

Límites de desempeño en control de sistemas multivariables con canales de comunicación adicionales e imperfectos.

Tesis de Grado presentada como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Civil Electrónico
y al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica

Patricio Esteban Valenzuela Pacheco

Departamento de Electrónica
Universidad Técnica Federico Santa María

12 de Octubre de 2011

El presente trabajo de tesis se enmarca en

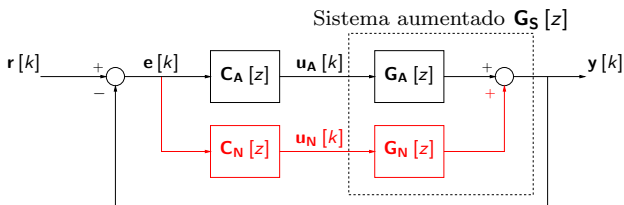
- Sistemas de tiempo discreto, lineales e invariantes en el tiempo.
- Plantas altas (cuadradas) modificadas a plantas cuadradas (altas) mediante la adición (eliminación) de canales de control.

El presente trabajo de tesis se enmarca en

- Sistemas de tiempo discreto, lineales e invariantes en el tiempo.
- Plantas altas (cuadradas) modificadas a plantas cuadradas (altas) mediante la adición (eliminación) de canales de control.

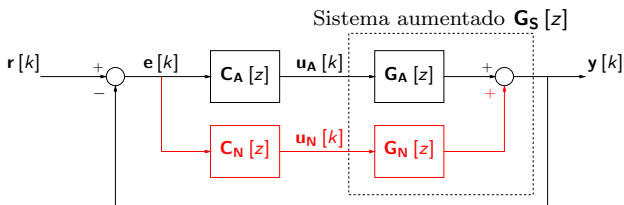
- 1 Motivación
- 2 Límites de desempeño: problema de regulación
 - Problema de regulación en sistemas altos
 - Problema de regulación en sistemas aumentados
 - Ejemplo numérico
- 3 Límites de desempeño: problema de seguimiento
 - Problema de seguimiento en sistemas altos
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados con defectos
 - Análisis de casos
- 4 Conclusiones y trabajo futuro

- 1 Motivación
- 2 Límites de desempeño: problema de regulación
 - Problema de regulación en sistemas altos
 - Problema de regulación en sistemas aumentados
 - Ejemplo numérico
- 3 Límites de desempeño: problema de seguimiento
 - Problema de seguimiento en sistemas altos
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados con defectos
 - Análisis de casos
- 4 Conclusiones y trabajo futuro



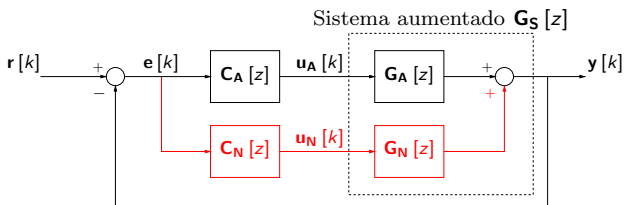
- El sistema inicial $G_A[z]$ es alto.
- Para mejorar el desempeño del sistema, se agregan canales de control $u_N[k]$, lo que permite modificar la respuesta del sistema $y[k]$, mediante una nueva transferencia $G_N[z]$.
- Usaremos límites de desempeño para comparar la calidad del control de ambos sistemas.

Motivación



- El sistema inicial $G_A[z]$ es **alto**.
- Para mejorar el desempeño del sistema, se agregan canales de control $u_N[k]$, lo que permite modificar la respuesta del sistema $y[k]$, mediante una nueva transferencia $G_N[z]$.
- Usaremos límites de desempeño para comparar la calidad del control de ambos sistemas.

Motivación



- El sistema inicial $G_A[z]$ es **alto**.
- Para mejorar el desempeño del sistema, se agregan canales de control $u_N[k]$, lo que permite modificar la respuesta del sistema $y[k]$, mediante una nueva transferencia $G_N[z]$.
- Usaremos límites de desempeño para comparar la calidad del control de ambos sistemas.

Límites de desempeño y sistemas aumentados

- Se define por **límite de desempeño** al mejor desempeño alcanzable en el control lineal de una planta, sin restricciones en la actuación.
- Los límites de desempeño se expresan en función de ciertos rasgos dinámicos de la planta.
- En base al desempeño óptimo, se cuantifica los beneficios de emplear **sistemas aumentados**.

Límites de desempeño y sistemas aumentados

- Se define por **límite de desempeño** al mejor desempeño alcanzable en el control lineal de una planta, sin restricciones en la actuación.
- Los límites de desempeño se expresan en función de ciertos rasgos dinámicos de la planta.
- En base al desempeño óptimo, se cuantifica los beneficios de emplear **sistemas aumentados**.

Límites de desempeño y sistemas aumentados

- Se define por **límite de desempeño** al mejor desempeño alcanzable en el control lineal de una planta, sin restricciones en la actuación.
- Los límites de desempeño se expresan en función de ciertos rasgos dinámicos de la planta.
- En base al desempeño óptimo, se cuantifica los beneficios de emplear **sistemas aumentados**.

La configuración de lazo cerrado presenta algunas dificultades:

- 1 El sistema $\mathbf{G}_A [z]$ no garantiza error estacionario cero para todas sus salidas; $\mathbf{G}_S [z]$ lo logra siempre que sea una **planta ancha**, bajo suposiciones adecuadas.
- 2 El índice que se emplee debe cuantificar en forma **justa** los beneficios de agregar canales de actuación.
- 3 El índice de desempeño debe reflejar si los canales adicionales poseen defectos.

Debido a las diferencias estructurales entre sistemas altos y cuadrados, surgen las siguientes interrogantes:

- ¿Qué índice debiese usarse para cuantificar los beneficios de agregar canales de control?
- ¿Cuál es el impacto sobre la calidad de control de un sistema si los nuevos canales poseen defectos?

Estas interrogantes son estudiadas en esta tesis.

Debido a las diferencias estructurales entre sistemas altos y cuadrados, surgen las siguientes interrogantes:

- ¿Qué índice debiese usarse para cuantificar los beneficios de agregar canales de control?
- ¿Cuál es el impacto sobre la calidad de control de un sistema si los nuevos canales poseen defectos?

Estas interrogantes son estudiadas en esta tesis.

Las principales contribuciones de esta tesis son:

- 1 La definición de un índice de desempeño que compara de manera justa a sistemas altos y aumentados.
- 2 La obtención de formas cerradas para el mejor desempeño alcanzable en sistemas de control, frente a problemas de regulación y seguimiento.
- 3 En base al índice propuesto, el estudio de los beneficios de agregar nuevos canales de actuación a un sistema.

Las principales contribuciones de esta tesis son:

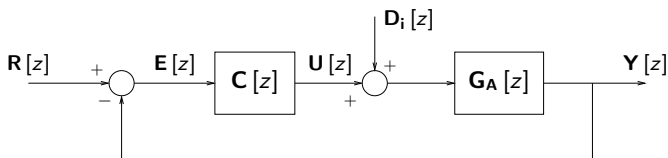
- 1 La definición de un índice de desempeño que compara de manera justa a sistemas altos y aumentados.
- 2 La obtención de formas cerradas para el mejor desempeño alcanzable en sistemas de control, frente a problemas de regulación y seguimiento.
- 3 En base al índice propuesto, el estudio de los beneficios de agregar nuevos canales de actuación a un sistema.

Las principales contribuciones de esta tesis son:

- 1 La definición de un índice de desempeño que compara de manera justa a sistemas altos y aumentados.
- 2 La obtención de formas cerradas para el mejor desempeño alcanzable en sistemas de control, frente a problemas de regulación y seguimiento.
- 3 En base al índice propuesto, el estudio de los beneficios de agregar nuevos canales de actuación a un sistema.

- 1 Motivación
- 2 Límites de desempeño: problema de regulación
 - Problema de regulación en sistemas altos
 - Problema de regulación en sistemas aumentados
 - Ejemplo numérico
- 3 Límites de desempeño: problema de seguimiento
 - Problema de seguimiento en sistemas altos
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados con defectos
 - Análisis de casos
- 4 Conclusiones y trabajo futuro

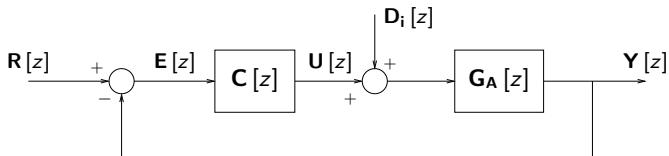
Formulación del problema: sistemas altos



$G_A[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$ ($n > m$) una planta LTI, donde:

- $r[k] \in \mathbb{R}^n$ es la referencia
- $e[k] \in \mathbb{R}^n$ es el error de seguimiento
- $u[k] \in \mathbb{R}^m$ es la señal de control
- $d_i[k] \in \mathbb{R}^m$ es una perturbación de entrada
- $y[k] \in \mathbb{R}^n$ es la respuesta del sistema
- $C[z] \in \mathcal{R}_p^{m \times n}$ es un controlador LTI.

Formulación del problema: sistemas altos

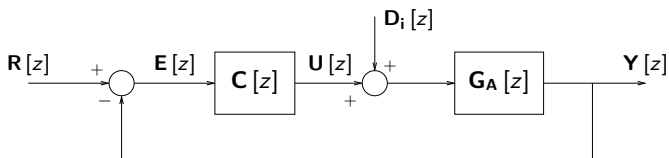


Se medirá el desempeño del sistema empleando

$$J_{A,d} = \mathcal{E}_{\nu} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}[k]^T \mathbf{e}[k] \right\},$$

cuando $\mathbf{d}_i[k] = \boldsymbol{\nu} \delta[k]$, y donde $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^m$.

Formulación del problema: sistemas altos



Si el sistema es **internamente estable**, entonces

$$\begin{aligned} J_{A,d} &= \mathcal{E}_{\nu} \left\{ \|\mathbf{E}[z]\|_2^2 \right\} \\ &= \mathcal{E}_{\nu} \left\{ \|(\mathbf{X}_D[z] \mathbf{N}_I[z] - \mathbf{N}_D[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_I[z]) \nu\|_2^2 \right\}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}$ y $\mathbf{X}_D[z]$, $\mathbf{N}_I[z]$, $\mathbf{N}_D[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}$.

Suposición 1

El vector de perturbación $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^m$ es una variable aleatoria, que satisface

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\boldsymbol{\nu}} \{ \boldsymbol{\nu} \} &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{E}_{\boldsymbol{\nu}} \{ \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T \} &= \mathbf{I}_m,\end{aligned}$$

donde \mathbf{I}_m es la matriz identidad de dimensiones $m \times m$.

Empleando la suposición anterior, se tiene

Problema 1

Determine

$$J_{A,d}^{\text{opt}} \triangleq \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}} \|\mathbf{X}_D[z] \mathbf{N}_I[z] - \mathbf{N}_D[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_I[z]\|_2^2,$$

y, si el ínfimo es alcanzable, calcule $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}$ que lo alcanza.

Teorema 1

Considere el problema definido previamente, una planta $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$, $n > m$, y supuestos adecuados. Entonces,

$$J_{A,d}^{\text{opt}} = \left\| \left\{ \mathbf{N}_{D_o} [z] \mathbf{X}_I [z] \mathbf{E}_{D,dc} [z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2^\perp} - \left\{ \mathbf{N}_{D_o} [z] \mathbf{X}_I [z] \mathbf{E}_{D,dc} [z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2^\perp} \Big|_{z=0} \right\|_2^2.$$

El Teorema 1 entrega el desempeño óptimo para sistemas altos, expresándolo como función implícita de los ceros de FNM del sistema, contenidos en $\mathbf{E}_{D,dc} [z]$.

Teorema 2

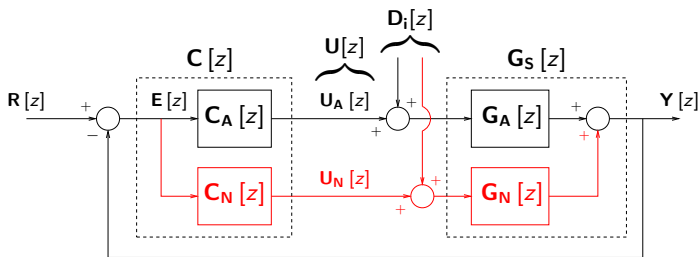
Considere el problema definido previamente, una planta $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times 1}$, y supuestos adecuados. Entonces,

$$J_{A,d}^{\text{opt}} = \sum_{i=0}^{n_z-1} \alpha_i^2 + \sum_{h=1}^{n_c} \sum_{l=1}^{n_c} \left\{ m_h m_l \frac{(|c_h|^2 - 1)(|c_l|^2 - 1)}{c_h c_l - 1} \times \sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i c_h^{n_z-i-1} \sum_{j=n_z}^{\infty} \alpha_j c_l^{n_z-j-1} \right\}.$$

El Teorema 2 entrega una forma cerrada para el desempeño óptimo de regulación en sistemas SIMO que poseen ceros de FNM finitos no repetidos, pero arbitrarios para el caso infinito (cf. Bakhtiar et al 2008).

- 1 Motivación
- 2 Límites de desempeño: problema de regulación
 - Problema de regulación en sistemas altos
 - Problema de regulación en sistemas aumentados
 - Ejemplo numérico
- 3 Límites de desempeño: problema de seguimiento
 - Problema de seguimiento en sistemas altos
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados con defectos
 - Análisis de casos
- 4 Conclusiones y trabajo futuro

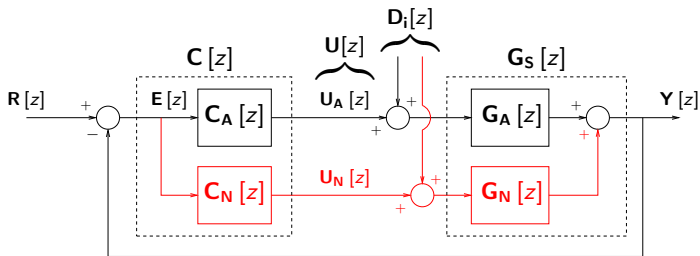
Formulación del problema: sistemas aumentados



Consideramos que $n - m$ nuevos canales de control se agregan a una planta alta $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$. Así, la nueva matriz de transferencia es

$$\mathbf{G}_S[z] \triangleq \left[\mathbf{G}_A[z] \parallel \mathbf{G}_N[z] \right].$$

Formulación del problema: sistemas aumentados

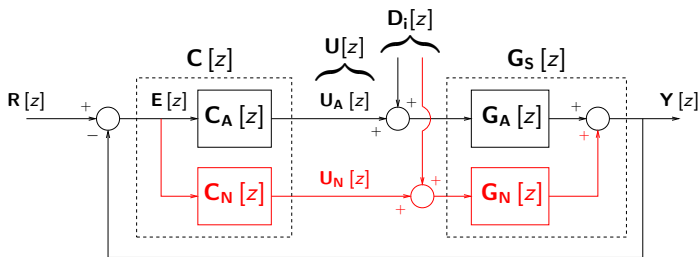


El desempeño del lazo cerrado se mide empleando

$$J_{S,d} = \mathcal{E}_{\boldsymbol{\nu}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}[k]^T \mathbf{e}[k] \right\},$$

cuando $\mathbf{d}_i[k] \triangleq \boldsymbol{\nu} \delta[k]$, y donde $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$.

Formulación del problema: sistemas aumentados

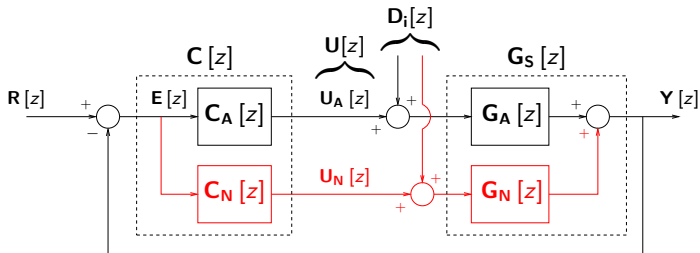


Considerando el sistema internamente estable, entonces

$$J_{S,d} = \mathcal{E}_{\nu} \left\{ \left\| (\mathbf{X}_D[z] \mathbf{N}_I[z] - \mathbf{N}_D[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_I[z]) \nu \right\|_2^2 \right\},$$

donde $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}$ y $\mathbf{X}_D[z], \mathbf{N}_I[z], \mathbf{N}_D[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}$.

Formulación del problema: sistemas aumentados



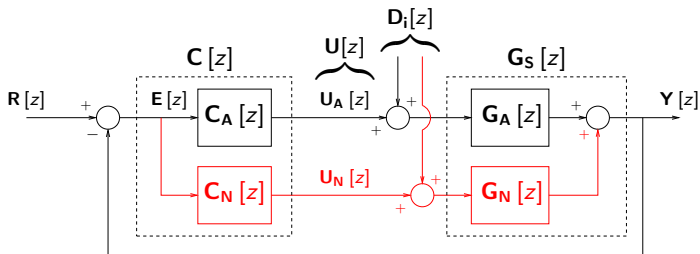
Para evaluar de forma justa los beneficios de aumentar $\mathbf{G}_A[z]$ con $n-m$ nuevas actuaciones, se supondrá que sólo los m canales iniciales son perturbados por $\mathbf{d}_i[k]$.

Suposición 2

El vector de perturbación $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria, que satisface

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\nu}}\{\boldsymbol{\nu}\} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{E}_{\boldsymbol{\nu}}\{\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T\} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Formulación del problema: sistemas aumentados



Para evaluar de forma justa los beneficios de aumentar $\mathbf{G}_A[z]$ con $n-m$ nuevas actuaciones, se supondrá que sólo los m canales iniciales son perturbados por $\mathbf{d}_i[k]$.

Suposición 2

El vector de perturbación $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria, que satisface

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\nu}}\{\boldsymbol{\nu}\} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{E}_{\boldsymbol{\nu}}\{\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^T\} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Empleando la suposición anterior, se tiene

Problema 2

Determine

$$J_{S,d}^{\text{opt}} \triangleq \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}} \|\mathbf{X}_D[z] \mathbf{N}_I^a[z] - \mathbf{N}_D[z] \mathbf{Q}[z] \mathbf{N}_I^a[z]\|_2^2,$$

y, si el ínfimo es alcanzable, calcule $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}$ que lo alcanza.

Teorema 3

Considere el problema definido previamente, una planta $\mathbf{G}_S [z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A [z] \\ \mathbf{G}_N [z] \end{bmatrix} \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times n}$, y supuestos adecuados sobre $\mathbf{G}_S [z]$. Entonces,

$$J_{S,d}^{\text{opt}} = \text{traza} \left\{ \mathbf{T}_1 + \sum_{l=1}^{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_k}{\bar{c}_l c_k (\bar{c}_l c_k - 1)} - \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_k^H}{\bar{c}_k} \mathbf{E}_{l,c} [\bar{c}_k^{-1}]^{-1} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j \bar{c}_k^{j-i} \right\},$$

donde

$$\mathbf{T}_1 \triangleq \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{l=0}^r \mathbf{B}_j^T \mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_l \mathbf{B}_{j-i+l}.$$

Desempeño óptimo de regulación: comparación

El Teorema 3 muestra que la presencia de ceros de FNM empeoran el desempeño óptimo de una planta aumentada.
No obstante,

Corolario 1

Si una planta $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$ es aumentada a una planta $\mathbf{G}_S[z] = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A[z] \\ \mathbf{G}_N[z] \end{bmatrix} \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times n}$, entonces $J_{S,d}^{\text{opt}} \leq J_{A,d}^{\text{opt}}$.

El Teorema 3 muestra que la presencia de ceros de FNM empeoran el desempeño óptimo de una planta aumentada.

No obstante,

Corolario 1

Si una planta $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$ es aumentada a una planta $\mathbf{G}_S [z] = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A [z] \\ \mathbf{G}_N [z] \end{bmatrix} \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times n}$, entonces $J_{S,d}^{\text{opt}} \leq J_{A,d}^{\text{opt}}$.

- 1 Motivación
- 2 Límites de desempeño: problema de regulación
 - Problema de regulación en sistemas altos
 - Problema de regulación en sistemas aumentados
 - Ejemplo numérico
- 3 Límites de desempeño: problema de seguimiento
 - Problema de seguimiento en sistemas altos
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados con defectos
 - Análisis de casos
- 4 Conclusiones y trabajo futuro

Ejemplo numérico

Considere un sistema SITO definido como

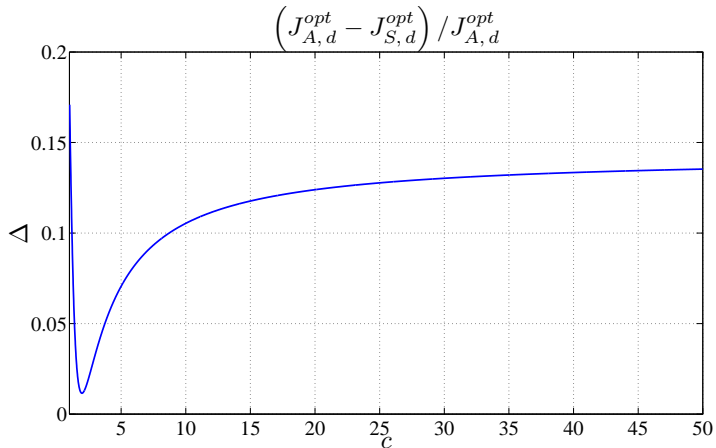
$$\mathbf{G}_A [z] \triangleq \left[\frac{3(z-c)}{z^2(z-0.8)} \quad \frac{2(z-c)}{z^2(z-0.2)} \right]^T, \quad c \in \mathbb{R}, c > 1.$$

Se propone aumentar el sistema a

$$\mathbf{G}_S [z] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{3(z-c)}{z^2(z-0.8)} & \frac{z-0.3}{z^2} \\ \frac{2(z-c)}{z^2(z-0.2)} & \frac{2(z-0.3)}{z(z-0.2)} \end{array} \right].$$

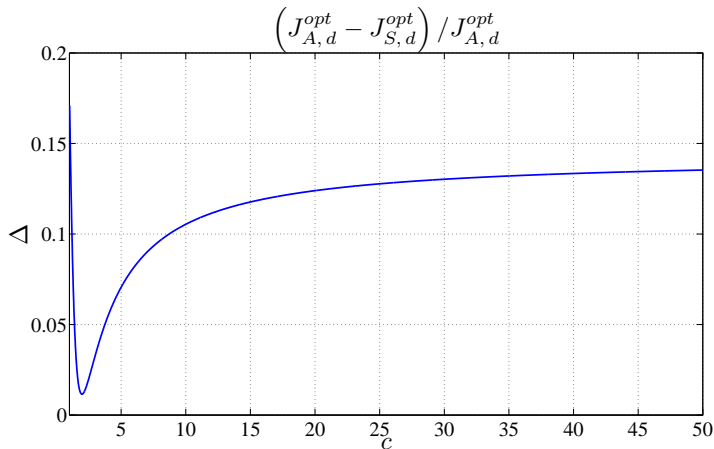
Se estudiará $\Delta = \left(J_{A,d}^{\text{opt}} - J_{S,d}^{\text{opt}} \right) \left(J_{A,d}^{\text{opt}} \right)^{-1}$.

Ejemplo numérico



- A pesar de que el ejemplo es simple, se aprecia que la dependencia de Δ en c no es trivial.

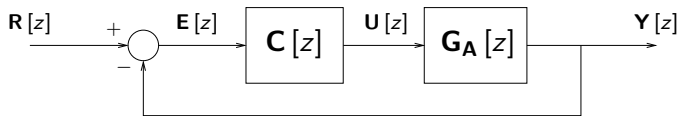
Ejemplo numérico



- Consistente con el Corolario 1, la figura muestra que $\Delta \geq 0$.

- 1 Motivación
- 2 Límites de desempeño: problema de regulación
 - Problema de regulación en sistemas altos
 - Problema de regulación en sistemas aumentados
 - Ejemplo numérico
- 3 Límites de desempeño: problema de seguimiento
 - Problema de seguimiento en sistemas altos
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados con defectos
 - Análisis de casos
- 4 Conclusiones y trabajo futuro

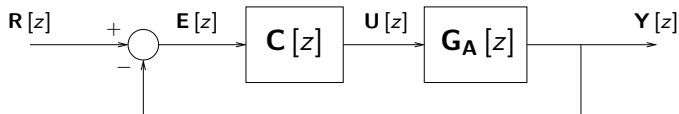
Formulación del problema



$\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$ ($n \geq m$) es una planta LTI, donde:

- $\mathbf{r}[k] \in \mathbb{R}^n$ es la referencia
- $\mathbf{e}[k] \in \mathbb{R}^n$ es el error de seguimiento
- $\mathbf{u}[k] \in \mathbb{R}^m$ es la señal de control
- $\mathbf{y}[k] \in \mathbb{R}^n$ es la respuesta del sistema
- $\mathbf{C}[z] \in \mathcal{R}_p^{m \times n}$ es un controlador LTI.

Formulación del problema



Suposición 3

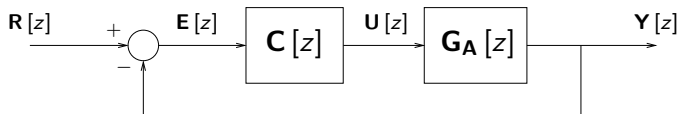
$\mathbf{r}[k] \triangleq \boldsymbol{\nu} \lambda^k$, donde $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$, $|\lambda| < 1$ y $k \in \mathbb{N}_0$.

Suposición 4

El vector $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ es una variable aleatoria, que satisface

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\nu}} \{ \boldsymbol{\nu} \} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{E}_{\boldsymbol{\nu}} \{ \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\nu}^T \} = \mathbf{I}_n.$$

Formulación del problema: sistemas altos



Se medirá el desempeño del sistema empleando

$$J_{A,t} = \mathcal{E}_{\nu} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}[k]^T \mathbf{e}[k] \right\} = \mathcal{E}_{\nu} \left\{ \left\| \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A[z] \mathbf{Q}[z] \right) \frac{z \boldsymbol{\nu}}{z - \lambda} \right\|_2^2 \right\},$$

donde $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}$.

El problema se puede escribir como

Problema 3

Determine

$$J_{A,t}^{\text{opt}} \triangleq \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}} \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_A[z] \mathbf{Q}[z]) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2,$$

y, si el ínfimo es alcanzable, calcule $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}$ que lo alcanza.

Teorema 4

Considere el problema definido previamente, una planta $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$, $n \geq m$, con descripción inner-outer $\mathbf{G}_A[z] \triangleq \mathbf{G}_{A_i}[z] \mathbf{G}_{A_o}[z]$. Entonces,

$$\mathbf{Q}^{\text{opt}}[z] \triangleq \mathbf{G}_{A_o}[z]^{-1} \mathbf{G}_{A_i}[\lambda^{-1}]^T,$$

con costo óptimo

$$J_{A,t}^{\text{opt}} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \mathbf{G}_{A_i}[\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{A_i}[\lambda^{-1}]^T \right\} \right).$$

El resultado presentado en el Teorema 4 expresa el costo óptimo $J_{A,t}^{\text{opt}}$ como una función implícita de los ceros de FNM finitos e infinitos de la planta $\mathbf{G}_A[z]$, contenidos en $\mathbf{G}_{A_i}[z]$.

Teorema 4

Considere el problema definido previamente, una planta $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$, $n \geq m$, con descripción inner-outer $\mathbf{G}_A[z] \triangleq \mathbf{G}_{A_i}[z] \mathbf{G}_{A_o}[z]$. Entonces,

$$\mathbf{Q}^{\text{opt}}[z] \triangleq \mathbf{G}_{A_o}[z]^{-1} \mathbf{G}_{A_i}[\lambda^{-1}]^T,$$

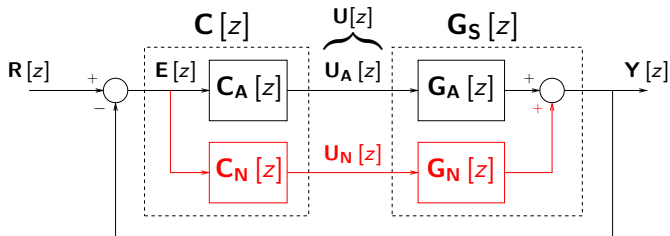
con costo óptimo

$$J_{A,t}^{\text{opt}} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \mathbf{G}_{A_i}[\lambda^{-1}] \mathbf{G}_{A_i}[\lambda^{-1}]^T \right\} \right).$$

El resultado presentado en el Teorema 4 expresa el costo óptimo $J_{A,t}^{\text{opt}}$ como una función implícita de los ceros de FNM finitos e infinitos de la planta $\mathbf{G}_A[z]$, contenidos en $\mathbf{G}_{A_i}[z]$.

- 1 Motivación
- 2 Límites de desempeño: problema de regulación
 - Problema de regulación en sistemas altos
 - Problema de regulación en sistemas aumentados
 - Ejemplo numérico
- 3 Límites de desempeño: problema de seguimiento
 - Problema de seguimiento en sistemas altos
 - **Problema de seguimiento en sistemas aumentados**
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados con defectos
 - Análisis de casos
- 4 Conclusiones y trabajo futuro

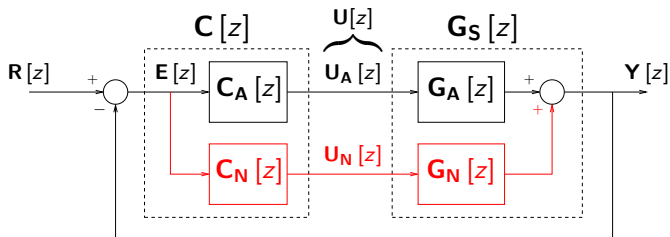
Formulación del problema: sistemas aumentados



A modo de mejorar el desempeño del sistema, se agregan nuevos canales de actuación $\mathbf{u}_N[k] \in \mathbb{R}^{n-m}$. La planta resultante es

$$\mathbf{G}_S[z] \triangleq \left[\mathbf{G}_A[z] \parallel \mathbf{G}_N[z] \right].$$

Formulación del problema: sistemas aumentados



Se mide el desempeño del sistema mediante

$$J_{S,t} = \mathcal{E}_{\mathbf{v}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{e}[k]^T \mathbf{e}[k] \right\} = \mathcal{E}_{\mathbf{v}} \left\{ \left\| \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_S[z] \mathbf{Q}[z] \right) \frac{z \mathbf{v}}{z - \lambda} \right\|_2^2 \right\},$$

donde $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}$.

El problema se define como

Problema 4

Determine

$$J_{S,t}^{\text{opt}} \triangleq \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}} \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_S[z] \mathbf{Q}[z]) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2,$$

y, si el ínfimo es alcanzable, calcule $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}$ que lo alcanza.

Corolario 2

Considere el problema definido previamente, una planta $\mathbf{G}_S [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$. Defina $\mathbf{G}_S [z] \triangleq \mathbf{E}_{I,dc} [z] \mathbf{G}_{S,FM} [z]$, donde $\mathbf{E}_{I,dc} [z]$ es el interactor unitario izquierdo de ceros de FNM de $\mathbf{G}_S [z]$. Entonces,

$$\mathbf{Q}^{\text{opt}} [z] \triangleq \mathbf{G}_{S,FM} [z]^{-1} \mathbf{E}_{I,dc} [\lambda^{-1}]^T,$$

con costo óptimo

$$J_{S,t}^{\text{opt}} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{I,dc} [\lambda^{-1}] \mathbf{E}_{I,dc} [\lambda^{-1}]^T \right\} \right).$$

El Corolario 2 expresa el costo óptimo $J_{S,t}^{\text{opt}}$ como una función de los ceros de FNM de la planta $\mathbf{G}_S [z]$, contenidos en $\mathbf{E}_{I,dc} [z]$.

Corolario 2

Considere el problema definido previamente, una planta $\mathbf{G}_S [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$. Defina $\mathbf{G}_S [z] \triangleq \mathbf{E}_{I,dc} [z] \mathbf{G}_{S,FM} [z]$, donde $\mathbf{E}_{I,dc} [z]$ es el interactor unitario izquierdo de ceros de FNM de $\mathbf{G}_S [z]$. Entonces,

$$\mathbf{Q}^{\text{opt}} [z] \triangleq \mathbf{G}_{S,FM} [z]^{-1} \mathbf{E}_{I,dc} [\lambda^{-1}]^T,$$

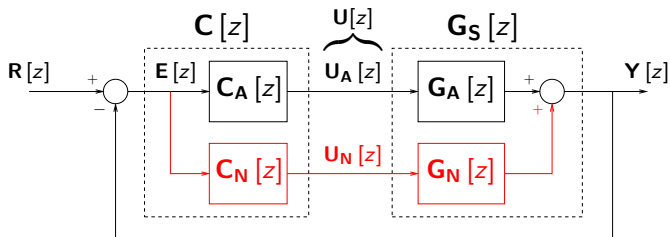
con costo óptimo

$$J_{S,t}^{\text{opt}} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \mathbf{E}_{I,dc} [\lambda^{-1}] \mathbf{E}_{I,dc} [\lambda^{-1}]^T \right\} \right).$$

El Corolario 2 expresa el costo óptimo $J_{S,t}^{\text{opt}}$ como una función de los ceros de FNM de la planta $\mathbf{G}_S [z]$, contenidos en $\mathbf{E}_{I,dc} [z]$.

- 1 Motivación
- 2 Límites de desempeño: problema de regulación
 - Problema de regulación en sistemas altos
 - Problema de regulación en sistemas aumentados
 - Ejemplo numérico
- 3 Límites de desempeño: problema de seguimiento
 - Problema de seguimiento en sistemas altos
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados con defectos
 - Análisis de casos
- 4 Conclusiones y trabajo futuro

Formulación del problema



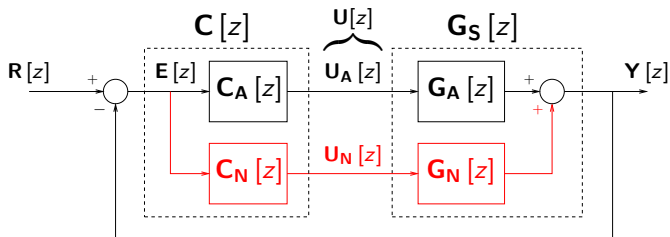
¿Qué ocurre si los canales de actuación poseen defectos?

En esta tesis se considera el funcional modificado

$$J_{S,r} \triangleq \mathcal{E}_v \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{e}[k]^T \mathbf{e}[k] + \mathbf{u}_F[k]^T \mathbf{u}_F[k] \right) \right\},$$

donde $\mathbf{U}_F[z] \triangleq \mathbf{N}[z] \mathbf{U}[z]$ es la actuación filtrada, $\mathbf{N}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}$.

Formulación del problema



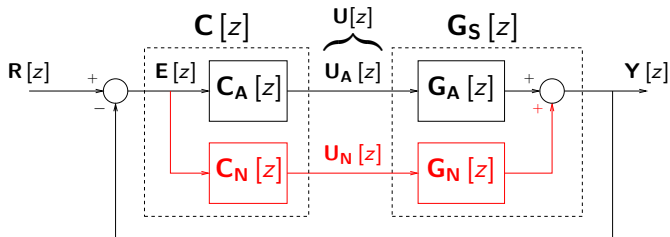
¿Qué ocurre si los canales de actuación poseen defectos?

En esta tesis se considera el funcional modificado

$$J_{S,r} \triangleq \mathcal{E}_v \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbf{e}[k]^T \mathbf{e}[k] + \mathbf{u}_F[k]^T \mathbf{u}_F[k] \right) \right\},$$

donde $\mathbf{U}_F[z] \triangleq \mathbf{N}[z] \mathbf{U}[z]$ es la actuación filtrada, $\mathbf{N}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}$.

Formulación del problema



Dado que interesa estudiar el desempeño cuando los canales adicionales poseen defectos, se define

$$\mathbf{N}[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-m} \} \end{bmatrix} F[z],$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, \dots, n-m\}$ y $F[z] \in \mathcal{RH}_\infty$.

El problema se define como

Problema 5

Determine

$$J_{S,r}^{\text{opt}} \triangleq \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}} \left\{ \left\| (\mathbf{I}_n - \mathbf{G}_S[z] \mathbf{Q}[z]) \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 + \left\| \mathbf{N}[z] \mathbf{Q}[z] \frac{1}{z - \lambda} \right\|_2^2 \right\},$$

y, si el ínfimo es alcanzable, calcule $\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}$ que lo alcanza.

Teorema 5

Considere una planta definida como $\mathbf{G}_S [z] \triangleq \mathbf{E}_{I,dc} [z] \mathbf{G}_{S,FM} [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$, donde $\mathbf{E}_{I,dc} [z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$ corresponde al interactor unitario izquierdo de ceros de FNM de $\mathbf{G}_S [z]$. Además, considere la factorización inner-outer

$$\mathbf{G}_{aug} [z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{S,FM} [z] \\ \hline -\mathbf{N} [z] \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{aug_i} [z] \mathbf{G}_{aug_o} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{2n \times n}.$$

Bajo las definiciones anteriores, el valor óptimo está dado por

$$J_{S,r}^{\text{opt}} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(n - \text{traza} \left\{ \mathbf{A} [\lambda^{-1}] \mathbf{A} [\lambda^{-1}]^T \right\} \right),$$

donde $\mathbf{A} [\lambda^{-1}] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{I,dc} [\lambda^{-1}] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{G}_{aug_i} [\lambda^{-1}]$.

Considerando los resultados obtenidos, es posible concluir que

Corolario 3

Si una planta $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$, $n > m$, es aumentada a $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$, entonces siempre se satisface que

$$J_{S,t}^{\text{opt}} \leq J_{S,r}^{\text{opt}} \leq J_{A,t}^{\text{opt}}.$$

Considerando los resultados obtenidos, es posible concluir que

Corolario 3

Si una planta $\mathbf{G}_A[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times m}$, $n > m$, es aumentada a $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$, entonces siempre se satisface que

$$J_{S,t}^{\text{opt}} \leq J_{S,r}^{\text{opt}} \leq J_{A,t}^{\text{opt}}.$$

Desempeño óptimo de seguimiento: comparación

Similarmente, cuando los sistemas aumentados contienen canales adicionales con retardos, se puede concluir que

Corolario 4

Considere una planta $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$, con $\mathbf{G}_N[z] \triangleq z^{-d} \mathbf{G}_{N,d}[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times (n-m)}$, siendo $\mathbf{G}_{N,d}[z]$ una matriz de transferencia estable, bipropia, y posiblemente con ceros de FNM finitos.

Bajo los supuestos anteriores, se cumple que

$$J_{A,t}^{\text{opt}} = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} J_{S,t} \right\}.$$

Similarmente, cuando los sistemas aumentados contienen canales adicionales con retardos, se puede concluir que

Corolario 4

Considere una planta $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times n}$, con $\mathbf{G}_N[z] \triangleq z^{-d} \mathbf{G}_{N,d}[z] \in \mathcal{RH}_2^{n \times (n-m)}$, siendo $\mathbf{G}_{N,d}[z]$ una matriz de transferencia estable, bipropia, y posiblemente con ceros de FNM finitos.

Bajo los supuestos anteriores, se cumple que

$$J_{A,t}^{\text{opt}} = \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} J_{S,t} \right\}.$$

- 1 Motivación
- 2 Límites de desempeño: problema de regulación
 - Problema de regulación en sistemas altos
 - Problema de regulación en sistemas aumentados
 - Ejemplo numérico
- 3 Límites de desempeño: problema de seguimiento
 - Problema de seguimiento en sistemas altos
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados con defectos
 - **Análisis de casos**
- 4 Conclusiones y trabajo futuro

A fin de analizar los beneficios de agregar canales de actuación, se proponen los siguientes casos de estudio:

- Impacto de los ceros de FNM finitos.
- Impacto de los retardos.
- Impacto de la restricción de BW.

Estos casos serán analizados a través del índice de desempeño del problema de seguimiento, definiendo

$$\mathbf{r}[k] \triangleq (0.9)^k \boldsymbol{\nu}, \text{ con } k \in \mathbb{N}_0 \text{ y } \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n.$$

A fin de analizar los beneficios de agregar canales de actuación, se proponen los siguientes casos de estudio:

- Impacto de los ceros de FNM finitos.
- Impacto de los retardos.
- Impacto de la restricción de BW.

Estos casos serán analizados a través del índice de desempeño del problema de seguimiento, definiendo

$$\mathbf{r}[k] \triangleq (0.9)^k \boldsymbol{\nu}, \text{ con } k \in \mathbb{N}_0 \text{ y } \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n.$$

Caso 1: Ceros de FNM finitos

Considere un sistema alto $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 1}$ definido como

$$\mathbf{G}_A [z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z - c}{z^2} \\ \frac{z - c}{z(z - 0.3)} \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}, |c| > 1.$$

Se propone aumentar el sistema a $\mathbf{G}_S [z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 2}$, dado por

$$\mathbf{G}_S [z] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_A [z] & \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} \\ \hline & \frac{1}{z - 0.2} \end{array} \right].$$

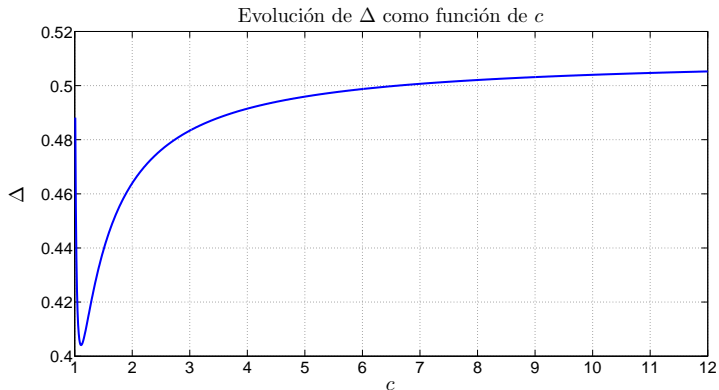
Caso 1: Ceros de FNM finitos

$$\mathbf{G}_A[z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z-c}{z^2} \\ \frac{z-c}{z(z-0.3)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_S[z] \triangleq \left[\mathbf{G}_A[z] \begin{array}{c} \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z-0.2} \end{array} \right].$$

Se medirá la mejora en el desempeño mediante

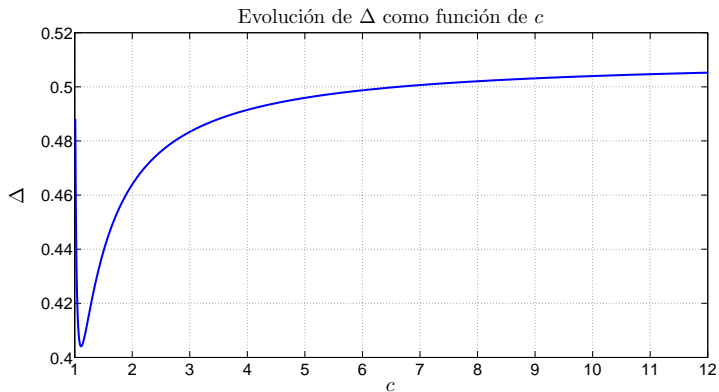
$$\Delta \triangleq \frac{J_{A,t}^{\text{opt}} - J_{S,t}^{\text{opt}}}{J_{A,t}^{\text{opt}}},$$

Caso 1: Ceros de FNM finitos



- Existe una mejora notoria en el desempeño del sistema aumentado, en comparación con el sistema alto.

Caso 1: Ceros de FNM finitos



- El mínimo de Δ como función de c ocurre debido a la igualdad $c = \lambda^{-1}$.

Caso 2: Retardos de propagación

Considere un sistema alto $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 1}$ definido como

$$\mathbf{G}_A [z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z - 0.1}{z^2} \\ \frac{z - 0.1}{z(z - 0.3)} \end{bmatrix} .$$

Se propone aumentar el sistema a $\mathbf{G}_S [z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 2}$, dado por

$$\mathbf{G}_S [z] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_A [z] & \begin{bmatrix} \frac{z - 0.6}{z^d (z - 0.4)} \\ 1 \\ \frac{1}{z^{(d-1)} (z - 0.2)} \end{bmatrix} \end{array} \right] .$$

Caso 2: Retardos de propagación

$$\mathbf{G}_A [z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z - 0.1}{z^2} \\ \frac{z - 0.1}{z(z - 0.3)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_S [z] \triangleq \left[\mathbf{G}_A [z] \left| \begin{array}{c} \frac{z - 0.6}{z^d (z - 0.4)} \\ 1 \\ \hline \frac{1}{z^{(d-1)} (z - 0.2)} \end{array} \right. \right].$$

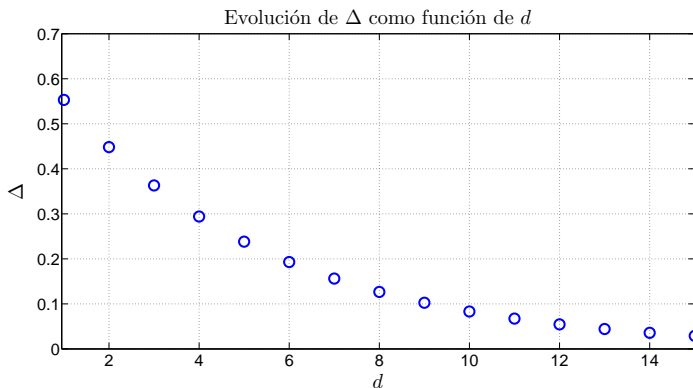
Se analizará la evolución de Δ como función de $d \in \mathbb{N}$, donde

$$\Delta \triangleq \frac{J_{A,t}^{\text{opt}} - J_{S,t}^{\text{opt}}}{J_{A,t}^{\text{opt}}}.$$

En este caso,

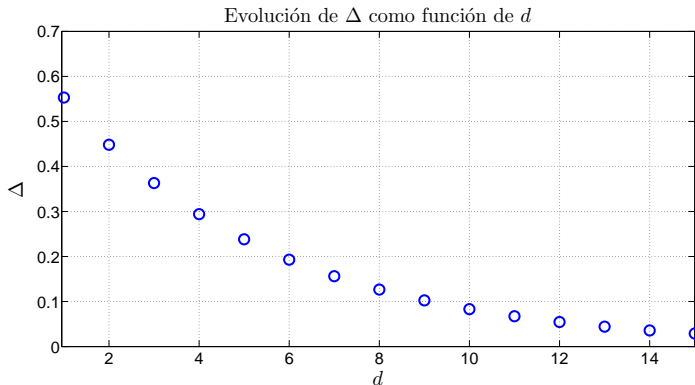
$$J_{A,t}^{\text{opt}} = 6.29.$$

Caso 2: Retardos de propagación



- Los retardos aumentan el valor óptimo alcanzable por la planta $G_S [z]$.

Caso 2: Retardos de propagación



- Cuando $d \rightarrow \infty$, se cumple que $J_{S,t}^{\text{opt}}$ tiende a $J_{A,t}^{\text{opt}}$, en consistencia con los resultados presentados.

Caso 3: Restricciones de BW

Considere un sistema alto $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 1}$ definido como

$$\mathbf{G}_A [z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z - 1.01}{z^2} \\ \frac{z - 1.01}{z(z - 0.3)} \end{bmatrix} .$$

Se propone aumentar el sistema a $\mathbf{G}_S [z] \in \mathcal{RH}_2^{2 \times 2}$, dado por

$$\mathbf{G}_S [z] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_A [z] & \begin{array}{c} \frac{1}{z} \\ \\ \\ \frac{1}{z - 0.2} \end{array} \end{array} \right] .$$

Caso 3: Restricciones de BW

$$\mathbf{G}_A [z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z - 1.01}{z^2} \\ \frac{z - 1.01}{z(z - 0.3)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_S [z] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_A [z] & \begin{matrix} \frac{1}{z} \\ \\ \frac{1}{z - 0.2} \end{matrix} \end{array} \right].$$

En este caso,

$$J_{A,t}^{\text{opt}} = 7.63,$$

$$J_{S,t}^{\text{opt}} = 3.90.$$

Caso 3: Restricciones de BW

$$\mathbf{G}_A [z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z - 1.01}{z^2} \\ \frac{z - 1.01}{z(z - 0.3)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_S [z] \triangleq \left[\mathbf{G}_A [z] \left| \begin{array}{c} \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z - 0.2} \end{array} \right. \right].$$

Se analizará en el impacto de restricciones en los nuevos canales de control sobre el desempeño $J_{S,r}^{\text{opt}}$. Con $\alpha \in \mathbb{R}$, se define

$$\mathbf{N} [z] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \frac{1.95(z - 1)}{z + 0.95}.$$

Este filtro penaliza cambios bruscos de la señal de actuación.

Caso 3: Restricciones de BW

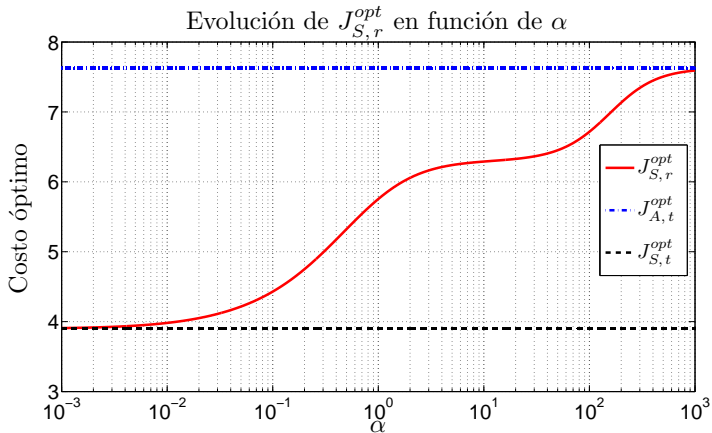
$$\mathbf{G}_A [z] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{z - 1.01}{z^2} \\ \frac{z - 1.01}{z(z - 0.3)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_S [z] \triangleq \left[\mathbf{G}_A [z] \left| \begin{array}{c} \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z - 0.2} \end{array} \right. \right].$$

Se analizará en el impacto de restricciones en los nuevos canales de control sobre el desempeño $J_{S,r}^{\text{opt}}$. Con $\alpha \in \mathbb{R}$, se define

$$\mathbf{N} [z] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \frac{1.95(z - 1)}{z + 0.95}.$$

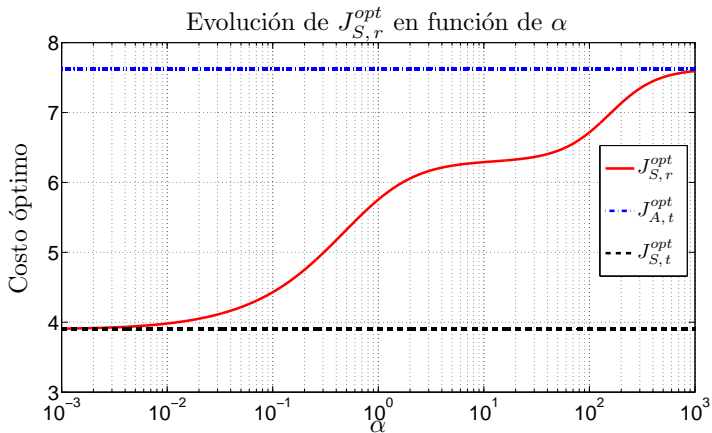
Este filtro penaliza cambios bruscos de la señal de actuación.

Caso 3: Restricciones de BW



- El ejemplo es consistente con la desigualdad $J_{S,t}^{opt} \leq J_{S,r}^{opt} \leq J_{A,t}^{opt}$.

Caso 3: Restricciones de BW



- El desempeño óptimo $J_{S,r}^{opt}$ se iguala a $J_{S,t}^{opt}$ o $J_{A,t}^{opt}$ para valores extremos de α .

- 1 Motivación
- 2 Límites de desempeño: problema de regulación
 - Problema de regulación en sistemas altos
 - Problema de regulación en sistemas aumentados
 - Ejemplo numérico
- 3 Límites de desempeño: problema de seguimiento
 - Problema de seguimiento en sistemas altos
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados con defectos
 - Análisis de casos
- 4 Conclusiones y trabajo futuro

Respecto al desempeño en regulación de sistemas aumentados:

- Se ha definido un índice de desempeño que garantiza una comparación justa de sistemas altos y aumentados.
- Los desempeños óptimos se han expresado como función de ciertos rasgos dinámicos de la planta.
- Se ha establecido que el desempeño óptimo de un sistema aumentado siempre será mejor (o a lo sumo igual) que el desempeño obtenido para plantas altas.

Respecto al desempeño en seguimiento de sistemas aumentados:

- Se han obtenido formas cerradas para el mejor desempeño alcanzable por sistemas altos y aumentados.
- Los desempeños óptimos reflejan una dependencia implícita de ciertos rasgos dinámicos de la planta, así como del número de canales de salida y el tipo de referencia empleada.
- Empleando los desempeños óptimos, se ha concluido que el desempeño de sistemas aumentados es mejor que el de sistemas altos, frente al mismo problema de control.

Respecto al análisis por casos:

- Se ha estudiado el impacto de diferentes rasgos estructurales sobre las mejoras en el desempeño de un sistema.
- La adición de nuevos canales de control siempre mejora el desempeño del sistema.
- Se ha observado que los retardos de propagación en los nuevos canales de actuación limitan las mejoras en el desempeño del sistema.
- Igualmente, las restricciones de velocidad de actuación imponen limitaciones sobre las mejoras en el desempeño del sistema.

Como trabajo futuro se propone:

- Extensión del análisis de desempeño en seguimiento a sistemas inestables.
- Análisis de problemas de optimización con restricciones sobre un subconjunto de canales de salida.
- Estudio de sistemas aumentados con defectos estocásticos en los canales de control.
- Análisis de las mejoras en el desempeño, considerando referencias y perturbaciones sinusoidales de frecuencia conocida.

El desarrollo de este trabajo de tesis dio origen a la siguiente publicación:



P. E. Valenzuela, M. E. Salgado, and E. I. Silva, “Performance bounds for SIMO and squared-up plant models,” in *Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2011.

Muchas gracias por su atención.

Límites de desempeño en control de sistemas multivariables con canales de comunicación adicionales e imperfectos.

Tesis de Grado presentada como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Civil Electrónico
y al grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica

Patricio Esteban Valenzuela Pacheco

Departamento de Electrónica
Universidad Técnica Federico Santa María

12 de Octubre de 2011

- 1 Motivación
- 2 Límites de desempeño: problema de regulación
 - Problema de regulación en sistemas altos
 - Problema de regulación en sistemas aumentados
 - Ejemplo numérico
- 3 Límites de desempeño: problema de seguimiento
 - Problema de seguimiento en sistemas altos
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados
 - Problema de seguimiento en sistemas aumentados con defectos
 - Análisis de casos
- 4 Conclusiones y trabajo futuro

Apéndice I: Sobre supuestos en el Teorema 1

El resultado óptimo del Teorema 1 ha sido obtenido considerando

- 1 $\mathbf{G}_A [z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$ posee n_c ceros de FNM finitos $c_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, n_c$) y n_z ceros de FNM en infinito.
- 2 $\mathbf{G}_A [z]$ no posee ceros en $|z| = 1$.

Adicionalmente, se ha definido

- 1 $\mathbf{N}_{I,FM} [z] \triangleq \mathbf{N}_I [z] \mathbf{E}_{D,dc} [z]^{-1}$, donde $\mathbf{E}_{D,dc} [z] \in \mathcal{R}^{m \times m}$ es un interactor unitario derecho de grado y de ceros de FNM finitos de $\mathbf{N}_I [z]$.
- 2 $\mathbf{N}_D [z] \triangleq \mathbf{N}_{Di} [z] \mathbf{N}_{Do} [z]$, donde $\mathbf{N}_{Di} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$ corresponde al factor inner y $\mathbf{N}_{Do} [z] \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$ es el factor outer.

Apéndice I: Sobre supuestos en el Teorema 1

El resultado óptimo del Teorema 1 se obtiene escogiendo $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{\text{opt}}[z]$, donde

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\text{opt}}[z] &\triangleq \arg \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}} J_{A,d} \\ &= \mathbf{N}_{D_o}[z]^{-1} \left(\left\{ \mathbf{N}_{D_o}[z] \mathbf{X}_I[z] \mathbf{E}_{D,dc}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2^{\perp}} \Big|_{z=0} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \mathbf{N}_{D_o}[z] \mathbf{X}_I[z] \mathbf{E}_{D,dc}[z]^{-1} \right\}_{\mathcal{H}_2} \right) \mathbf{N}_{I,FM}[z]^{\dagger},\end{aligned}$$

donde $\mathbf{N}_{I,FM}[z]^{\dagger} \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}$ es una pseudo inversa izquierda de $\mathbf{N}_{I,FM}[z]$.

Apéndice II: Sobre supuestos en el Teorema 2

El resultado óptimo del Teorema 2 ha sido obtenido considerando los mismos supuestos y definiciones presentados en el Teorema 1. Además, se define

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{N}_{\text{Do}}[z] \mathbf{X}_I[z] \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_i z^{-i}, \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{E}_{\text{D, dc}}[z] \triangleq \frac{1}{z^{n_z}} \prod_{i=1}^{n_c} \frac{z - c_i}{1 - z \bar{c}_i}.$$

Entonces, el valor óptimo $J_{A,d}^{\text{opt}}$ se obtiene escogiendo $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{\text{opt}}[z]$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{\text{opt}}[z] &\triangleq \arg \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{1 \times n}} J_{A,d} \\ &= \mathbf{N}_{\text{Do}}[z]^{-1} (\mathbf{M}_1[0] + \mathbf{M}_2[z]) \mathbf{N}_{I, \text{FM}}[z]^{\dagger}, \end{aligned}$$

Apéndice II: Sobre supuestos en el Teorema 2

donde

$$\mathbf{M}_2 [z] \triangleq \prod_{i=1}^{n_c} \frac{1 - z \bar{c}_i}{z - c_i} \sum_{l=n_z}^{\infty} \alpha_l z^{n_z-l} - \sum_{j=1}^{n_c} \left\{ m_j \frac{1 - z \bar{c}_j}{z - c_j} \sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i c_j^{n_z-i} \right\},$$

$$\mathbf{M}_1 [0] \triangleq - \sum_{j=1}^{n_c} \left\{ m_j \sum_{i=n_z}^{\infty} \alpha_i c_j^{n_z-i-1} \right\},$$

$$m_j \triangleq \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_c} \frac{1 - c_j \bar{c}_k}{c_j - c_k},$$

y $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}} [z]^\dagger \in \mathcal{RH}_\infty^{1 \times n}$ es una pseudo inversa izquierda de $\mathbf{N}_{\mathbf{I}, \mathbf{FM}} [z]$.

Apéndice III: Sobre supuestos en el Teorema 3

El resultado óptimo presentado en el Teorema 3 considera

- 1 $\mathbf{G}_S[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times n}$ tiene n_c ceros de FNM finitos no repetidos ubicados en c_i , ($i = 1, \dots, n_c$) y n_z ceros de FNM en infinito.
- 2 $\mathbf{G}_S[z]$ no posee ceros ni polos en $|z| = 1$.

Además, se define

- 1 $\mathbf{N}_I[z] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{N}_I^a[z] \\ \mathbf{N}_I^s[z] \end{bmatrix}$, donde $\mathbf{N}_I^a[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$ y $\mathbf{N}_I^s[z] \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times (n-m)}$.
- 2 $\mathbf{N}_D[z] \triangleq \mathbf{E}_{I,dc}[z] \mathbf{N}_{D,FM}[z]$, donde $\mathbf{E}_{I,dc}[z]$ es el interactor unitario izquierdo de ceros de FNM de $\mathbf{N}_D[z]$.
- 3 $\mathbf{N}_I^a[z] \triangleq \mathbf{N}_{I,FM}^a[z] \mathbf{E}_{D,dc}^a[z]$, donde $\mathbf{E}_{D,dc}^a[z]$ es el interactor unitario derecho de ceros de FNM de $\mathbf{N}_I^a[z]$.

Apéndice III: Sobre supuestos en el Teorema 3

Entonces, la solución óptima $J_{S,d}^{\text{opt}}$ se obtiene escogiendo $\mathbf{Q}[z] = \mathbf{Q}^{\text{opt}}[z]$, donde

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\text{opt}}[z] &\triangleq \arg \inf_{\mathbf{Q}[z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times n}} J_{S,d} \\ &= \mathbf{N}_{D,FM}[z]^{-1} \left(\mathbf{R}_2[z] - \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_k}{c_k} \right) \mathbf{N}_{I,FM}^a[z]^{\dagger},\end{aligned}$$

donde $\mathbf{N}_{I,FM}^a[z]^{\dagger} \in \mathcal{RH}_{\infty}^{m \times n}$ es una pseudo inversa izquierda de $\mathbf{N}_{I,FM}^a[z]$,

$$\mathbf{A}_k \triangleq \mathbf{M}_k \sum_{i=0}^r \sum_{j=i}^{\infty} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j c_k^{i-j},$$

Apéndice III: Sobre supuestos en el Teorema 3

$\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son los coeficientes de la expansión en serie de potencias

$$\mathbf{X}_D [z] \mathbf{N}_{i, \text{FM}}^a [z] \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{B}_j z^{-j},$$

$$\mathbf{E}_{l, d} [z] \triangleq \sum_{i=0}^r \mathbf{C}_i z^i,$$

$\mathbf{R}_2 [z] \in \mathcal{RH}_{\infty}^{n \times m}$ está dado por

$$\mathbf{R}_2 [z] \triangleq \mathbf{E}_{l, c} [z]^{-1} \sum_{i=0}^r \sum_{j=i}^{\infty} \mathbf{C}_i \mathbf{B}_j z^{i-j} - \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathbf{A}_k}{z - c_k},$$

y

$$\mathbf{M}_k \triangleq \mathbf{L}_{k,1,k-1} \left\{ \frac{1-c_k}{1-\bar{c}_k} \left(1 - |c_k|^2\right) \boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^H \right\} \mathbf{L}_{k,k+1,n_c},$$

donde

$$\mathbf{L}_{k,j,h} \triangleq \prod_{i=j}^h \left\{ \left(\frac{1-c_i}{1-\bar{c}_i} \cdot \frac{1-c_k \bar{c}_i}{c_k - c_i} \right) \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_i^H + \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H \right\}.$$

Apéndice IV: Sobre construcción de interactor unitario izquierdo

Considere un sistema $\mathbf{P}[z] \in \mathcal{R}_{sp}^{n \times m}$, $n \leq m$, con n_c ceros de FNM finitos y n_z ceros de FNM en infinito. Entonces, un interactor unitario izquierdo de ceros de FNM de $\mathbf{P}[z]$ puede ser obtenido como

$$\mathbf{P}_{FM}[z] \triangleq \mathbf{E}_{I,c}[z]^{-1} \mathbf{E}_{I,d}[z]^{-1} \mathbf{P}[z],$$

donde $\mathbf{P}_{FM}[z] \in \mathcal{R}_p^{n \times n}$ es una matriz de transferencia de FM y bipropia, en tanto que $\mathbf{E}_{I,c}[z]$ y $\mathbf{E}_{I,d}[z]$ corresponden a interactores unitarios izquierdos de ceros de FNM finitos e infinitos de $\mathbf{P}[z]$, respectivamente, donde

$$\mathbf{E}_{I,d}[z]^{-1} \triangleq \prod_{i=1}^{n_z} \left\{ z \boldsymbol{\eta}_{\infty i} \boldsymbol{\eta}_{\infty i}^H + \mathbf{U}_{\infty i} \mathbf{U}_{\infty i}^H \right\},$$
$$\mathbf{E}_{I,c}[z]^{-1} \triangleq \prod_{i=1}^{n_c} \left\{ \left(\frac{1 - c_i}{1 - \bar{c}_i} \cdot \frac{1 - z \bar{c}_i}{z - c_i} \right) \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_i^H + \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H \right\},$$

Apéndice IV: Sobre construcción de interactores unitarios izquierdo

donde $\boldsymbol{\eta}_{\infty i} \in \mathbb{C}^n$ corresponde a la dirección unitaria izquierda asociada al i -ésimo cero de FNM en infinito extraído de $\mathbf{P}[z]$, en tanto que $\boldsymbol{\eta}_i \in \mathbb{C}^n$ corresponde a la dirección unitaria izquierda asociada al i -ésimo cero de FNM finito extraído de $\mathbf{E}_{\mathbf{I},d}[z]^{-1} \mathbf{P}[z]$. Por otro lado, $\mathbf{U}_{\infty i} \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)}$ y $\mathbf{U}_i \in \mathbb{C}^{n \times (n-1)}$ constituyen matrices unitarias que satisfacen

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_{\infty i} \boldsymbol{\eta}_{\infty i}^H + \mathbf{U}_{\infty i} \mathbf{U}_{\infty i}^H &= \mathbf{I}_n, \\ \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_i^H + \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H &= \mathbf{I}_n,\end{aligned}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n_z\}, \forall j \in \{1, \dots, n_c\}.$$

Apéndice IV: Sobre construcción de interactores unitarios izquierdo

Bajo la notación y definiciones anteriores,

$$\mathbf{E}_{I,dc}[z] \triangleq \mathbf{E}_{I,d}[z] \mathbf{E}_{I,c}[z],$$

se define como un interactivo unitario de ceros de FNM finitos e infinitos de $\mathbf{P}[z]$.

Note que se puede obtener $\mathbf{E}_{D,dc}[z]$ para el caso $n > m$ a través del mismo procedimiento, considerando la planta $\mathbf{P}[z]^T$.