Institutionen för Matematik, KTH,
Olle S.

Lösningsförslag till tentan i Matte 2, 01–04–17.

1.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{1-\cos^2 x} = \{u = \cos x,\ du = -\sin x\, dx\}$$
$$= \int_{1/\sqrt{2}}^{0} \frac{-du}{1-u^2} = -\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{(u-1)(u+1)}$$
$$= -\int_{0}^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1/2}{u-1} - \frac{1/2}{u+1}\right) du = \frac{1}{2}\Big[\ln|u+1| - \ln|u-1|\Big]_0^{1/\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left((\sqrt{2}+1)^2\right)$$
$$= \ln(\sqrt{2}+1).$$

2.

(a) $y = kx$ med $k \neq 0 \Rightarrow f(x,kx) = \dfrac{2kx^3}{x^4+kx^2} = x \cdot \dfrac{2k}{k^2+x^2} \to 0$

då $x \to 0$;

$y = 0 \Rightarrow f(x,0) = \dfrac{0}{x^4} = 0$ då $x \neq 0$ och $\to 0$ då $x \to 0$;

$x = 0 \Rightarrow f(0,y) = \dfrac{0}{y^2} = 0$ då $y \neq 0$ och $\to 0$ då $y \to 0$.

(b) $f(x,x^2) = \dfrac{2x^4}{x^4+x^4} = 1$ då $x \neq 0$ och $\to 1$ då $x \to 0$.

(c) (a) och (b) $\Rightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ finns *inte*.

3. Skärningen mellan planen ges av

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & (1) \\ 3x + 2y + 2z = 7 & (2) \end{cases}$$

$$(2)-(1) \Rightarrow 2x+3z=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\,z;$$
$$3\cdot(1)-(2) \Rightarrow 4y-5z=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\,z.$$

$$z=s \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{s}{4}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix},$$

det vill säga en rät linje som är parallell med

$$L_2\colon \quad (x,y,z)=(1,3,2)+t\,(6,-5,-4).$$

$s=1 \Rightarrow$ punkten $(1,1,1)$ ligger på L_1. $t=0 \Rightarrow (1,2,3)$ ligger på L_2. Vektorerna $(1,3,2)-(1,1,1)=(0,2,1)$ och $(6,-5,-4)$ är parallella med planet $\Rightarrow$ planet har normalvektorn

$$(0,2,1)\times(6,-5,-4)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -3\cdot(1,-2,4) \Rightarrow$$

$\boldsymbol{n}=(1,-2,4)$ är en normalvektor. Så planets ekvation ges av

$$(1,-2,4)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0 \Leftrightarrow x-2y+4z=3.$$

4.

$$\det B = 3-2=1 \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{aligned} C = B^{-1}AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \\ A = BCB^{-1} &\Rightarrow A^9 = BC^9B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2^{10} & 3\cdot 2^9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3-2^{10} & 3+3\cdot 2^9 \\ -2-2^{10} & 2+3\cdot 2^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1027 & 1539 \\ -1026 & 1538 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Vi har att

$$
\begin{aligned}
(C^{-1}B^{-1}A^{-1})(ABC) &= \{A^{-1}A = E\} = C^{-1}B^{-1}BC = \{B^{-1}B = E\} \\
&= C^{-1}C = E;
\end{aligned}
$$

på samma sätt är

$$(ABC)(C^{-1}B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Så $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

6. Eftersom $\operatorname{grad}(x^4 + xy + y^2) = (4x^3 + y, x + 2y)$, så är $\boldsymbol{n} = (4 \cdot 2^3 - 3, 2 - 2 \cdot 3) = (29, -4)$ en normalvektor till kurvan i punkten $(2, -3)$. Så (x, y) ligger på tangentlinjen genom kurvan om och endast om

$$0 = (29, -4) \cdot (x - 2, y + 3) = 29x - 4y - 58 - 12,$$

det vill säga den sökta tangentlinjen ges av

$$29x - 4y = 70.$$

7. Kedjeregeln ger att

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot (2x - 2y) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 0, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot (-2y - 2x) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1,
\end{aligned}
$$

så att

$$
\begin{aligned}
0 &= (x + y)\,\frac{\partial z}{\partial x} + (x - y)\,\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 - y^2)\,\frac{\partial z}{\partial u} - 2(x^2 - y^2)\,\frac{\partial z}{\partial u} + (x - y)\,\frac{\partial z}{\partial v} \\
&= (x - y)\,\frac{\partial z}{\partial v} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \text{ då } x - y \neq 0;\ \frac{\partial z}{\partial v} \text{ kontinuerlig } \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \text{ över-}
\end{aligned}
$$

allt $\Rightarrow z$ beror inte på $v \Rightarrow z = f(u)$.

Slutsats: $z = f(x^2 - y^2 - 2xy)$, där f är en godtycklig kontinuerligt deriverbar envariabelsfunktion.

8. (a) d på (*) ger att

$$\begin{cases} y^2\,dx + 2xy\,dy + z\,du + u\,dz + 2v\,dv = 0, \\ 3x^2z\,dx + x^3\,dz + 2\,dy - v\,du - u\,dv = 0, \\ u\,dx + x\,du + v\,dy + y\,dv - yz\,dx - xz\,dy - xy\,dz = 0. \end{cases}$$

Insättning av $x = y = z = u = v = 1$ ger följande lineära system för differentialerna:

$$\begin{cases} dx + 2\,dy + dz + du + 2\,dv = 0, \\ 3\,dx + 2\,dy + dz - du - dv = 0, \\ 0\,dx + 0\,dy - dz + du + dv = 0. \end{cases}$$

Sista ekvationen ger att

$$\boxed{dz = du + dv}\;;$$

detta insatt i de två första ger att

$$\begin{cases} dx + 2\,dy + 2\,du + 3\,dv &= 0, \\ 3\,dx + 2\,dy &= 0. \end{cases}$$

Andra ekvationen $\Rightarrow$ $2\,dy = -3\,dx$; insatt i första ekvationen fås $-2\,dx + 2\,du + 3\,dv = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{dx = du + \frac{3}{2}\,dv} \quad \Rightarrow \quad \boxed{dy = -\frac{3}{2}\,du - \frac{9}{4}\,dv}.$$

Eftersom dx, dy och dz kan lösas ut som lineärkombinationer av du och dv vid punkten $(1,1,1,1,1)$, så säger implicita funktionssatsen att x, y och z kan lösas ut som funktioner av u och v nära denna punkt.

(b) Då $(u,v) = (1,1)$ ger ovanstående att

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{3}{2},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{9}{4},$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v} = 1.$$

9.

$$Q = (x\,y\,z)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}.$$

$$0 = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-6)\,(\lambda-3)^2 + (\lambda-6)$$

$$= -(\lambda-6)\,(\lambda^2-6\,\lambda+8) = -(\lambda-6)\,(\lambda-4)\,(\lambda-2) \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} 2 \\ 4 \\ 6. \end{cases}$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow A-2E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 4 \Rightarrow A-4E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 6 \Rightarrow A-6E = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Med

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

fås att $A = PDP^t$, varpå

$$\begin{aligned} Q &= \boldsymbol{x}^t PDP^t\boldsymbol{x} = \{\boldsymbol{x}' = P^t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'^t = \boldsymbol{x}^t P\} = \boldsymbol{x}'^t D\boldsymbol{x}' \\ &= 2\,(x')^2 + 4\,(y')^2 + 6\,(z')^2, \end{aligned}$$

där

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

det vill säga

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \\ y' = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \\ z' = z. \end{cases}$$

10. Efter att ha gjort en lämplig vridning kan vi anta att rektangelns hörn är belägna i punkterna $(\pm x, \pm y)$, där $x > 0$, $y > 0$ och $x^2 + y^2 = 1$, vilket innebär att den sökta ytan är lika med $4xy$. Vi får därför följande problem:

    Maximera $f(x, y) = 4xy$ under bivillkoret
    $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

    1. Med Lagrange: $\operatorname{grad} f = 4\,(y, x)$, $\operatorname{grad} g = 2\,(x, y) \;\Rightarrow$ Lagrangesystemet

$$\begin{cases} 4y = 2\lambda x \\ 4x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

    $x > 0$ och $y > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2y}{x} = \frac{2x}{y} \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = x$ (eftersom båda är positiva); detta insatt i sista ekvationen ger

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

    så att den maximala ytan blir $4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$.

    2. Enklare variant: (x, y) på enhetscirkeln och $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow$ finns vinkel $\theta \in (0, \pi/2)$ så att $x = \cos\theta$ och $y = \sin\theta$. Då blir problemet:

    Maximera $f(\theta) = 4\cos\theta\sin\theta$ då $0 < \theta < \pi/2$.

    Eftersom $f(\theta) = 2\sin 2\theta$ blir det största värdet uppenbarligen lika med $2 \cdot 1 = 2$ då $2\theta = \pi/2$, det vill säga $\theta = \pi/4$.