los beneficios con respecto a las dinámicas que relacionan estos nuevos canales de control con las salidas del sistema. A modo de ilustrar los resultados presentados en este capítulo, se ha incluido un ejemplo que estudia los efectos en el desempeño de un sistema cuando se agrega un nuevo canal de actuación.

Los resultados presentados en esta parte de la tesis servirán como base para el análisis que se presentará en el siguiente capítulo, donde se incluye un estudio exhaustivo de algunos casos de interés en sistemas aumentados.

ANÁLISIS DE CASOS

5.1. Introducción

En los capítulos precedentes se ha analizado el efecto de agregar canales de control a un sistema a través de diferentes perspectivas. El Capítulo 3 ha presentado resultados sobre las mejoras en el desempeño de sistemas aumentados, cuando el lazo cerrado de control está sujeto a perturbaciones de entrada tipo Delta de Kronecker. Por su parte, el Capítulo 4 ha permitido observar que el desempeño óptimo de un lazo de control, considerando referencias decrecientes en el tiempo, depende de los rasgos dinámicos de la planta, como lo son los ceros de FNM finitos e infinitos. En ambos casos se ha podido concluir que el desempeño de un sistema mejora cuando se consideran canales adicionales de control. Lo anterior coincide con la intuición pues, a mayor grados de libertad, mejor será el desempeño alcanzable.

Si bien los resultados presentados en los Capítulos 3 y 4 permiten analizar en forma separada las formas cerradas para el desempeño óptimo alcanzable por sistemas altos y aumentados, resulta complejo efectuar una cuantificación analítica de los beneficios obtenidos al modificar la estructura de una planta. En efecto, los Teoremas 3.1 en la página 28 y 3.3 en la página 38 entregan formas cerradas para el desempeño óptimo en la regulación de sistemas altos y aumentados, mientras que el Teorema 4.1 en la página 48 y el Corolario 4.1 en la página 55 extienden el estudio al desempeño óptimo de los mismos sistemas, pero considerando referencias decrecientes en el tiempo. No obstante, la estructura de los resultados es tal que la forma en que inciden los rasgos dinámicos de la planta sobre el costo óptimo no es trivial.

El presente capítulo ha sido motivado por el interés en cuantificar los beneficios de agregar canales de control adicionales a sistemas altos (o el detrimento de suprimir canales de control en sistemas cuadrados), a fin de establecer un punto de comparación respecto a los costos de instalación y operación de nuevos actuadores. Se debe enfatizar que, si bien esta tesis aborda el problema de sistemas aumentados, lo hace desde una perspectiva analítica, sin incluir el estudio económico de un proyecto de ampliación. Por lo mismo, resulta importante establecer un índice técnico que permita decidir si la decisión de aumentar el sistema se condice con los costos de implementación y mantención, determinando así la ejecución o rechazo del proyecto.

En particular, este capítulo se centra en un *estudio por casos*, esto es, se consideran es-

estructuras particulares, cuyas características permitirán concluir sobre aspectos particulares de los beneficios de agregar nuevos canales de control. El índice de desempeño empleado para efectuar estos estudios será el descrito en el Capítulo 4, debido a la simpleza de las formas cerradas obtenidas, en comparación con las desarrolladas para el problema de regulación. Los problemas estudiados contemplan analizar el efecto de los ceros de FNM finitos e infinitos, el efecto de las restricciones sobre el ancho de banda y el efecto de la adición de diferentes números de canales de control.

El resto del capítulo se organiza como sigue. La Sección 5.2 estudia el efecto de ceros de FNM sobre las mejoras en el desempeño; la Sección 5.3 estudia el efecto de las restricciones de ancho de banda sobre los beneficios en el desempeño; la Sección 5.4 discute un caso de estudio sobre los beneficios de agregar un número diferente de canales de control. Finalmente, la Sección 5.5 presenta un resumen y conclusiones.

5.2. Impacto de los ceros de FNM en el desempeño

Uno de los rasgos dinámicos de mayor relevancia sobre el desempeño óptimo de sistemas de control corresponde a los ceros de fase no mínima (FNM), ya que ellos imponen restricciones fundamentales sin importar el criterio de diseño empleado [3]. En el caso de sistemas de tiempo discreto, los ceros de FNM son aquellos que se encuentran ubicados fuera del disco unitario $|z| \leq 1$. Esto permite incluir a aquellos ceros relacionados con los retardos de propagación, los cuales, en sistemas de tiempo discreto, se manifiestan a través del grado relativo de la matriz de transferencia.

En esta sección se estudiarán tres casos particulares. La primera sección se centrará en sistemas aumentados, que sólo poseen un cero de FNM en infinito. La segunda parte de esta sección se centrará en el efecto de los ceros de FNM finitos que son agregados al aumentar el sistema alto original. Finalmente, en el tercer caso, se estudiará el efecto de los retardos de propagación en el desempeño de sistemas aumentados.

5.2.1. Impacto de los ceros de FNM de entrada en el desempeño óptimo

Un tipo de cero en sistemas multivariables corresponde a los *ceros de entrada* [65], denominados así debido a su relación con las direcciones de entrada de la planta. Debido a lo anterior, es posible relacionar este tipo de ceros con los canales de control del sistema. En el caso propuesto en esta sección, se estudia el efecto de agregar un nuevo canal de control a un sistema que posee un cero de FNM finito.

Ejemplo 5.1. *Considere un sistema alto $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 1}$ definido como*

$$\mathbf{G}_A[z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z-c}{z^2} \\ \frac{z-c}{z(z-0.3)} \end{bmatrix}, \quad (5.2.1)$$

con $c \in \mathbb{R}$, tal que $|c| > 1$. El sistema presentado en (5.2.1) posee dos ceros de fase no mínima (FNM): un cero finito en $z = c$ y 1 cero en infinito. A modo de mejorar su desempeño, se

propone incluir un segundo canal de control, lo cual permite aumentar el sistema a

$$\mathbf{G}_S [z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A [z] & \begin{matrix} \vdots \\ \frac{1}{z} \\ \vdots \\ \frac{1}{z-0.2} \end{matrix} \end{bmatrix}. \quad (5.2.2)$$

La planta $\mathbf{G}_S [z]$ dada en (5.2.2) conserva el cero de FNM ubicado en $z = c$, pero se aumenta el número de ceros en infinito a 2.

En base a resultados obtenidos para límites de desempeño en sistemas altos, cuando la referencia es definida como $\mathbf{r}[k] \triangleq (0.9)^k \boldsymbol{\nu}$, con $k \in \mathbb{N}_0$ y $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^2$, el costo óptimo asociado al control en lazo cerrado de $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$ ($n > m$) está dado por (ver Teorema 4.1 en la página 48)

$$J_A^{opt} = \frac{1}{1-0.9^2} \left(2 - \text{traza} \left\{ \mathbf{G}_{A_i} [0.9^{-1}] \mathbf{G}_{A_i} [0.9^{-1}]^T \right\} \right). \quad (5.2.3)$$

Por otro lado, cuando el sistema aumentado está definido según (5.2.2), su valor óptimo se encuentra dado por (ver Corolario 4.1 en la página 55)

$$J_S^{opt} = \frac{1}{1-0.9^2} \left(2 - \text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{I,dc} [0.9^{-1}] \mathbf{E}_{I,dc} [0.9^{-1}]^T \right\} \right). \quad (5.2.4)$$

Con el propósito de ilustrar los resultados obtenidos para el desempeño óptimo de cada sistema, se define

$$\Delta \triangleq \frac{J_A^{opt} - J_S^{opt}}{J_A^{opt}}. \quad (5.2.5)$$

Este índice permite medir, en términos relativos, los beneficios de agregar un nuevo canal de control al sistema. La Figura 5.1 presenta la evolución de Δ como función del cero de FNM c . Los resultados presentados permiten apreciar que el canal adicional es altamente beneficioso para fines de seguimiento de la referencia definida en este ejemplo. En particular, este ejemplo indica que, cuando el canal adicional no agrega ceros de FNM, el desempeño del lazo cerrado con el sistema aumentado mejora considerablemente, si se compara con los resultados obtenidos para el sistema alto en las mismas condiciones.

Se debe realizar una observación sobre el mínimo presente en la Figura 5.1. Este mínimo puede entenderse en términos de la referencia empleada y de la ubicación del cero de FNM. Cuando el cero de FNM es muy cercano a λ^{-1} , se produce, en promedio, una cancelación entre el modo natural asociado a la referencia y el reflejo estable del cero de FNM, el cual es empleado en el diseño óptimo entregado en el Teorema 4.1 en la página 55. (Se dice que es una cancelación en promedio pues el índice de desempeño definido toma un promedio entre todas las posibles direcciones de referencia, dentro de las cuales se incluyen aquellas que coinciden con la dirección del cero de FNM [6], [33].)

5.2.2. Impacto de los ceros de FNM de salida en el desempeño óptimo

Otra clase de ceros en sistemas multivariables son aquellos denominados como *ceros de salida*. En esta sección se analizará el efecto de dichos ceros de FNM sobre el desempeño del

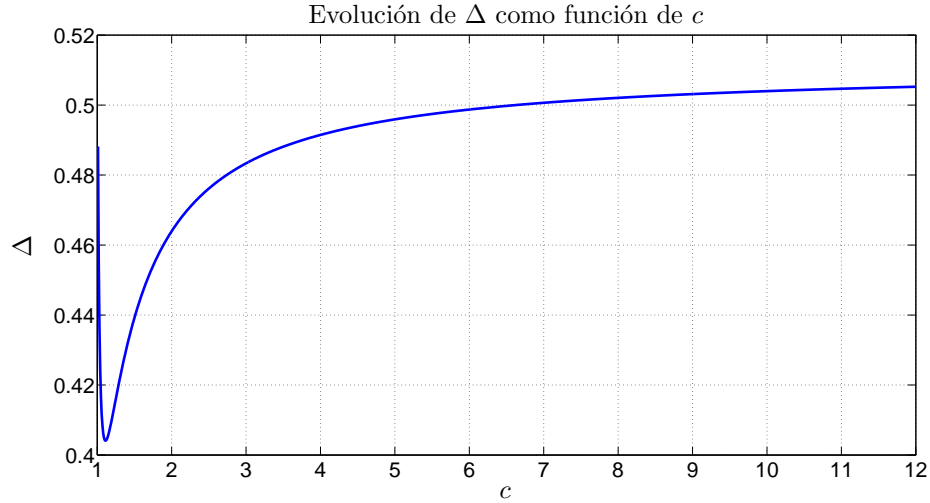


Figura 5.1. Evolución de Δ como función del cero de FNM c .

sistema. En particular, se estudiará el efecto de incluir un canal de actuación que incluya ceros de FNM que no están presentes en el sistema original.

Ejemplo 5.2. Considere un sistema alto $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 1}$ definido como

$$\mathbf{G}_A[z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z-c}{z^2} \\ \frac{z-0.1}{z(z-0.3)} \end{bmatrix}, \quad (5.2.6)$$

con $c \in \mathbb{R}$, tal que $|c| > 1$. El sistema presentado en (5.2.6) posee sólo 1 cero de fase no mínima (FNM) en infinito. A modo de mejorar su desempeño, se propone incluir un segundo canal de control, lo cual permite aumentar el sistema a

$$\mathbf{G}_S[z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z-c}{z(z-0.4)} \\ \mathbf{G}_A[z] \\ \frac{1}{z-0.2} \end{bmatrix}, \quad (5.2.7)$$

con $\mathbf{G}_A[z]$ definido según (5.2.6). La planta $\mathbf{G}_S[z]$ dada en (5.2.7) agrega dos ceros de FNM: 1 cero de FNM finito ubicado en $z = c$ y 1 cero de FNM en infinito. Tal como se puede apreciar, el canal adicional agrega un cero de FNM finito que no estaba presente en el sistema inicial $\mathbf{G}_A[z]$.

Bajo los mismos supuestos considerados en el ejemplo anterior, se define la referencia como $\mathbf{r}[k] \triangleq (0.9)^k \mathbf{v}$, donde $k \in \mathbb{N}_0$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. En base a las definiciones anteriores, el costo óptimo asociado al control en lazo cerrado de $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$ ($n > m$) está dado por (ver

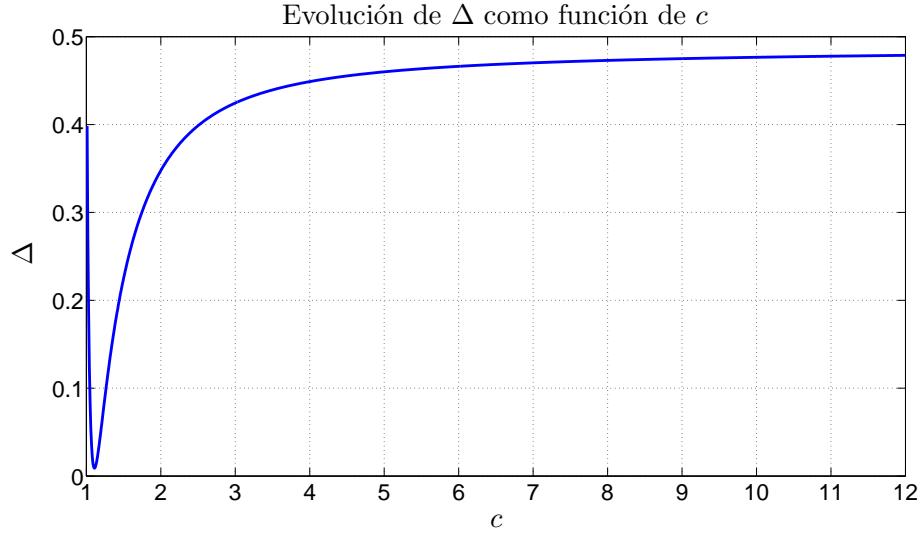


Figura 5.2. Evolución de Δ como función del cero de FNM c .

Teorema 4.1 en la página 48)

$$J_A^{opt} = \frac{1}{1 - 0.9^2} \left(2 - \text{traza} \left\{ \mathbf{G}_{Ai} [0.9^{-1}] \mathbf{G}_{Ai} [0.9^{-1}]^T \right\} \right). \quad (5.2.8)$$

Por otra parte, cuando el sistema aumentado está definido según (5.2.7), su valor óptimo se encuentra dado por (ver Corolario 4.1 en la página 55)

$$J_S^{opt} = \frac{1}{1 - 0.9^2} \left(2 - \text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{I,dc} [0.9^{-1}] \mathbf{E}_{I,dc} [0.9^{-1}]^T \right\} \right). \quad (5.2.9)$$

Para ilustrar los resultados obtenidos en este ejemplo, se define

$$\Delta \triangleq \frac{J_A^{opt} - J_S^{opt}}{J_A^{opt}}, \quad (5.2.10)$$

el cual coincide con la definición entregada en (5.2.5). La Figura 5.2 presenta la evolución de Δ como función del cero de FNM c . Los resultados obtenidos permiten concluir que, a pesar de que el nuevo canal agrega un cero de FNM finito, el desempeño del sistema en lazo cerrado mejora con la adición de esta nueva señal. Sin embargo, la mejora relativa del desempeño es menor a la obtenida en el ejemplo anterior. Si se comparan las Figuras 5.1 y 5.2, las mejoras relativas en el desempeño obtenidas por el sistema propuesto en (5.2.2) son mayores que las generadas por el sistema (5.2.7), para un mismo cero de FNM. Esto es consecuencia de los defectos agregados por el nuevo canal de control propuesto en este ejemplo. Aún más, el fenómeno descrito para $c = \lambda^{-1}$ se acentúa en este ejemplo, pues los beneficios de agregar un nuevo canal adicional son casi nulos para dicho caso.

Los resultados expuestos en este ejemplo coinciden con lo esperado en cierto modo, pues se obtendrán mayores beneficios en un sistema aumentado $\mathbf{G}_S[z]$ cuando mejor sea la calidad de las dinámicas que relacionan las nuevas señales de control con las respuestas del

sistema, i.e., si no agregan ceros de FNM finitos y la cantidad de ceros de FNM en infinito que agregan al sistema es pequeña.

5.2.3. Impacto de los retardos en el desempeño óptimo

En algunas ocasiones, puede ocurrir que los nuevos canales de control posean defectos, los cuales pueden ser de naturaleza estocástica (e.g., pérdida de datos, limitaciones en la relación señal a ruido, entre otros [19], [20], [21], [22], [23]), o determinística, siendo este último tipo de defectos el centro de estudio de la presente tesis. Uno de los defectos determinísticos considerados en esta tesis corresponde a los retardos de propagación, los cuales ocasionan un empeoramiento en el desempeño del lazo cerrado, tal como se ha estudiado en los Capítulos 3 y 4. En esta sección se analiza el efecto de retardos de propagación en los canales de control, lo que es estudiado mediante un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 5.3. Considere el sistema alto $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 1}$ definido como

$$\mathbf{G}_A [z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z - 0.1}{z^2} \\ \frac{z - 0.1}{z(z - 0.3)} \end{bmatrix}. \quad (5.2.11)$$

El sistema presentado en (5.2.11) sólo posee 1 cero de fase no mínima (FNM) en infinito. A modo de mejorar su desempeño, se propone incluir un segundo canal de control, lo cual permite aumentar el sistema a

$$\mathbf{G}_S [z] \triangleq \left[\begin{array}{c} \mathbf{G}_A [z] \\ \hline \frac{z - 0.6}{z^d (z - 0.4)} \\ \frac{1}{z^{(d-1)} (z - 0.2)} \end{array} \right], \quad (5.2.12)$$

con $d \in \mathbb{N}$. La planta $\mathbf{G}_S [z]$ definida en (5.2.12) agrega d ceros de FNM en infinito. El parámetro d permitirá incluir en la estructura de $\mathbf{G}_S [z]$ el efecto de los retardos de propagación en los nuevos canales de actuación.

Con el propósito de mantener el marco de trabajo de los ejemplos anteriores, los supuestos realizados en este ejemplo son los mismos, i.e., se define la referencia como $\mathbf{r} [k] \triangleq (0.9)^k \boldsymbol{\nu}$, donde $k \in \mathbb{N}_0$ y $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^2$. En base a las definiciones anteriores, el costo óptimo asociado al control en lazo cerrado de $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$ ($n > m$) está dado por (ver Teorema 4.1 en la página 48)

$$J_A^{opt} = \frac{1}{1 - 0.9^2} \left(2 - \text{traza} \left\{ \mathbf{G}_{A_i} [0.9^{-1}] \mathbf{G}_{A_i} [0.9^{-1}]^T \right\} \right) = 6.29. \quad (5.2.13)$$

Por otra parte, cuando el sistema aumentado está definido según (5.2.12), su valor óptimo se encuentra dado por (ver Corolario 4.1 en la página 55)

$$J_S^{opt} = \frac{1}{1 - 0.9^2} \left(2 - \text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{I, dc} [0.9^{-1}] \mathbf{E}_{I, dc} [0.9^{-1}]^T \right\} \right). \quad (5.2.14)$$

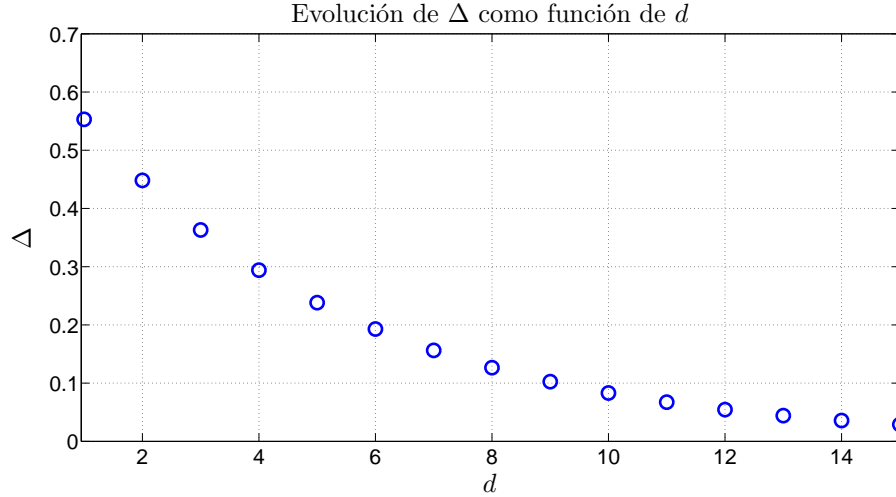


Figura 5.3. Evolución de Δ en función del número de retardos d .

Dado que (5.2.14) es una función del número de retardos d , se presenta en la Figura 5.3 el comportamiento de Δ como función del número de retardos de propagación, donde

$$\Delta \triangleq \frac{J_A^{\text{opt}} - J_S^{\text{opt}}}{J_A^{\text{opt}}}. \quad (5.2.15)$$

El gráfico permite apreciar claramente que el desempeño del sistema aumentado empeora a medida que el número de retardos aumenta, por lo que el beneficio entregado al lazo cerrado debido a la adición de estos nuevos canales disminuye cuando se incrementa d .

Otro aspecto relevante que es necesario mencionar es el valor al cual tiende J_S^{opt} cuando $d \rightarrow \infty$. Tal como se aprecia en la Figura 5.3, para valores muy grandes de d , el costo óptimo J_S^{opt} tiende al valor obtenido para J_A^{opt} , i.e., el impacto logrado en el desempeño de un sistema debido a la adición de nuevos canales es insignificante, cuando los retardos asociados a estos canales son muy elevados. De esta manera, el resultado presentado en este ejemplo respalda el Teorema 4.8 en la página 66.

En conclusión, este ejemplo permite apreciar que los retardos de propagación en los canales adicionales limitan las mejoras en el desempeño, por lo que las estructuras aumentadas pueden alcanzar un desempeño muy cercano al presentado para las estructuras altas.

5.3. Impacto de las restricciones de ancho de banda en el desempeño

Tal como se mencionó en la sección anterior, los canales adicionales pueden contener defectos determinísticos. El caso estudiado en la Sección 5.2.3 permite observar el impacto de los retardos de propagación en el desempeño del sistema aumentado, cuando éstos son considerados como defectos de los nuevos canales de actuación. Al igual que los retardos, las restricciones sobre la velocidad de actuación constituyen un tipo de defecto de naturaleza determinística, los cuales pueden incluirse como parte del problema de optimización.

Las limitaciones en la velocidad de actuación tienen una estrecha relación con el ancho de banda del canal de control. Esta limitación en ancho de banda puede ser impuesta por diversos motivos, los cuales van desde limitaciones propias del canal de comunicación, hasta restricciones impuestas por el actuador utilizado para manipular al sistema.

Tal como se presentó en el Capítulo 4, una manera de incluir esta restricción es mediante la ponderación de la señal de control, utilizando para ello un filtro que penaliza la respuesta en frecuencia del sistema.

Esta sección estudia el efecto de las restricciones de ancho de banda sobre el desempeño del sistema aumentado, considerando para ello dos casos de análisis. El primer caso de estudio analiza el efecto en el desempeño debido a la elección del filtro de penalización $F[z]$, definido en la expresión (4.5.35) del Capítulo 4, en tanto que el segundo caso estudia el impacto del filtro $\mathbf{N}[z]$ sobre el desempeño del sistema aumentado.

5.3.1. Impacto del filtro de penalización en el desempeño óptimo

Una de las características del problema planteado en la Sección 4.5 del Capítulo 4 es la posibilidad de elección del filtro $F[z] \in \mathcal{RH}_\infty$, el cual penaliza la respuesta en frecuencia de los nuevos canales de control, de acuerdo la definición entregada en (4.5.35).

Para analizar el efecto de la penalización sobre los niveles de control en los nuevos canales de actuación, considere una partición para el parámetro de diseño óptimo del problema planteado en la Sección 4.5:

$$\mathbf{Q}^{\text{opt}}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A^{\text{opt}}[z] \\ \hline \mathbf{Q}_N^{\text{opt}}[z] \end{bmatrix}, \quad (5.3.1)$$

donde $\mathbf{Q}^{\text{opt}}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ es el parámetro de diseño óptimo que resuelve el problema de optimización con restricciones, en tanto que $\mathbf{Q}_A^{\text{opt}}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$ y $\mathbf{Q}_N^{\text{opt}}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{(n-m) \times n}$ corresponden a las particiones que manipulan los primeros m y los nuevos $n - m$ canales de control, respectivamente. La definición del filtro $\mathbf{N}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$, en (4.5.35), permite penalizar la respuesta en frecuencia del parámetro $\mathbf{Q}_N^{\text{opt}}[z]$. En consecuencia, la elección del filtro $F[z]$ afecta la respuesta en frecuencia de cada término escalar de $\mathbf{Q}_N^{\text{opt}}[z]$, siendo importante para reflejar de manera correcta las restricciones de ancho de banda sobre los nuevos canales de control.

Para observar el efecto de la elección del filtro $F[z]$ sobre la respuesta en frecuencia de los parámetros de diseño, se presenta en el Apéndice C un ejemplo ilustrativo aplicado a una planta de dos salidas y una entrada. En esta sección consideramos una estructura fija para $F[z]$.

5.3.2. Impacto de la restricción de ancho de banda en el desempeño óptimo

La definición del problema de optimización propuesta en la Sección 4.5 ha sido pensada con el objeto de estudiar los fenómenos asociados a sistemas aumentados que poseen un ancho de banda limitado en sus nuevos canales de actuación. Debido a la complejidad de la forma cerrada obtenida para el costo óptimo $J_{S,r}^{\text{opt}}$, se introduce a continuación un análisis numérico del impacto del ancho de banda en el desempeño de un sistema aumentado.

Ejemplo 5.4. Considere un sistema alto $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 1}$ dado por

$$\mathbf{G}_A [z] = \begin{bmatrix} \frac{z - c}{z^2} \\ \frac{z - c}{z(z - 0.3)} \end{bmatrix}, \quad (5.3.2)$$

con $c \in \mathbb{R}$, tal que $|c| > 1$. El sistema presentado en (5.3.2) posee dos ceros de fase no mínima (FNM): un cero finito en $z = c$ y 1 cero en infinito. A modo de mejorar su desempeño, se propone incluir un segundo canal de control, lo cual permite aumentar el sistema a

$$\mathbf{G}_S [z] = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A [z] & \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{1}{z} \\ \vdots \\ \frac{1}{z - 0.2} \end{array} \end{bmatrix}. \quad (5.3.3)$$

La planta $\mathbf{G}_S [z]$ definida en (5.3.3) conserva el cero de FNM ubicado en $z = c$, pero se aumenta el número de ceros en infinito a 2. Considere que la matriz de ponderación está dada por

$$\mathbf{N} [z] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} F [z], \quad (5.3.4)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $F [z]$ definido como

$$F [z] \triangleq \frac{1.95(z - 1)}{z + 0.95}. \quad (5.3.5)$$

El filtro (5.3.5) tiene una característica pasa-altos, con ganancia nula a frecuencia cero.

El problema es entonces determinar el valor óptimo $J_{S,r}^{opt}$ cuando la referencia está definida como $\mathbf{r} [k] \triangleq (0.9)^k \boldsymbol{\nu}$, donde $k \in \mathbb{N}_0$ y $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^2$.

En base al problema propuesto, interesa estudiar el comportamiento de $J_{S,r}^{opt}$ como función del parámetro de restricción α . Para ello, se propone el estudio de los sistemas $\mathbf{G}_A [z]$ y $\mathbf{G}_S [z]$ para diferentes valores de α .

La Figura 5.4 presenta la evolución de $J_{S,r}^{opt}$ en función de α , cuando el cero de FNM finito está ubicado en $c = 1.01$. Como se puede apreciar en la Figura, el desempeño del sistema aumentado tiene una cota inferior cuando $\alpha = 0$, la cual está dada por $J_S^{opt} = 3.90$, correspondiente al valor del desempeño óptimo cuando no se consideran restricciones sobre los canales adicionales.

Por otro lado, cuando $\alpha \rightarrow \infty$, el desempeño óptimo $J_{S,r}^{opt}$ tiende al costo óptimo $J_A^{opt} = 7.63$, correspondiente al desempeño óptimo de la planta $\mathbf{G}_A [z]$. Los resultados presentados en este ejemplo coinciden con las expresiones reportadas en el Capítulo 4 y con ideas intuitivas respecto al problema. En términos prácticos, la idea de $\alpha \rightarrow \infty$ está relacionado con restricciones fuertes sobre la velocidad con la que es posible manipular los nuevos actuadores. En la medida que estas restricciones son cada vez más altas, menor es la posibilidad de mejorar el desempeño a través de estos nuevos canales de control. En consecuencia, el desempeño óptimo sólo puede tender al costo óptimo del sistema alto J_A^{opt} .

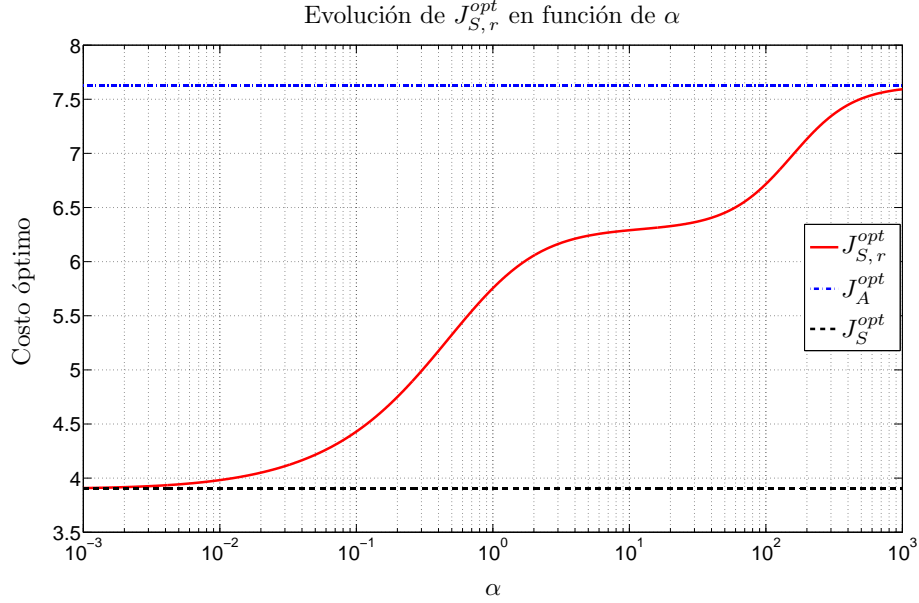


Figura 5.4. Evolución de $J_{S,r}^{opt}$ en función del parámetro de restricción α , cuando $c = 1.01$.

Un aspecto que es interesante destacar es el hecho de que el desempeño $J_{S,r}^{opt}$ es cercano a J_A^{opt} para valores elevados de α . Si bien este resultado es consistente con el Teorema 4.7 en la página 65, también evidencia que las dinámicas asociadas al nuevo canal de actuación permiten obtener mejoras en el desempeño, aún cuando el nuevo canal posea una restricción elevada (vea, e.g., el valor de $J_{S,r}^{opt}$ para $\alpha = 10$). Esto último se debe a que el nuevo canal de control no agrega defectos a la planta, salvo un cero en infinito.

5.4. Impacto del número de canales de control en el desempeño

En esta última sección se analizará el impacto de agregar un número diferente de canales de control, i.e., dada una planta $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$, $n > m$, se analizará el efecto de aumentar su estructura mediante la adición de k canales de control, obteniéndose así $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times (m+k)}$, donde $k \leq n - m$.

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra los beneficios de agregar un número diferente de canales de control.

Ejemplo 5.5. Considere un sistema alto $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{3 \times 1}$ definido como

$$\mathbf{G}_A[z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z - 1.7}{z(z - 0.3)} \\ \frac{z - 1.7}{(z - 0.5)(z - 0.8)} \\ \frac{z - 1.7}{(z - 0.3)(z - 0.2)} \end{bmatrix}, \quad (5.4.1)$$

el cual posee un cero de fase no mínima en infinito y un cero de fase no mínima ubicado en $z = 1.7$. Dado los costos asociados a agregar canales de control, se propone aumentar el sistema a $\mathbf{G}_{S,1}[z] \in \mathcal{RH}_2^{3 \times 2}$, el cual es definido como

$$\mathbf{G}_{S,1}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{z} \\ \frac{2}{z - 0.4} \\ \frac{5}{z - 0.7} \end{bmatrix} \mathbf{G}_A[z]. \quad (5.4.2)$$

El nuevo canal incluido en $\mathbf{G}_{S,1}[z]$ sólo agrega un cero de fase no mínima en infinito al sistema aumentado, preservando los ceros de fase no mínima de $\mathbf{G}_A[z]$. Para penalizar el control efectuado por el nuevo canal, se define la matriz de ponderación $\mathbf{N}[z]$ como

$$\mathbf{N}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F[z], \quad (5.4.3)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $F[z]$ definido según

$$F[z] \triangleq \frac{z - 1}{z}. \quad (5.4.4)$$

Una segunda opción para mejorar el desempeño del sistema $\mathbf{G}_A[z]$ es considerar que se dispone de recursos suficientes para agregar dos canales de control a la planta, lo cual permitirá obtener una segunda matriz de transferencia aumentada $\mathbf{G}_{S,2}[z]$, definida como

$$\mathbf{G}_{S,2}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & & \frac{1}{z} \\ \frac{2}{z - 0.4} & \mathbf{G}_A[z] & \frac{1}{z - 0.2} \\ \frac{5}{z - 0.7} & & \frac{3}{z - 0.6} \end{bmatrix}, \quad (5.4.5)$$

la cual posee tres ceros de fase no mínima en infinito y un cero de fase no mínima ubicado en $z = 1.7$, el cual se hereda de la estructura inicial $\mathbf{G}_A[z]$. En este caso, la matriz de

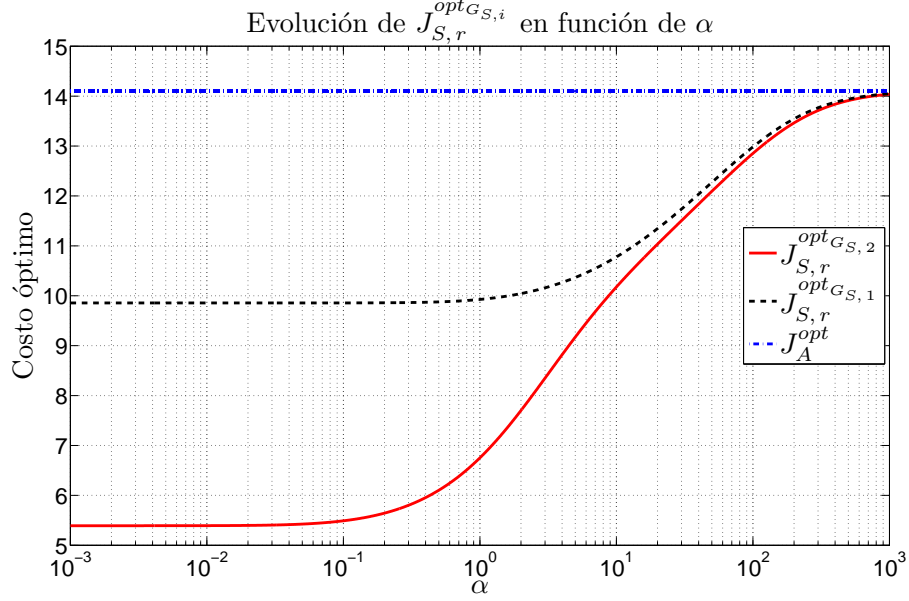


Figura 5.5. Evolución de los costos óptimos $J_{S,r}^{opt_{G_{S,1}}}$ y $J_{S,r}^{opt_{G_{S,2}}}$ como función del parámetro α .

penalización $\mathbf{N}[z]$ debe ser definida como

$$\mathbf{N}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} F[z], \quad (5.4.6)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $F[z]$ definido como (5.4.4).

Empleando los resultados expuestos en el Capítulo 4, se procede a comparar los desempeños obtenidos para cada uno de los sistemas aumentados, con el desempeño alcanzado por el sistema alto $\mathbf{G}_A[z]$. Para la planta $\mathbf{G}_A[z]$ definida según (5.4.1), el desempeño óptimo alcanzable sin restricciones sobre la actuación está dado por

$$J_A^{opt} = 14.099. \quad (5.4.7)$$

La Figura 5.5 presenta la evolución de los costos óptimos asociados a los sistemas $\mathbf{G}_{S,1}[z]$ y $\mathbf{G}_{S,2}[z]$ como función del parámetro α . En dicha figura se puede apreciar que, para un mismo valor de α , el desempeño óptimo del sistema $\mathbf{G}_{S,2}[z]$, definido como $J_{S,r}^{opt_{G_{S,2}}}$, es mejor que el alcanzado por el sistema $\mathbf{G}_{S,1}[z]$, el cual se define como $J_{S,r}^{opt_{G_{S,1}}}$. Estos resultados concuerdan con lo esperado en la práctica, pues el desempeño de un sistema alto aumentado debiese mejorar cuando se dispone de un mayor número de señales de control.

Por otro lado, se puede observar que el desempeño de los sistemas aumentados empeora en la medida que el parámetro de restricción aumenta en magnitud, tendiendo al valor J_A^{opt} para valores muy elevados. Este resultado también concuerda con lo esperado en la práctica,

pues aumentar la magnitud del parámetro α , implica reducir el ancho de banda de los nuevos canales de control, lo que lleva a que se pierdan los grados de libertad adicionales para valores muy grandes del parámetro de restricción α . Para tales casos, el desempeño óptimo $J_{S,r}^{opt_{G_S,i}}$ se reduce al costo óptimo conseguido por la planta alta $\mathbf{G}_A[z]$, $\forall i \in \{1, 2\}$.

En conclusión, un mayor número de grados de libertad para fines de control siempre será beneficioso para el lazo cerrado, pues se disponen de un mayor conjunto de señales que permitan ajustar las salidas del sistema a valores prescritos por la referencia.

5.5. Resumen

El presente capítulo ha desarrollado un análisis de casos para el estudio cuantitativo de los beneficios generados en un lazo de control, cuando se introducen nuevos canales de actuación. Con el propósito de simplificar el estudio, se han empleado las formas cerradas para el desempeño óptimo de seguimiento en sistemas aumentados, presentados en el Capítulo 4. Los casos han sido particularizados y ejemplificados, de modo de obtener conclusiones sobre el impacto de los rasgos dinámicos de la planta aumentada en las mejoras en el desempeño óptimo. Así, se ha explorado el impacto de los ceros de FNM en el costo óptimo obtenido en el sistema aumentado, observando que los beneficios son menores cuando los nuevos canales de actuación agregan ceros de FNM finitos que no están presentes en la planta inicial. También se ha observado que, a medida que aumenta el número de retardos de propagación en los nuevos canales de control, menores son los beneficios obtenidos en el desempeño óptimo, tendiendo en forma natural al valor óptimo de la planta inicial, i.e., se ignora la presencia de los nuevos canales de control a medida que los retardos de propagación son mayores.

Se ha analizado el impacto de las restricciones de ancho de banda sobre el desempeño óptimo del sistema aumentado, observando en forma separada el impacto de la elección del filtro de penalización y el efecto producido por las restricciones de ancho de banda, mediante la variación de la constante de restricción. Por otro lado, el aumento progresivo de las restricciones de ancho de banda para un mismo sistema aumentado, lleva a que el desempeño óptimo se aleje cada vez más del valor óptimo para sistemas aumentados con canales perfectos, y converja al obtenido con el sistema inicial sin los canales adicionales. En consecuencia, el desempeño óptimo de un sistema aumentado con limitaciones estará siempre entre los costos óptimos antes descritos.

Finalmente, se ha estudiado el impacto del número de canales de actuación adicionales en el desempeño óptimo del sistema. A partir del ejemplo propuesto, se ha observado que los beneficios obtenidos son mayores en la medida que se aumenta el número de canales de control. Sin embargo, cuando las restricciones sobre el ancho de banda de los canales adicionales son muy elevadas, entonces los costos óptimos de los sistemas aumentados tienden al valor óptimo del sistema sin canales adicionales, sin importar el número de actuadores que se agregue a la planta. Esto permite concluir que, cuando las restricciones de ancho de banda son muy elevadas, los beneficios de agregar un número mayor o menor de actuadores es similar, por lo que la implementación en tales condiciones debe ser efectuada para un actuador, a fin de minimizar costos de instalación y mantenimiento.

CONCLUSIONES

Esta tesis ha estudiado el tópico de límites de desempeño en sistemas multivariables de tiempo discreto, lineales e invariantes en el tiempo, cuando se consideran estructuras aumentadas, i.e., cuando un sistema es modificado mediante la adición de nuevos actuadores. En el caso de este documento, los sistemas aumentados se obtienen de agregar nuevos canales de control a sistemas altos, en donde el número de entradas es menor al número de salidas. Los resultados son aplicables también en sentido inverso: cuando en una planta multivariable dada se suprimen canales de actuación.

Uno de los problemas analizados en esta tesis ha sido la medición de los beneficios de agregar nuevos canales de control. El estudio realizado en este campo ha dado lugar a dos índices de desempeño que permiten realizar comparaciones justas entre sistemas altos y aumentados. El primer índice de desempeño propuesto ha sido la suma cuadrática del error de seguimiento, cuando el lazo cerrado de control está sujeto a una perturbación de entrada tipo delta de Kronecker. La naturaleza de la señal de perturbación permite garantizar la convergencia del índice de desempeño a un valor finito, tanto para plantas altas como cuadradas. Lo último permite garantizar una correcta cuantificación de los beneficios de agregar canales de control a un sistema. El segundo índice de desempeño propuesto en esta tesis corresponde igualmente a una suma del error cuadrático de seguimiento. Sin embargo, la medición de desempeño se realiza considerando una señal de referencia decreciente en el tiempo. La naturaleza de la señal permite la convergencia del funcional de costo tanto para plantas altas como cuadradas, con independencia de la dirección de referencia empleada, lo cual distingue este resultado de los existentes en la literatura.

El estudio, realizado en el contexto de desempeño óptimo de regulación en sistemas aumentados, ha permitido obtener expresiones cerradas, válidas tanto para plantas altas como cuadradas. En este caso, se ha podido incorporar a la discusión plantas tanto estables como inestables. Los resultados obtenidos reflejan una dependencia implícita del desempeño óptimo en función de los ceros de fase no mínima de la planta, tanto finitos como infinitos, ponderados por funciones dependientes de la estructura de la planta. Se han aplicado los resultados al análisis del desempeño de un sistema aumentado, concluyendo que los beneficios de agregar nuevos canales de actuación varían de acuerdo a la ubicación de los ceros de FNM del sistema aumentado.

Por su parte, la investigación desarrollada en el área de desempeño óptimo en seguimiento ha dado lugar a expresiones cerradas, válidas tanto para plantas altas como plantas cuadradas estables. Esto posibilita su uso para la cuantificación de beneficios al agregar

nuevos canales de control. Las formas cerradas permiten observar una dependencia implícita entre el costo óptimo y ciertos rasgos estructurales de la planta, como son los ceros de FNM finitos e infinitos. En este caso, la formulación del problema y los resultados óptimos obtenidos permiten concluir acerca del comportamiento del desempeño óptimo en sistemas aumentados. De esta manera se ha podido concluir acerca del comportamiento asintótico del desempeño en sistemas aumentados, cuando se consideran defectos determinísticos en los canales de control, e.g., retardos y limitaciones en ancho de banda. Los resultados obtenidos para tales casos demuestran que el desempeño óptimo de un sistema aumentado no puede empeorar más allá del obtenido para el sistema inicial, ignorándose los nuevos canales de control si éstos son muy defectuosos. Sin embargo, también se ha demostrado que la adición de canales puede generar beneficios muy pequeños, cuando las limitaciones de esos canales son muy grandes. Asintóticamente, la mejoría en desempeño puede ser nula.

En base a los resultados obtenidos para el desempeño en el seguimiento de referencias decrecientes en el tiempo, se ha procedido a efectuar un estudio de casos, con el propósito de entregar una cuantificación de los beneficios obtenidos cuando se agregan nuevos actuadores a un sistema. Los casos estudiados fueron separados acorde a las características analizadas. De esta manera, se ha podido observar que los beneficios obtenidos de un sistema aumentado son mayores cuando los nuevos canales de actuación no agregan defectos a la matriz de transferencia. Por otro lado, se ha estudiado el efecto de los retardos de propagación sobre los nuevos canales de control, concluyendo que, a medida que los retardos aumentan, menor es el beneficio obtenido por la instalación de dichos actuadores, llegando a ser nula si los retardos son lo suficientemente grandes. Con el propósito de estudiar el impacto de restricciones de ancho de banda, se han incluido casos que ejemplifican el uso de dichas restricciones y los resultados óptimos obtenidos. En tales casos, se ha concluido que el desempeño óptimo del sistema aumentado con defectos siempre se encontrará acotado inferiormente por el desempeño del sistema con canales perfectos, y superiormente por el desempeño del sistema inicial. Finalmente, se ha estudiado el impacto del número de canales de control adicionales sobre el desempeño de un sistema, observando que los beneficios son mayores en la medida que se agregan un mayor número de canales de actuación.

Los resultados presentados en esta tesis permiten dar una primera respuesta a las interrogantes planteadas en la introducción de este documento, y no constituyen una solución definitiva. Este campo de estudio da lugar a un gran número de interrogantes, tanto prácticas como teóricas, que son interesantes de resolver.

6.1. Trabajo futuro

Como trabajo futuro ligado a la presente tesis se puede mencionar:

- Extender los resultados del Capítulo 4 al caso de plantas inestables.
- Análisis de problemas de optimización que permitan incorporar restricciones sobre un subconjunto de canales de salida, e.g., forzar que un subconjunto de respuestas de lazo cerrado consigan seguimiento perfecto en estado estacionario a referencia escalón, mientras que las restantes sigan lo mejor posible a referencias decrecientes en el tiempo.

-
- Incluir en el t3pico de sistemas aumentados aquellos cuyos canales posean defectos de naturaleza estoc3stica, e.g., canales con p3rdida de datos o con limitaciones en su relaci3n se3al a ruido.
 - Estudio del mismo problema de esta tesis, pero considerando referencias y perturbaciones sinusoidales de frecuencia conocida.

APÉNDICE A

A.1. Cálculo de residuos de los Teoremas del Capítulo 3

En el Capítulo 3 se han presentado un par de Teoremas que expresan el desempeño óptimo de sistemas altos y aumentados, sujeto a una perturbación de entrada tipo delta de Kronecker. En particular, los Teoremas 3.2 en la página 32 y 3.3 en la página 38 entregan formas cerradas para el costo óptimo de regulación en sistemas SIMO y plantas aumentadas, respectivamente. Su demostración requiere de un extenso cálculo de los residuos¹ de las integrales de línea (3.3.41) y (3.4.27). Este apéndice se enfoca en el cálculo riguroso de dichas integrales. Antes de proseguir, es necesario introducir notación relativa a los residuos. Se denotará como $\text{Res}_{z=c} \{\mathbf{F}[z]\}$ el residuo en $c \in \mathbb{C}$ de una función $\mathbf{F}[z] \in \mathcal{L}_2^{n \times m}$.

Dada la complejidad del cálculo directo de los residuos de las integrales (3.3.41) y (3.4.27), se introduce a continuación un Lema que permite simplificar su obtención.

Lema A.1 (Cálculo de residuos, [59]). *Considere una función de transferencia*

$$H[z] \triangleq \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i}{\prod_{i=1}^{n_p} (z - p_i)^{n_i}}. \quad (\text{A.1.1})$$

Si $H[z]$ es expandido en su descomposición en fracciones parciales

$$\begin{aligned} H[z] = & \frac{\gamma_1^{(1)}}{(z - p_1)} + \frac{\gamma_1^{(2)}}{(z - p_1)^2} + \dots + \frac{\gamma_1^{(n_1)}}{(z - p_1)^{n_1}} + \dots \\ & + \frac{\gamma_{n_p}^{(1)}}{(z - p_{n_p})} + \frac{\gamma_{n_p}^{(2)}}{(z - p_{n_p})^2} + \dots + \frac{\gamma_{n_p}^{(n_{n_p})}}{(z - p_{n_p})^{n_{n_p}}}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

entonces

$$\sum_{l=1}^{n_p} \gamma_l^{(1)} = b_{n-1}. \quad (\text{A.1.3})$$

El Lema A.1 permite calcular en forma directa los residuos de una función de transferencia a través del coeficiente asociado a la potencia $n - 1$ en el numerador de dicha función. Si bien este resultado ha sido presentado para el caso escalar, puede ser empleado, *mutatis*

¹Para un mayor detalle sobre el Teorema de Residuos de Cauchy, se invita al lector a revisar textos de variable compleja, e.g., [43].

mutandis, en el caso multivariable, considerando que los coeficientes $\gamma_i^{(j)}$ introducidos en el Lema A.1 ahora son matriciales.

En base al contexto antes mencionado, se procede a presentar el cálculo riguroso de los residuos asociados a las integrales (3.3.41) y (3.4.27).

A.1.1. Cálculo de los residuos asociados a la integral del Teorema 3.2

Considere la integral de línea (3.3.41), presentada en el Teorema 3.2 en la página 32 del Capítulo 3

$$J_A^{opt} = \frac{1}{2\pi j} \oint (\mathbf{R}[z] + \mathbf{M}_1[z] - \mathbf{M}_1[0])^\sim (\mathbf{R}[z] + \mathbf{M}_1[z] - \mathbf{M}_1[0]) \frac{dz}{z}, \quad (\text{A.1.4})$$

con

$$\mathbf{R}[z] = \prod_{i=1}^{n_c} \frac{1 - z \bar{c}_i}{z - c_i} \sum_{i=0}^{n_z-1} \alpha_i z^{n_z-i}, \quad (\text{A.1.5})$$

$$\mathbf{M}_1[z] = \sum_{j=1}^{n_c} \left\{ m_j \frac{1 - z \bar{c}_j}{z - c_j} \sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i c_j^{n_z-i} \right\}. \quad (\text{A.1.6})$$

La expresión (A.1.4) depende únicamente de los residuos encerrados por la curva $|z| = 1$. Dado que la curva se recorre en sentido contrarreloj, entonces los residuos asociados son aquellos que se encuentran dentro de la región $|z| < 1$. El número total de productos cruzados en la integral (A.1.4) es 9, los cuales son calculados a continuación a través del uso del Lema A.1²:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R}[z^{-1}]^T \mathbf{R}[z] \frac{dz}{z} = \sum_{i=0}^{n_z-1} \alpha_i^2, \quad (\text{A.1.7})$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R}[z^{-1}]^T \mathbf{M}_1[z] \frac{dz}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{R}[z^{-1}]^T \mathbf{M}_1[z] - \sum_{h=1}^{n_c} \text{Res}_{z=c_h} \left\{ \mathbf{R}[z^{-1}]^T \mathbf{M}_1[z] \frac{1}{z} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R}[z^{-1}]^T \mathbf{M}_1[0] \frac{dz}{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{R}[z^{-1}]^T \mathbf{M}_1[0] = 0, \quad (\text{A.1.9})$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{M}_1[z^{-1}]^T \mathbf{R}[z] \frac{dz}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{M}_1[z^{-1}]^T \mathbf{R}[z] = 0, \quad (\text{A.1.10})$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{M}_1[z^{-1}]^T \mathbf{M}_1[z] \frac{dz}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{M}_1[z^{-1}]^T \mathbf{M}_1[z] - \sum_{h=1}^{n_c} \text{Res}_{z=c_h} \left\{ \mathbf{M}_1[z^{-1}]^T \mathbf{M}_1[z] \frac{1}{z} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.11})$$

$$\gamma_6 = \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{M}_1[z^{-1}]^T \mathbf{M}_1[0] \frac{dz}{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{M}_1[z^{-1}]^T \mathbf{M}_1[0], \quad (\text{A.1.12})$$

²Dado que $\mathbf{R}[z]$ y $\mathbf{M}_1[z]$ son funciones reales racionales en la variable compleja z , entonces se satisface $\mathbf{R}[z]^\sim = \mathbf{R}[z^{-1}]^T$ y $\mathbf{M}_1[z]^\sim = \mathbf{M}_1[z^{-1}]^T$.

$$\gamma_7 = \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{M}_1 [0]^T \mathbf{R} [z] \frac{dz}{z} = 0, \quad (\text{A.1.13})$$

$$\gamma_8 = \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{M}_1 [0]^T \mathbf{M}_1 [z] \frac{dz}{z} = \mathbf{M}_1 [0]^T \mathbf{M}_1 [0], \quad (\text{A.1.14})$$

$$\gamma_9 = \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{M}_1 [0]^T \mathbf{M}_1 [0] \frac{dz}{z} = \mathbf{M}_1 [0]^T \mathbf{M}_1 [0]. \quad (\text{A.1.15})$$

De las expresiones (A.1.7)-(A.1.15) se puede observar que

$$J_A^{opt} = \gamma_1 + \gamma_5 - \gamma_6 - \gamma_8 + \gamma_9, \quad (\text{A.1.16})$$

donde $\gamma_9 - \gamma_8 = 0$, y

$$\gamma_5 - \gamma_6 = \sum_{h=1}^{n_c} \sum_{l=1}^{n_c} \left\{ m_h m_l \frac{(|c_h|^2 - 1)(|c_l|^2 - 1)}{c_h c_l - 1} \times \sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i c_h^{n_z-i-1} \sum_{j=n_z}^{\infty} \alpha_j c_l^{n_z-j-1} \right\}, \quad (\text{A.1.17})$$

lo que permite demostrar el costo óptimo J_A^{opt} entregado en el Teorema 3.2 en la página 32.

A.1.2. Cálculo de los residuos asociados a la integral del Teorema 3.3

Considere la integral de línea (3.4.27), presentada en el Teorema 3.3 en la página 38 del Capítulo 3

$$J_S^{opt} = \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint (\mathbf{H} [z] + \mathbf{R}_1 [z] - \mathbf{R}_1 [0])^{\sim} (\mathbf{H} [z] + \mathbf{R}_1 [z] - \mathbf{R}_1 [0]) \frac{dz}{z} \right\}, \quad (\text{A.1.18})$$

donde

$$\mathbf{H} [z] = \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{c}} [z]^{-1} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j z^{i-j}, \quad (\text{A.1.19})$$

$$\mathbf{R}_1 [z] = \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_k}{z - c_k}. \quad (\text{A.1.20})$$

Al igual que la sección anterior, el valor de la integral presentada en (A.1.18) depende sólo de los residuos dentro de la región $|z| < 1$, pues la curva considerada en la integral es $|z| = 1$, recorrida en sentido contrarreloj. El número total de productos cruzados en la integral (A.1.18) es 9, los cuales son calculados a continuación mediante el uso del Lema A.1:

$$\beta_1 = \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{H} [z^{-1}]^T \mathbf{H} [z] \frac{dz}{z} \right\} = \text{traza} \{ \mathbf{T}_1 \}, \quad (\text{A.1.21})$$

$$\beta_2 = \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{H} [z^{-1}]^T \mathbf{R}_1 [z] \frac{dz}{z} \right\} = \text{traza} \left\{ \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{H} [z^{-1}]^T \mathbf{R}_1 [z] \right\} = 0, \quad (\text{A.1.22})$$

$$\beta_3 = \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{H} [z^{-1}]^T \mathbf{R}_1 [0] \frac{dz}{z} \right\} = \text{traza} \left\{ \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{H} [z^{-1}]^T \mathbf{R}_1 [0] \right\} = 0, \quad (\text{A.1.23})$$

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R}_1 [z^{-1}]^T \mathbf{H} [z] \frac{dz}{z} \right\} \\ &= \text{traza} \left\{ \sum_{k=1}^{n_c} \text{Res}_{z=\bar{c}_k^{-1}} \left\{ \mathbf{R}_1 [z^{-1}]^T \mathbf{H} [z] \frac{1}{z} \right\} \right\} \\ &= -\text{traza} \left\{ \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_k^H}{\bar{c}_k} \mathbf{E}_{\mathbf{I}, c} [\bar{c}_k^{-1}]^{-1} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j \bar{c}_k^{j-i} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.24})$$

$$\begin{aligned} \beta_5 &= \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R}_1 [z^{-1}]^T \mathbf{R}_1 [z] \frac{dz}{z} \right\} \\ &= \text{traza} \left\{ \sum_{k=1}^{n_c} \text{Res}_{z=c_k} \left\{ \mathbf{R}_1 [z^{-1}]^T \mathbf{R}_1 [z] \frac{1}{z} \right\} \right\} \\ &= \text{traza} \left\{ \sum_{l=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_k}{\bar{c}_l c_k - 1} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.25})$$

$$\begin{aligned} \beta_6 &= \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R}_1 [z^{-1}]^T \mathbf{R}_1 [0] \frac{dz}{z} \right\} \\ &= \text{traza} \left\{ \sum_{k=1}^{n_c} \text{Res}_{z=\bar{c}_k^{-1}} \left\{ \mathbf{R}_1 [z^{-1}]^T \mathbf{R}_1 [0] \frac{1}{z} \right\} \right\} = \text{traza} \left\{ \sum_{l=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_k}{\bar{c}_l c_k} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.26})$$

$$\beta_7 = \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R}_1 [0]^T \mathbf{H} [z] \frac{dz}{z} \right\} = 0, \quad (\text{A.1.27})$$

$$\begin{aligned} \beta_8 &= \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R}_1 [0]^T \mathbf{R}_1 [z] \frac{dz}{z} \right\} = \text{traza} \left\{ \mathbf{R}_1 [0]^T \mathbf{R}_1 [0] \right\} \\ &= \text{traza} \left\{ \sum_{l=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_k}{\bar{c}_l c_k} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.28})$$

$$\beta_9 = \text{traza} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint \mathbf{R}_1 [0]^T \mathbf{R}_1 [0] \frac{dz}{z} \right\} = \text{traza} \left\{ \sum_{l=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_k}{\bar{c}_l c_k} \right\}. \quad (\text{A.1.29})$$

En base a las expresiones (A.1.21)-(A.1.29), es posible escribir J_S^{opt} como

$$J_S^{opt} = \beta_1 + \beta_4 + \beta_5 - \beta_6 - \beta_8 + \beta_9, \quad (\text{A.1.30})$$

donde se satisface que

$$\beta_5 - \beta_6 = \sum_{l=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_k}{\bar{c}_l c_k (\bar{c}_l c_k - 1)}, \quad (\text{A.1.31})$$

$$\beta_9 - \beta_8 = 0, \quad (\text{A.1.32})$$

lo que permite demostrar la expresión cerrada para el costo óptimo J_S^{opt} , entregada en el Teorema 3.3 en la página 38.

APÉNDICE B

B.1. Resultados para sistemas aumentados en el Capítulo 4

Dado que el resultado óptimo presentado en el Teorema 4.2 en la página 63 establece una dependencia implícita entre la matriz de penalización $\mathbf{N}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ y el costo óptimo $J_{S,r}^{opt}$, resulta necesario indagar sobre la relación existente entre la factorización inner-outer de la matriz $\mathbf{G}_{\text{aug}}[z]$, definida como

$$\mathbf{G}_{\text{aug}}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{S,FM}}[z] \\ \hline -\mathbf{N}[z] \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z] \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{2n \times n}, \quad (\text{B.1.1})$$

con $\mathbf{G}_{\text{S,FM}}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ definido según el Teorema 4.2 en la página 63, y $\mathbf{N}[z]$ dado por (4.5.35). A continuación se presentan algunos resultados que permiten clarificar esta dependencia mediante un análisis de la matriz $\mathbf{G}_{\text{aug}}[z]$ presentada en (B.1.1).

Lema B.1. *Considere la definición de $\mathbf{G}_{\text{S,FM}}[z]$ dada en el Teorema 4.2 en la página 63, donde $\mathbf{G}_{\text{S}}[z]$ es particionada según (4.4.1). Además, considere la factorización inner-outer entregada en (B.1.1) y la matriz $\mathbf{N}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$ definida en (4.5.35). Defínase*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{A}}[z] \mid \mathbf{G}_{\text{N}}[z] \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{A}_i}[z] \ \mathbf{G}_{\text{A}_o}[z] \mid \mathbf{G}_{\text{N}_i}[z] \ \mathbf{G}_{\text{N}_o}[z] \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1.2})$$

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \\ \hline \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1.3})$$

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1[z] \ \mathbf{G}_{\text{A}_o}[z] \mid \mathbf{U}_2[z] \ \mathbf{G}_{\text{N}_o}[z] \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1.4})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{A}_i}[z], \mathbf{U}_1[z] &\in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}, \\ \mathbf{G}_{\text{N}_i}[z], \mathbf{U}_2[z] &\in \mathcal{RH}_\infty^{n \times (n-m)}, \\ \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z], \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] &\in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}, \\ \mathbf{G}_{\text{A}_o}[z] &\in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}, \\ \mathbf{G}_{\text{N}_o}[z] &\in \mathcal{RH}_\infty^{(n-m) \times (n-m)}. \end{aligned}$$

Bajo las definiciones anteriores, es posible afirmar lo siguiente:

1. $\mathbf{U}_1[z]$ es una matriz de transferencia unitaria, i.e., $\mathbf{U}_1[z] \sim \mathbf{U}_1[z] = \mathbf{I}_m$.
2. $\mathbf{U}_2[z]$ es una matriz de transferencia que es solución del problema

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2[z] \sim \mathbf{U}_2[z] &= \mathbf{I}_{(n-m)} \\ &+ \mathbf{G}_{\mathbf{N}_o}[z] \sim F[z] \sim \text{diag} \left\{ \alpha_1^2, \dots, \alpha_{(n-m)}^2 \right\} F[z] \mathbf{G}_{\mathbf{N}_o}[z]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.5})$$

3. Las matrices de transferencia $\mathbf{U}_1[z]$ y $\mathbf{U}_2[z]$ satisfacen

$$\mathbf{U}_1[z] \sim \mathbf{U}_2[z] = \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z] \sim \mathbf{G}_{\mathbf{N}_i}[z], \quad (\text{B.1.6})$$

4. Las matrices de transferencia $\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z]$ y $\mathbf{G}_{\mathbf{N}_i}[z]$ pueden recuperarse mediante

$$\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z] = \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \mathbf{U}_1[z], \quad (\text{B.1.7})$$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{N}_i}[z] = \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \mathbf{U}_2[z], \quad (\text{B.1.8})$$

donde $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z]$ está definido según el Teorema 4.2 en la página 63.

5. La matriz $\mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z]$ satisface

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \mathbf{U}_1[z] = \mathbf{0}, \quad (\text{B.1.9})$$

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \mathbf{U}_2[z] \mathbf{G}_{\mathbf{N}_o}[z] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline -\text{diag} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_{(n-m)} \} \end{array} \right] F[z]. \quad (\text{B.1.10})$$

6. Las matrices de transferencia $\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z]$ y $\mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z]$ satisfacen

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] + \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] = \mathbf{I}_n, \quad (\text{B.1.11})$$

o equivalentemente, $\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z]$ y $\mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z]$ son factores coprimos normalizados [34] de la pseudo-planta $\mathbf{P}[z] \triangleq \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z]^{-1}$.

Demostración: Procedamos por partes. Aplicando las propiedades de las factorizaciones inner-outer a $\mathbf{G}_{\text{aug}}[z]$ se obtiene

$$\mathbf{G}_{\text{aug}}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}}[z] = \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z], \quad (\text{B.1.12})$$

lo que puede expresarse como

$$\mathbf{G}_{\mathbf{S}, \mathbf{FM}}[z] \sim \mathbf{G}_{\mathbf{S}, \mathbf{FM}}[z] + \mathbf{N}[z] \sim \mathbf{N}[z] = \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z]. \quad (\text{B.1.13})$$

Considerando que $\mathbf{G}_{\mathbf{S}, \mathbf{FM}}[z] = \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \sim \left[\mathbf{G}_{\mathbf{A}}[z] \middle| \mathbf{G}_{\mathbf{N}}[z] \right]$, entonces es posible escribir

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{\mathbf{A}}[z] \sim \mathbf{G}_{\mathbf{A}}[z] & \mathbf{G}_{\mathbf{A}}[z] \sim \mathbf{G}_{\mathbf{N}}[z] \\ \hline \mathbf{G}_{\mathbf{N}}[z] \sim \mathbf{G}_{\mathbf{A}}[z] & \mathbf{G}_{\mathbf{N}}[z] \sim \mathbf{G}_{\mathbf{N}}[z] \end{array} \right] + \mathbf{N}[z] \sim \mathbf{N}[z] = \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z], \quad (\text{B.1.14})$$

donde se ha empleado que $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z]$ es unitario. Ahora bien, empleando las definiciones dadas en (4.5.35) y (B.1.4) en (B.1.14), es posible escribir

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_A [z] \sim \mathbf{G}_A [z] & \mathbf{G}_A [z] \sim \mathbf{G}_N [z] \\ \hline \mathbf{G}_N [z] \sim \mathbf{G}_A [z] & \mathbf{G}_N [z] \sim \mathbf{G}_N [z] + F [z] \sim \text{diag} \{ \alpha_1^2, \dots, \alpha_{(n-m)}^2 \} F [z] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{A_o} [z] \sim \mathbf{U}_1 [z] \sim \mathbf{U}_1 [z] \mathbf{G}_{A_o} [z] & \mathbf{G}_{A_o} [z] \sim \mathbf{U}_1 [z] \sim \mathbf{U}_2 [z] \mathbf{G}_{N_o} [z] \\ \hline \mathbf{G}_{N_o} [z] \sim \mathbf{U}_2 [z] \sim \mathbf{U}_1 [z] \mathbf{G}_{A_o} [z] & \mathbf{G}_{N_o} [z] \sim \mathbf{U}_2 [z] \sim \mathbf{U}_2 [z] \mathbf{G}_{N_o} [z] \end{array} \right]. \quad (\text{B.1.15})$$

A partir de (B.1.15), y empleando la definición dada en (B.1.2), es posible establecer lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_A [z] \sim \mathbf{G}_A [z] &= \mathbf{G}_{A_o} [z] \sim \mathbf{G}_{A_o} [z] \\ &= \mathbf{G}_{A_o} [z] \sim \mathbf{U}_1 [z] \sim \mathbf{U}_1 [z] \mathbf{G}_{A_o} [z], \end{aligned} \quad (\text{B.1.16})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_N [z] \sim \mathbf{G}_N [z] + F [z] \sim \text{diag} \{ \alpha_1^2, \dots, \alpha_{(n-m)}^2 \} F [z] &= \mathbf{G}_{N_o} [z] \sim \mathbf{G}_{N_o} [z] \\ &\quad + F [z] \sim \text{diag} \{ \alpha_1^2, \dots, \alpha_{(n-m)}^2 \} F [z] \\ &= \mathbf{G}_{N_o} [z] \sim \mathbf{U}_2 [z] \sim \mathbf{U}_2 [z] \mathbf{G}_{N_o} [z], \end{aligned} \quad (\text{B.1.17})$$

$$\mathbf{G}_A [z] \sim \mathbf{G}_N [z] = \mathbf{G}_{A_o} [z] \sim \mathbf{U}_1 [z] \sim \mathbf{U}_2 [z] \mathbf{G}_{N_o} [z]. \quad (\text{B.1.18})$$

La expresión (B.1.16) permite deducir inmediatamente que la igualdad se satisface ssi¹ $\mathbf{U}_1 [z] \sim \mathbf{U}_1 [z] = \mathbf{I}_m$, lo cual demuestra la primera afirmación.

De la expresión (B.1.17) se observa que la igualdad se satisface ssi $\mathbf{U}_2 [z]$ cumple con

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2 [z] \sim \mathbf{U}_2 [z] &= \mathbf{I}_{(n-m)} \\ &\quad + \mathbf{G}_{N_o} [z]^{-1} \sim F [z] \sim \text{diag} \{ \alpha_1^2, \dots, \alpha_{(n-m)}^2 \} F [z] \mathbf{G}_{N_o} [z]^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.19})$$

lo cual demuestra la segunda afirmación.

De la expresión (B.1.18) se observa que la igualdad se mantiene ssi $\mathbf{U}_1 [z] \sim \mathbf{U}_2 [z] = \mathbf{G}_{A_i} [z] \sim \mathbf{G}_{N_i} [z]$, lo cual demuestra la tercera afirmación.

Las afirmaciones 4 a 6 se pueden demostrar considerando que

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_1} [z] \mathbf{G}_{\text{aug}_o} [z] = \mathbf{G}_{S, FM} [z], \quad (\text{B.1.20})$$

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_2} [z] \mathbf{G}_{\text{aug}_o} [z] = -\mathbf{N} [z], \quad (\text{B.1.21})$$

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}_i} [z] = \mathbf{I}_n. \quad (\text{B.1.22})$$

lo que permite establecer que

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_1} [z] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U}_1 [z] \mathbf{G}_{A_o} [z] & \mathbf{U}_2 [z] \mathbf{G}_{N_o} [z] \end{array} \right] = \mathbf{E}_{I, dc} [z] \sim \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_A [z] & \mathbf{G}_N [z] \end{array} \right], \quad (\text{B.1.23})$$

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_2} [z] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U}_1 [z] \mathbf{G}_{A_o} [z] & \mathbf{U}_2 [z] \mathbf{G}_{N_o} [z] \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \text{diag} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_{(n-m)} \} \end{array} \right] F [z], \quad (\text{B.1.24})$$

¹Si y sólo si

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] + \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] = \mathbf{I}_n. \quad (\text{B.1.25})$$

La expresión (B.1.25) prueba inmediatamente la afirmación 6. De la expresión (B.1.23) se observa que

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \mathbf{U}_1[z] \mathbf{G}_{\mathbf{A}_o}[z] = \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \sim \mathbf{G}_{\mathbf{A}}[z], \quad (\text{B.1.26})$$

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \mathbf{U}_2[z] \mathbf{G}_{\mathbf{N}_o}[z] = \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \sim \mathbf{G}_{\mathbf{N}}[z], \quad (\text{B.1.27})$$

de lo cual es posible establecer que

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \mathbf{U}_1[z] = \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \sim \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z], \quad (\text{B.1.28})$$

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \mathbf{U}_2[z] = \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \sim \mathbf{G}_{\mathbf{N}_i}[z], \quad (\text{B.1.29})$$

en base a la ecuación (B.1.4) es posible establecer que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \mathbf{U}_1[z] = \mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z], \quad (\text{B.1.30})$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \mathbf{U}_2[z] = \mathbf{G}_{\mathbf{N}_i}[z], \quad (\text{B.1.31})$$

lo que permite demostrar la afirmación 4. De una forma similar, se desarrolla el producto

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] &= -\mathbf{N}[z] \\ \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \left[\mathbf{U}_1[z] \mathbf{G}_{\mathbf{A}_o}[z] \middle| \mathbf{U}_2[z] \mathbf{G}_{\mathbf{N}_o}[z] \right] &= - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \text{diag} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_{(n-m)} \} \end{array} \right] F[z], \end{aligned} \quad (\text{B.1.32})$$

donde se ha empleado la definición de $\mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z]$ dada en (B.1.4). Empleando las particiones resultantes en (B.1.32), se pueden establecer las siguientes igualdades

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \mathbf{U}_1[z] \mathbf{G}_{\mathbf{A}_o}[z] = \mathbf{0}, \quad (\text{B.1.33})$$

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \mathbf{U}_2[z] \mathbf{G}_{\mathbf{N}_o}[z] = - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \\ \hline \text{diag} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_{(n-m)} \} & \end{array} \right] F[z]. \quad (\text{B.1.34})$$

La expresión (B.1.34) prueba una parte de la afirmación 5. La segunda parte de dicha afirmación puede ser demostrada considerando que $\mathbf{G}_{\mathbf{A}_o}[z]$ es invertible por la derecha. Por lo tanto, es posible escribir (B.1.33) como

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \mathbf{U}_1[z] = \mathbf{0}, \quad (\text{B.1.35})$$

lo cual concluye la demostración. ■

Observación B.1. *La expresión (B.1.35) es equivalente a imponer que las matrices $\mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z]$ y $\mathbf{U}_1[z]$ sean ortogonales entre sí.*

Observación B.2. *Las afirmaciones realizadas en el Lema B.1 sólo son válidas cuando la matriz constante $\mathbf{N}[z]$ adopta la estructura definida en (4.5.35). Si se modificaran los supuestos sobre la matriz $\mathbf{N}[z]$, también serían modificados los resultados presentados en dicho lema.*

Si bien el Lema B.1 entrega algunas propiedades sobre la estructura de la factorización inner-outer de $\mathbf{G}_{\text{aug}}[z]$, es posible emplear un segundo enfoque para determinar propiedades adicionales sobre dicha factorización. El siguiente lema permite observar propiedades para la misma factorización inner-outer, considerando una estructura alternativa para $\mathbf{G}_{\text{S}}[z]$.

Lema B.2. *Considere la definición de $\mathbf{N}[z]$ y $\mathbf{G}_{\text{S,FM}}[z]$ dadas en (4.5.35) y en el Teorema 4.2, respectivamente, donde $\mathbf{G}_{\text{S}}[z]$ es particionada según*

$$\mathbf{G}_{\text{S}}[z] = \left[\mathbf{G}_{\text{Ai}}[z] \middle| \mathbf{G}_{\text{Ni}}[z] \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{\text{Ao}}[z] & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{No}}[z] \end{array} \right], \quad (\text{B.1.36})$$

donde $\mathbf{G}_{\text{A}}[z] \triangleq \mathbf{G}_{\text{Ai}}[z] \mathbf{G}_{\text{Ao}}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times m}$ y $\mathbf{G}_{\text{N}}[z] \triangleq \mathbf{G}_{\text{Ni}}[z] \mathbf{G}_{\text{No}}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times (n-m)}$ corresponden a las factorizaciones inner-outer de $\mathbf{G}_{\text{A}}[z]$ y $\mathbf{G}_{\text{N}}[z]$, respectivamente.

Dada la factorización inner-outer $\mathbf{G}_{\text{aug}}[z] \triangleq \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z]$, defina

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] \triangleq \mathbf{T}[z] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{\text{Ao}}[z] & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{No}}[z] \end{array} \right], \quad (\text{B.1.37})$$

donde $\mathbf{T}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}$ una matriz de transferencia no singular. Bajo los supuestos anteriores, el factor inner $\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z]$ está dado por

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \triangleq \left[\begin{array}{c} \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \\ \hline \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \end{array} \right], \quad (\text{B.1.38})$$

donde

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] = \mathbf{E}_{\text{I,dc}}[z]^{\sim} \left[\mathbf{G}_{\text{Ai}}[z] \middle| \mathbf{G}_{\text{Ni}}[z] \right] \mathbf{T}[z]^{-1}, \quad (\text{B.1.39})$$

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] = - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_{(n-m)}\} F[z] \mathbf{G}_{\text{No}}[z]^{-1} \end{array} \right] \mathbf{T}[z]^{-1}, \quad (\text{B.1.40})$$

con $\mathbf{T}[z]$ siendo solución del problema

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}[z]^{\sim} \mathbf{T}[z] = \mathbf{I}_n \\ & + \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{Ai}}[z]^{\sim} \mathbf{G}_{\text{Ni}}[z] \\ \hline \mathbf{G}_{\text{Ni}}[z]^{\sim} \mathbf{G}_{\text{Ai}}[z] & \mathbf{G}_{\text{No}}[z]^{\sim} F[z]^{\sim} \text{diag}\{\alpha_1^2, \dots, \alpha_{(n-m)}^2\} F[z] \mathbf{G}_{\text{No}}[z]^{-1} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.41})$$

Demostración: Dado que $\mathbf{G}_{\text{aug}}[z] = \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z]$, entonces es posible establecer en base a las expresiones (B.1.37) y (B.1.38) que

$$\mathbf{G}_{\text{aug}}[z] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \\ \hline \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \end{array} \right] \mathbf{T}[z] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{\text{Ao}}[z] & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{No}}[z] \end{array} \right], \quad (\text{B.1.42})$$

y en base a la definición de $\mathbf{G}_{\text{aug}}[z]$ dada en (2.9.5), es posible establecer a partir de (B.1.42) que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{S,FM}}[z] \\ -\mathbf{N}[z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \\ \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \end{bmatrix} \mathbf{T}[z] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Ao}}[z] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{No}}[z] \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1.43})$$

de donde es posible deducir que

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{S,FM}}[z] &= \mathbf{E}_{\text{I,FM}}[z] \sim \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Ai}}[z] & \mathbf{G}_{\text{Ni}}[z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Ao}}[z] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{No}}[z] \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \mathbf{T}[z] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Ao}}[z] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{No}}[z] \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.44})$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{N}[z] &= - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_{(n-m)}\} \end{bmatrix} F[z] \\ &= \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \mathbf{T}[z] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Ao}}[z] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{No}}[z] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.45})$$

A partir de (B.1.44) es posible deducir que $\mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z]$ está dado por

$$\mathbf{E}_{\text{I,dc}}[z] \sim \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Ai}}[z] & \mathbf{G}_{\text{Ni}}[z] \end{bmatrix} \mathbf{T}[z]^{-1} = \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z]. \quad (\text{B.1.46})$$

Análogamente, es posible deducir una expresión para $\mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z]$ empleando (B.1.45), lo cual resulta en

$$-F[z] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_{(n-m)}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{Ao}}[z]^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{No}}[z]^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{T}[z]^{-1} = \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z]. \quad (\text{B.1.47})$$

Las expresiones (B.1.46) y (B.1.47) permiten demostrar los resultados expuestos en (B.1.39) y (B.1.40).

Para demostrar (B.1.41) es necesario observar que

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z] = \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] + \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{aug}_2}[z] = \mathbf{I}_n, \quad (\text{B.1.48})$$

y empleando (B.1.46) y (B.1.47) en (B.1.48) se obtiene

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}[z]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{G}_{\text{Ai}}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{Ni}}[z] \\ \mathbf{G}_{\text{Ni}}[z] \sim \mathbf{G}_{\text{Ai}}[z] & \mathbf{I}_{(n-m)} \end{bmatrix} \mathbf{T}[z]^{-1} \\ &+ \mathbf{T}[z]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\text{No}}[z] \sim F[z] \sim \text{diag}\{\alpha_1^2, \dots, \alpha_{(n-m)}^2\} F[z] \mathbf{G}_{\text{No}}[z]^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{T}[z]^{-1} = \mathbf{I}_n, \end{aligned} \quad (\text{B.1.49})$$

lo que permite obtener (B.1.41), concluyendo así la demostración. \blacksquare

El resultado presentado en el Lema B.2 demuestra la existencia de una matriz $\mathbf{T}[z]$ no singular, de manera que permita relacionar los términos de la matriz $\mathbf{G}_{\text{aug}}[z]$ con sus factorizaciones inner-outer. Por otro lado, los resultados del Lema B.1 demuestran la existencia de matrices $\mathbf{U}_1[z]$ y $\mathbf{U}_2[z]$, tal que relacionan el factor outer $\mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z]$ con los factores outer $\mathbf{G}_{\mathbf{A}_o}[z]$ (asociado a la planta alta $\mathbf{G}_{\mathbf{A}}[z]$) y $\mathbf{G}_{\mathbf{N}_o}[z]$ (relacionado con la matriz de transferencia de los nuevos canales de control).

Por lo tanto, resulta obvio indagar una relación entre las matrices $\mathbf{T}[z]$, $\mathbf{U}_1[z]$ y $\mathbf{U}_2[z]$. A continuación, se presenta un corolario que relaciona las matrices de transferencia antes mencionadas.

Corolario B.1. *Considere la notación y supuestos realizados en los Lemas B.1 y B.2. Bajo las condiciones previamente mencionadas, la matriz $\mathbf{T}[z]$ está dada por*

$$\mathbf{T}[z] = \left[\mathbf{U}_1[z] \;\middle|\; \mathbf{U}_2[z] \right]. \quad (\text{B.1.50})$$

Demostración: Note que la expresión (B.1.4) puede reescribirse como

$$\mathbf{G}_{\text{aug}_o}[z] = \left[\mathbf{U}_1[z] \;\middle|\; \mathbf{U}_2[z] \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{\mathbf{A}_o}[z] & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\mathbf{N}_o}[z] \end{array} \right]. \quad (\text{B.1.51})$$

Igualando la expresión anterior con (B.1.37) se obtiene inmediatamente (B.1.50), lo cual finaliza la demostración. \blacksquare

Note que la definición de $\mathbf{T}[z]$ dada en el Corolario B.1 satisface la igualdad impuesta en (B.1.41), ya que las restricciones sobre $\mathbf{U}_1[z]$ y $\mathbf{U}_2[z]$ entregadas en el Lema B.1 satisfacen propiedades que permiten resolver inmediatamente la ecuación propuesta.

En base a los resultados propuestos en los Lemas B.1 y B.2 es posible reescribir el desempeño óptimo presentado en (4.5.34) de forma que presente de manera explícita el efecto de los canales adicionales restringidos. A continuación, se presenta el desempeño óptimo $J_{S,r}^{\text{opt}}$ en función de los resultados aquí expuestos.

Corolario B.2. *Considere la notación y las definiciones realizadas en los Lemas B.1 y B.2. Bajo dichos supuestos, el costo óptimo $J_{S,r}^{\text{opt}}$ entregado en el Teorema 4.2 en la página 63 se puede expresar como*

$$J_{S,r}^{\text{opt}} = \frac{1}{1-\lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \mathbf{A}[\lambda^{-1}] \mathbf{T}[\lambda^{-1}]^{-1} \mathbf{T}[\lambda^{-1}]^{-T} \mathbf{A}[\lambda^{-1}]^T \right\} \right), \quad (\text{B.1.52})$$

donde

$$\mathbf{A}[\lambda^{-1}] \triangleq \left[\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[\lambda^{-1}] \;\middle|\; \mathbf{G}_{\mathbf{N}_i}[\lambda^{-1}] \right], \quad (\text{B.1.53})$$

y $\mathbf{T}[z]$ está definido según (B.1.50).

Demostración: Considere la definición del factor inner $\mathbf{G}_{\text{aug}_i}[z]$ entregada en el Lema B.2, con partición dada por (B.1.38). A partir de las igualdades desarrolladas en dicho Lema, es posible establecer que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \mathbf{G}_{\text{aug}_1}[z] = \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \text{dc}}[z] \sim \left[\mathbf{G}_{\mathbf{A}_i}[z] \;\middle|\; \mathbf{G}_{\mathbf{N}_i}[z] \right] \mathbf{T}[z]^{-1}$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [z] \mathbf{G}_{\mathbf{aug}_1} [z] = \left[\mathbf{G}_{\mathbf{Ai}} [z] \middle| \mathbf{G}_{\mathbf{Ni}} [z] \right] \mathbf{T} [z]^{-1}, \quad (\text{B.1.54})$$

donde se ha empleado que $\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [z] \in \mathcal{R}^{n \times n}$ es una matriz unitaria.

Por otro lado, reemplazando la definición de $\mathbf{G}_{\mathbf{aug}_1} [z]$ entregada en el Lema B.2 en la forma cerrada del costo óptimo $J_{S,r}^{opt}$, se obtiene

$$\begin{aligned} J_{S,r}^{opt} &= \frac{1}{1-\lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \left[\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [\lambda^{-1}] \middle| \mathbf{0} \right] \mathbf{G}_{\mathbf{aug}_1} [\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{\mathbf{aug}_1} [\lambda^{-1}]^T \left[\begin{array}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \right\} \right) \\ J_{S,r}^{opt} &= \frac{1}{1-\lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \left[\mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [\lambda^{-1}] \middle| \mathbf{0} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{G}_{\mathbf{aug}_1} [\lambda^{-1}] \\ \mathbf{G}_{\mathbf{aug}_2} [\lambda^{-1}] \end{array} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[\begin{array}{c} \mathbf{G}_{\mathbf{aug}_1} [\lambda^{-1}] \\ \mathbf{G}_{\mathbf{aug}_2} [\lambda^{-1}] \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [\lambda^{-1}]^T \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \right\} \right) \\ J_{S,r}^{opt} &= \frac{1}{1-\lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{\mathbf{aug}_1} [\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{\mathbf{aug}_1} [\lambda^{-1}]^T \mathbf{E}_{\mathbf{I}, \mathbf{dc}} [\lambda^{-1}]^T \right\} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1.55})$$

Finalmente, reemplazando (B.1.54) en (B.1.55), se obtiene el resultado presentado en (B.1.52), concluyendo así la demostración. \blacksquare

Si bien el resultado expuesto en (B.1.52) no simplifica la expresión cerrada para el costo óptimo $J_{S,r}^{opt}$, su importancia radica en que se puede observar la dependencia explícita del desempeño óptimo en función de los factores inner de la planta alta y de las transferencias asociadas a los nuevos canales de control.

Los resultados presentados permiten observar que el desempeño óptimo $J_{S,r}^{opt}$ posee una estructura no trivial, aún en un caso particular, como considerar la matriz de ponderación $\mathbf{N} [z]$ definida según (4.5.35).

APÉNDICE C

C.1. Ejemplo de elección del filtro de penalización

Con el propósito de ilustrar el análisis efectuado en la Sección 5.3.1, se presenta a continuación un ejemplo aplicado, el cual considera la elección de diferentes filtros para la penalización de los nuevos canales de control.

Ejemplo C.1. Considere un sistema alto $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 1}$ dado por

$$\mathbf{G}_A [z] = \begin{bmatrix} \frac{z - 1.7}{z^2} \\ \frac{z - 1.7}{z(z - 0.3)} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1.1})$$

El sistema presentado en (C.1.1) posee dos ceros de fase no mínima (FNM): un cero finito en $z = 1.7$ y 1 cero en infinito. A modo de mejorar su desempeño, se propone incluir un segundo canal de control, lo cual permite aumentar el sistema a

$$\mathbf{G}_S [z] = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A [z] & \begin{array}{c} \frac{1}{z} \\ \\ \\ \frac{1}{z - 0.2} \end{array} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1.2})$$

La planta $\mathbf{G}_S [z]$ definida en (C.1.2) conserva el cero de FNM ubicado en $z = 1.7$, pero se aumenta el número de ceros en infinito a 2. Considere que la matriz de ponderación está dada por

$$\mathbf{N} [z] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} F_1 [z], \quad (\text{C.1.3})$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $F_1 [z]$ definido como

$$F_1 [z] \triangleq \frac{1.95}{z + 0.95}. \quad (\text{C.1.4})$$

El filtro (C.1.4) tiene una característica pasa-altos, con ganancia unitaria a frecuencia cero.

A modo de analizar el efecto del filtro $\mathbf{N} [z]$ sobre el desempeño óptimo, se considera el problema de optimización entregado en la Sección 4.5, sujeto a una referencia definida

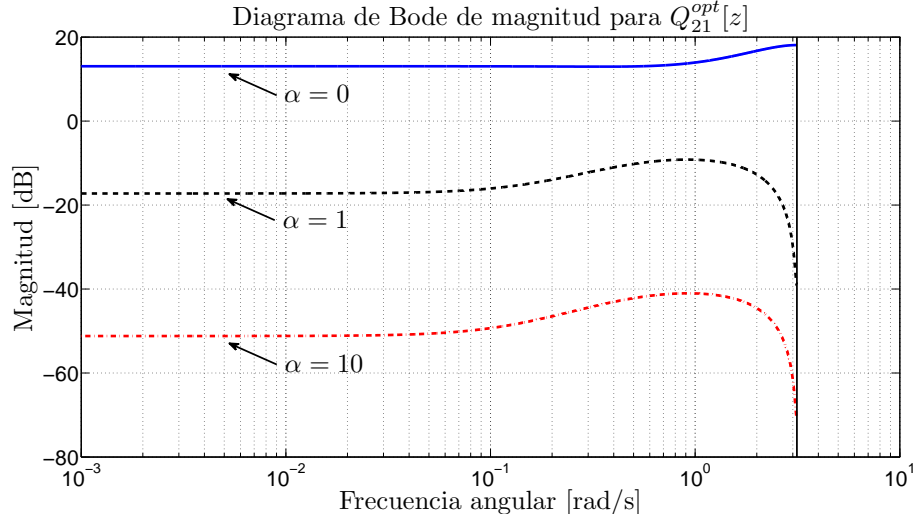


Figura C.1. Respuesta en frecuencia de $Q_{21}^{opt}[z]$ para diferentes valores de α , considerando el filtro $F_1[z]$.

como $\mathbf{r}[k] \triangleq (0.9)^k \boldsymbol{\nu}$, con $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{N}_0$. En este caso, es posible particionar el parámetro óptimo de diseño $\mathbf{Q}^{opt}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{2 \times 2}$ como

$$\mathbf{Q}^{opt}[z] \triangleq \begin{bmatrix} Q_{11}^{opt}[z] & Q_{12}^{opt}[z] \\ Q_{21}^{opt}[z] & Q_{22}^{opt}[z] \end{bmatrix}, \quad (\text{C.1.5})$$

donde $Q_{21}^{opt}[z]$ y $Q_{22}^{opt}[z]$ corresponden a los parámetros escalares óptimos que relacionan los niveles de control en el nuevo canal con la referencia utilizada. Interesa entonces observar la respuesta en frecuencia de dichos parámetros óptimos como función de α .

La magnitud de la respuesta en frecuencia de los parámetros $Q_{21}^{opt}[z]$ y $Q_{22}^{opt}[z]$ se presentan en las Figuras C.1 y C.2. Los resultados presentados en dichas figuras muestran que la magnitud de la respuesta en frecuencia de los parámetros óptimos se atenúa en forma uniforme a medida que la restricción α aumenta. Se debe observar que la atenuación a alta frecuencia es mayor, debido a la ponderación en alta frecuencia del filtro $F_1[z]$.

Una segunda opción para el filtro $\mathbf{N}[z]$ es definirlo como

$$\mathbf{N}[z] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} F_2[z], \quad (\text{C.1.6})$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $F_2[z]$ dado por

$$F_2[z] \triangleq \frac{1.95(z-1)}{z+0.95}. \quad (\text{C.1.7})$$

El filtro $F_2[z]$ sigue manteniendo una característica pasa-altos, pero su diferencia con respecto a $F_1[z]$ está en que $F_2[z]$ posee ganancia a continua nula. Esto permite independizar la restricción sobre la actuación de la ganancia a frecuencia cero de los parámetros óptimos $Q_{21}^{opt}[z]$ y $Q_{22}^{opt}[z]$.

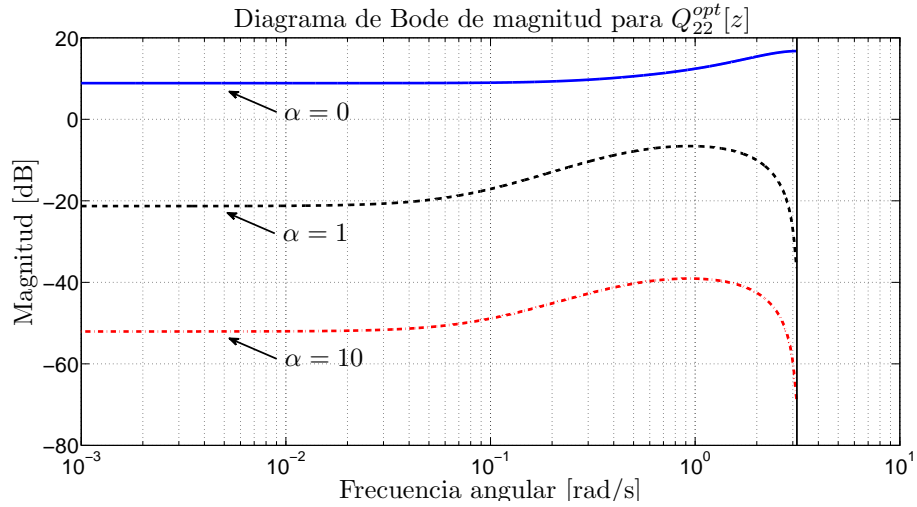


Figura C.2. Respuesta en frecuencia de $Q_{22}^{opt}[z]$ diferentes valores de α , considerando el filtro $F_1[z]$.

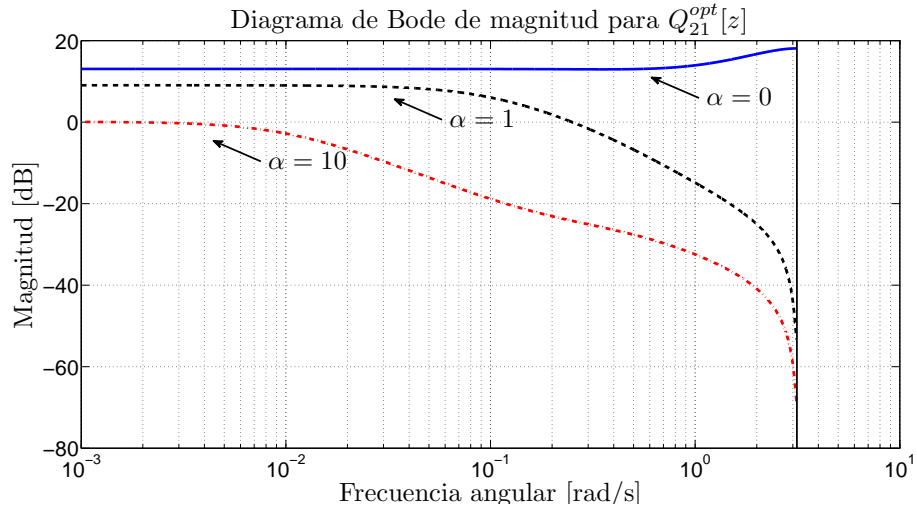


Figura C.3. Respuesta en frecuencia de $Q_{21}^{opt}[z]$ para diferentes valores de α , considerando el filtro $F_2[z]$.

Las Figuras C.3 y C.4 presentan la magnitud de la respuesta en frecuencia de los parámetros óptimos $Q_{21}^{opt}[z]$ y $Q_{22}^{opt}[z]$, cuando el filtro de penalización de la señal de control está dado por $F_2[z]$. Los resultados obtenidos permiten observar que la modificación del filtro afecta fuertemente la evolución de la respuesta en frecuencia de dichos parámetros. En particular, el hecho de que $F_2[z]$ tenga ganancia a continua nula hace que la respuesta en frecuencia de estos parámetros se atenúe en mayor medida en la región de alta frecuencia. Por lo tanto, la correcta elección del filtro $F[z]$ es importante para obtener las limitaciones

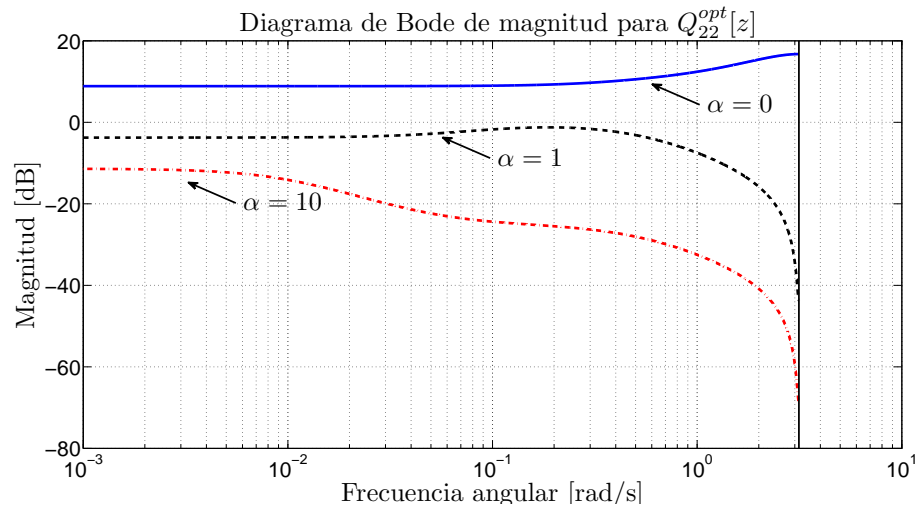


Figura C.4. Respuesta en frecuencia de $Q_{22}^{opt}[z]$ diferentes valores de α , considerando el filtro $F_2[z]$.

en ancho de banda requeridas en los nuevos canales de actuación.

REFERENCIAS

- [1] J. Chen, L. Qiu, and O. Toker, "Limitations on maximal tracking accuracy," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 45, pp. 326–331, 2000.
- [2] H.W. Bode, *Network analysis and feedback amplifier design*, Van Nostrand, New York, 1945.
- [3] M. M. Seron, J. H. Braslavsky, and G. C. Goodwin, *Fundamental Limitations in Filtering and Control*, Springer Verlag, 1997.
- [4] O. Toker, J. Chen, and L. Qiu, "Tracking performance limitations in LTI multivariable discrete-time systems," *IEEE Transactions on circuits and systems*, vol. 49, no. 5, pp. 657–670, 2002.
- [5] J. Chen, "Logarithmic integrals, interpolation bounds, and performance limitations in MIMO feedback systems," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 45, pp. 1098–1115, 2000.
- [6] E. I. Silva and M. E. Salgado, "Performance bounds for feedback control of non-minimum phase MIMO systems with arbitrary delay structure," *Proceedings of the IEE, Control Theory and Applications*, vol. 152, pp. 211–219, 2005.
- [7] M. E. Salgado and E. I. Silva, "Achievable performance limitations for SISO plants with pole location constraints," *International Journal of Control*, vol. 79, pp. 263–277, 2006.
- [8] A. A Peters, M. E. Salgado, and E. I. Silva, "Performance bounds in linear control of unstable MIMO systems with pole location constraint," *Systems and Control Letters*, vol. 57, no. 5, pp. 392–399, May 2008.
- [9] J.S. Dewey and S. Devasia, "Experimental and theoretical results in output-trajectory redesign for flexible structures," *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 4, pp. 4210–4215, December 1996, Kobe, Japan.
- [10] X. Litrico, "Robust IMC flow control of SIMO dam-river open-channel systems," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 3, pp. 432–437, 2002.
- [11] R. Brinkerhoff and S. Devasia, "Output tracking for actuator deficient/redundant systems: Multiple piezoactuator example," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 23, no. 2, pp. 370–373, 2000.

- [12] V. Tsochinda, T. Klawitter, C.V. Hollot, and Y. Chait, "A single-input two-output feedback formulation for ANC problems," *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, vol. 2, pp. 923–928, June 2001, Arlington, VA.
- [13] N. Munro, "Multivariable control applications: turbine and chemical plant examples," *IEE Colloquium on Successful Industrial Applications of Multivariable Analysis*, pp. 1–4, February 1990, London, UK.
- [14] N. Morse, R. Smith, B. Paden, and J. Antaki, "Position sensed and self-sensing magnetic bearing configurations and associated robustness limitations," *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3, pp. 2599–2604, December 1998, Tampa, FL.
- [15] G. Chen, J. Chen, and R. Middleton, "Optimal tracking performance for SIMO systems," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 47, no. 10, pp. 1770–1775, 2002.
- [16] T. Bakhtiar and Sh. Hara, " \mathcal{H}_2 regulation performance limitations for SIMO linear time-invariant feedback control systems," *Automatica*, vol. 44, no. 3, pp. 659–670, 2008.
- [17] Sh. Hara, T. Bakhtiar, and M. Kanno, "The best achievable \mathcal{H}_2 tracking performance for SIMO feedback control systems," *Journal of Control Science and Engineering*, vol. 2007, pp. 12, 2007.
- [18] T. Bakhtiar and Sh. Hara, "Tracking performance limits for SIMO discrete-time feedback control systems," in *SICE Annual Conference in Sapporo*, August 4-6, 2004.
- [19] J.H. Braslavsky, R.H. Middleton, and J.S. Freudenberg, "Feedback stabilization over signal-to-noise ratio constrained channels," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 8, pp. 1391–1403, 2007.
- [20] J. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu, "A survey of recent results in networked control systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 138–162, 2007.
- [21] G. N. Nair, F. Fagnani, S. Zampieri, and R. J. Evans, "Feedback control under data rate constraints: an overview," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 108–137, 2007.
- [22] S. Tatikonda, "Control over noisy channels," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 49, no. 7, pp. 1196–1201, 2004.
- [23] S. Tatikonda, "Control under communication constraints," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 49, no. 7, pp. 1056–1058, 2004.
- [24] P. E. Valenzuela, M. E. Salgado, and E. I. Silva, "Performance bounds for SIMO and squared-up plant models," in *Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2011.
- [25] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics*, Princeton University Press, 2009.
- [26] M. Salgado, J. Yuz, and R. Rojas, *Análisis de sistemas lineales*, Prentice Hall, 2005.
- [27] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980.

- [28] G. C. Goodwin, S. Graebe, and M. E. Salgado, *Control System Design*, Prentice-Hall, 2000.
- [29] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, 1972.
- [30] E. I. Silva, “Cotas de desempeño para lazos multivariables con controladores de estructura restringida: una primera aproximación,” M.S. thesis, Universidad Técnica Federico Santa María, 2004.
- [31] K. Havre, *Studies on Controllability Analysis and Control Structure Design*, Ph.D. thesis, Department of Chemical Engineering, Norwegian University of Science and Technology, 1998.
- [32] J. M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Addison Wesley, 1989.
- [33] A. G. J. Macfarlane and N. Karcianias, “Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory,” *International Journal of Control*, vol. 24, pp. 33–74, 1976.
- [34] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover, *Robust and optimal control*, Prentice Hall, 1996.
- [35] M. Vidyasagar, *Control Systems Synthesis: A Factorization Approach*, MIT Press, Cambridge, USA, 1985.
- [36] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer controlled systems. Theory and design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., third edition, 1997.
- [37] K. J. Åström, P. Hagander, and J. Sternby, “Zeros of sampled systems,” *Automatica*, vol. 20, no. 1, pp. 31–38, 1984.
- [38] D. A. Oyarzún, “Límites de desempeño para lazos multivariables con controladores de estructura triangular,” M.S. thesis, Universidad Técnica Federico Santa María, 2006.
- [39] K. Zhou and J. Doyle, *Essentials of robust control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1998.
- [40] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill Book Company, New York, third edition, 1987.
- [41] E.I. Silva, *A Unified Framework for the Analysis and Design of Networked Control Systems*, Ph.D. thesis, School of Electrical Eng. and Comp. Sci., The University of Newcastle, Australia, 2009.
- [42] M. A. García, “Límites de desempeño y diseño de controladores para sistemas multivariables con más salidas que entradas,” M.S. thesis, Universidad Técnica Federico Santa María, 2011.
- [43] R. V. Churchill and J. W. Brown, *Variable Compleja y Aplicaciones*, McGraw-Hill, 1992.

- [44] R.V. Churchill and J.W. Brown, *Complex Variables and Applications*, McGraw–Hill, New York, fifth edition, 1990.
- [45] B. A. Francis, *A course on \mathcal{H}_∞ Control Theory*, Springer Verlag, 1987.
- [46] C. Oară, “Constructive solutions to spectral and inner-outer factorizations with respect to the disk,” *Automatica*, vol. 41, pp. 1855–1866, 2005.
- [47] T. Söderström, *Discrete-time stochastic systems*, Springer, second edition, 2002.
- [48] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, *Optimal filtering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1979.
- [49] J. M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Addison Wesley, Wokingham, England, 1989.
- [50] L. Ljung, *System Identification. Theory for the User*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [51] T. Söderström and P. Stoica, *System Identification*, Prentice Hall, New York, 1989.
- [52] D.C. Youla, H.A. Jabr, and J.J. Bongiorno, “Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part II: The multivariable case,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 21, no. 3, pp. 319–338, 1976.
- [53] J.C. Doyle, B.A. Francis, and A. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [54] M. Salgado, “Inversión, un concepto unificador en la enseñanza del control automático,” *Revista Iberoamericana de Automática y Informática industrial*, vol. 3, no. 1, pp. 5–15, 2006.
- [55] B.D.O. Anderson and J. B. Moore, *Linear Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [56] B.D.O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [57] J. Chen, Sh. Hara, and G. Chen, “Best tracking and regulation performance under control effort constraint: two-parameter controller case,” in *IFAC, 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain*, 2002.
- [58] R.C. Dorf and J.A. Svoboda, *Circuitos Eléctricos: Introducción al análisis y diseño*, Alfaomega, 2000.
- [59] G. C. Goodwin, M. E. Salgado, and J. I. Yuz, “Performance limitations for linear feedback systems in the presence of plant uncertainty,” *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 48, pp. 1312–1319, 2003.
- [60] M. A. García, M. E. Salgado, and E. I. Silva, “Achievable performance bounds for tall MIMO systems,” *IET Control Theory and Applications*, vol. 5, pp. 736–743, 2011.

-
- [61] M. A. García, E. I. Silva, and M. E. Salgado, “On tracking performance limits for tall systems,” in *18^o IFAC World Congress*, Milán 2011.
- [62] R. Horn and C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (9th reprint), 1999.
- [63] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., 9th edition, 1999.
- [64] M.E. Salgado and E.I. Silva, “Robustness issues in \mathcal{H}_2 optimal control of unstable plants,” *Systems & Control Letters*, vol. 55, no. 2, pp. 124 – 131, February 2006.
- [65] N. P. Karcanias, *Geometric theory of zeros and its use in feedback analysis*, Ph.D. thesis, Electrical Engineering Department, The University of Manchester Institute of Science and technology, November 1975.