Institutionen för Matematik, KTH,
Olle S. och Gunnar J.

Tentamen i 5B1116 Matematik 2 för E, IT och Media, 01–04–17, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Ange dina bonuspoäng på omslaget.
- Uppgifterna nedan är tillsammans värda 35 poäng, vilket betyder att man med bonuspoängen maximalt kan komma upp i 35+4=39 poäng.
- *Normalt* används följande betygsgränser: 16–21 p ger betyget 3, 22–29 p ger betyget 4, och 30–39 p ger betyget 5. *Observera dock* att dessutom kan helhetsintrycket påverka betyget (uppåt eller nedåt).
- Varje lösning *skall* åtföljas av förklarande text och/eller figur. Alla räkningar skall redovisas. I den mån man använder sig av kända satser, så skall förutsättningarna för dessa anges.
- Det kommmer att finnas ett lösningsförslag på adressen

  www.math.kth.se/~olles/matte2vt01.pdf

  efter skrivningens slut.

1. Beräkna integralen
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}.$$
Tips: Förläng integranden med $\sin x$ först och utnyttja sedan den trigonometriska ettan. (3p)

2. Betrakta funktionen
$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}, \qquad \text{definierad då } (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Visa att $f(x,y) \to 0$ då (x,y) går mot $(0,0)$ längs en godtycklig rät linje genom origo. (1p)

(b) Visa att $f(x,y) \to 1$ då (x,y) går mot $(0,0)$ längs $y = x^2$. (1p)

(c) Vilken slutsats kan man dra från (a) och (b) angående gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ ?}$$

(1p)

3. Visa att de två planen $x + 2y - z = 2$ och $3x + 2y + 2z = 7$ skär varandra längs en rät linje L_1, som är parallell med den räta linjen $L_2\colon (x,y,z) = (1,3,2) + t\,(6,-5,-4)$. (2p)

   Bestäm sedan ekvationen för det plan som innehåller båda linjerna L_1 och L_2. (2p)

4. Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Visa att $C = B^{-1}AB$ är en diagonalmatris. (1p)

   (b) Använd (a) för att beräkna A^9. (2p)

5. Låt A, B och C vara inverterbara $n \times n-$matriser. Visa att matrisprodukten ABC också är inverterbar, och bestäm dess invers. (3p)

6. Visa att punkten $(2,-3)$ ligger på kurvan

$$x^4 + xy + y^2 = 19,$$

   och bestäm sedan kurvans tangentlinje i denna punkt. (3p)

7. Betrakta den partiella differentialekvationen

$$(x+y)\,\frac{\partial z}{\partial x} + (x-y)\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad (*)$$

   Konstatera först att koordinattransformationen

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 - 2xy, \\ v = y \end{cases}$$

ger en drastisk förenkling av (*), och använd sedan detta faktum för att bestämma den allmänna lösningen $z(x, y)$ (där $z(x, y)$ antas ha kontinuerliga förstaderivator) till (*). (4p)

8. Systemet

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3, \\ x^3z + 2y - uv = 2, \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases} \tag{*}$$

kan geometriskt tolkas som skärningen mellan tre hyperytor i det 5-dimensionella rummet $\mathbb{R}^5_{xyzuv}$—så att (*) bör vara betyda en 2-dimensionell yta i detta 5-dimensionella rum.

(a) Kontrollera att punkten $(1, 1, 1, 1, 1)$ uppfyller (*), och visa att man nära denna punkt kan lösa ut x, y och z som funktioner av u och v, så att man får en funktion

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2_{uv} &\to \mathbb{R}^3_{xyz} \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \end{aligned}$$

Detta innebär att (*) i en omgivning av $(1, 1, 1, 1, 1)$ kan uppfattas som grafen av funktionen $\boldsymbol{f}$. (3p)

(b) Bestäm förstaderivatorna av de tre funktionerna $x(u, v)$, $y(u, v)$ och $z(u, v)$ i punkten $(u, v) = (1, 1)$. (1p)

9. Bestäm en ortogonal koordinattransformation $(x, y, z) \to (x', y', z')$ som överför den kvadratiska formen

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 2xy$$

på kanonisk form—d.v.s. så att $Q(x', y', z')$ inte innehåller några blandade termer $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$—och ange denna. (4p)

10. Bestäm den största rektangulära yta som får plats inuti enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. (4p)

LYCKA TILL!