Institutionen för Matematik
Olle Stormark

**Lösningsförslag till tentamen i 5B1201 Komplex Analys
för T2, 01–12–20.**

1. *Bestäm* alla *lösningarna till ekvationen* $\sin z - \cos z = 0$.

$$\begin{aligned}
\sin z - \cos z = 0 &\iff \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) - \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0 \\
&\iff (1-i)e^{iz} - (1+i)e^{-iz} = 0 \\
&\iff e^{iz} = \frac{1+i}{1-i}e^{-iz} \\
&\iff e^{2iz} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \\
&\iff 2iz = \log i = \ln 1 + i(\pi/2 + n\cdot 2\pi) = i(\pi/2 + n\cdot 2\pi) \\
&\iff z = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .
\end{aligned}$$

2. *Visa att om en analytisk funktion är* rent reell *i en viss domän, så måste den faktiskt vara* konstant *där.*

$$\begin{aligned}
&f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ med } v = 0 \text{ för alla } (x,y) \in D \\
&\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \text{ enligt C-R att } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\
&\Rightarrow u = \text{konstant } \Rightarrow f = \text{konstant.}
\end{aligned}$$

3. (a) *Betrakta funktionen*

$$f(z) = \frac{3}{z(z+3)}.$$

Denna funktion kan Laurentserieutvecklas i två olika (maximala) områden omkring $z = 0$. Ange dessa två områden!

(b) *Bestäm de två Laurentserierna omkring $z = 0$.*

$f(z)$ analytisk utom i $z = 0$ och $z = -3$ ger att $f(z)$ kan Laurentserieutvecklas i cirkelringarna $\{0 < |z| < 3\}$ och $\{3 < |z| < \infty\}$ runt 0. Vi har

$$f(z) = \frac{3}{z(z+3)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+3}.$$

Då $0 < |z| < 3$—d.v.s. $|z/3| < 1$—får man med hjälp av geometriska serien:

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(-1)\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\, z^n,$$

så att

$$f(z) = z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\, z^n \qquad \text{då } 0 < |z| < 3.$$

Då $3 < |z| < \infty$—d.v.s. $|3/z| < 1$—fås istället:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+3} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{-3}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n z^{-n} \\ &= \frac{1}{z} \cdot (1 + (-3)z^{-1} + (-3)^2 z^{-2} + \dots) \\ &= z^{-1} + (-3)z^{-2} + (-3)^2 z^{-3} + \dots \\ &= z^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} (-3)^{-n-1} z^n, \end{aligned}$$

så att

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^n.$$

4. *Beräkna integralen*

$$\oint_{|z+1+i|=4} z^3 \cos(1/z)\, dz.$$

Integranden är analytisk överallt utom i $z = 0$, som ligger innanför integrationskurvan, varför integralen är lika med

$$2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[z^3 \cos(1/z), 0\right]$$

enligt residysatsen. Eftersom

$$\cos w = 1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + \ldots$$

ger substitutionen $w = 1/z$ att

$$z^3 \cos(1/z) = z^3 - \frac{1}{2!} z + \frac{1}{4!} z^{-1} + \ldots,$$

varför residyn = (koefficienten framför z^{-1}) är lika med $1/4!$. Därmed blir

$$\text{integralen } = \frac{2\pi i}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{\pi i}{12}.$$

5. *Beräkna integralen*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5 + 3\cos\theta}\, d\theta.$$

Substitutionen $z = e^{i\theta}$ då $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ger att $dz = e^{i\theta}\, i\, d\theta = iz\, d\theta$ och

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

varför integralen blir lika med

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}(z + 1/z)}{5 + \frac{3}{2}(z + 1/z)} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \cdot \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{(10z + 3z^2 + 3)z}\, dz \\ &= \frac{1}{3i} \cdot \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{(z^2 + \frac{10}{3} z + 1)z}\, dz, \end{aligned}$$

där nämnaren är lika med 0 då $z = 0$, $z = -1/3$ och $z = -3$, varav de två första nollställena ligger innanför integrationskurvan. Så med

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z^2 + \frac{10}{3} z + 1)z}$$

ger residysatsen att

$$I = \frac{2\pi i}{3i} \cdot \left(\operatorname{Res}\left[f(z), 0\right] + \operatorname{Res}\left[f(z), -1/3\right]\right),$$

där

$$\operatorname{Res}\left[f(z), 0\right] = \frac{\frac{z^2+1}{z^2+(10/3)\,z+1}}{1}\bigg|_{z=0} = 1$$

och

$$\operatorname{Res}\left[f(z), -1/3\right] = \frac{z+1/z}{2z+10/3}\bigg|_{z=-1/3} = \frac{-1/3-3}{-2/3+10/3} = \frac{-10/3}{8/3} = \frac{-5}{4}.$$

Så

$$I = \frac{2\pi}{3}(1-5/4) = -\frac{\pi}{6}.$$

6. *Visa att för positiva a är*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}(1-e^{-2a}).$$

Ledning: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^2+a^2}\,dx = \{\text{ då } \sin 2x \text{ är udda }\} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-(\cos 2x + i\sin 2x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{i2x}}{x^2+a^2}\,dx. \end{aligned}$$

Integration runt den vanliga halvcirkeln $L_R + C_R$ i övre halvplanet ger med hjälp av residysatsen att

$$(*) \quad \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{1-e^{i2x}}{x^2+a^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{C_R} \frac{1-e^{i2z}}{z^2+a^2}\,dz = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{1-e^{i2z}}{z^2+a^2}, ia\right].$$

Eftersom

$$\Big|\int_{C_R}\Big| \le \mathcal{O}\left(\frac{1+1}{R^2}\right) \cdot \pi R = \mathcal{O}(R^{-1}) \to 0 \text{ då } R \to \infty,$$

så ger(∗) då $R \to \infty$ att

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^2+a^2}\,dx = \pi i \cdot \frac{1-e^{i2z}}{2z}\Big|_{z=ia} = \pi i \cdot \frac{1-e^{-2a}}{2ia} \\
&= \frac{\pi}{2a}\,(1-e^{-2a}).
\end{aligned}
$$

7. *Bestäm det antal nollställen som polynomet*

$$P(z) = z^3 + 2z^2 + z + 4$$

har i det högra respektive i det vänstra halvplanet.

Låt $L_R + C_R$ vara den vanliga halvcirkeln i högra halvplanet. Om N betecknar antalet nollställen i högra halvplanet, så säger argumentprincipen att

$$N = \frac{1}{2\pi} \cdot (\Delta_{CR} \arg P(z) + \Delta_{L_R} \arg P(z)) \quad \text{om } R \text{ är tillräckligt stort.}$$

På C_R är $|z| = R =$ stort $\Rightarrow \Delta_{C_R} \approx 3\pi$. På L_R är $z = iy$, så där är

$$
\begin{aligned}
P(z) &= P(iy) = -iy^3 - 2y^2 + iy + 4 = 4 - 2y^2 + iy(1-y^2) \\
&= u(y) + iv(y), \text{ med } u = 4 - 2y^2 \text{ och } v = y(1-y^2).
\end{aligned}
$$

Härur ser vi att

$$\frac{v}{u} = \mathcal{O}\left(\frac{-y^3}{-2y^2}\right) = \mathcal{O}(y) \to \pm\infty \text{ då } y \to \pm\infty,$$

och att

$$u = 0 \iff y = \pm\sqrt{2} \text{ och } v = 0 \iff y = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}.$$

Detta gör att bilden av L_R (det vill säga $y\colon R \to -R$) i (u,v)-planet under avbildningen $w = P(z)$ startar långt ner i 3:e kvadranten, skär v-axeln då $v < 0$, skär sedan u-axeln tre gånger då $u > 0$, och därefter v-axeln då $v > 0$, för att till slut hamna långt upp i 2:a kvadranten, vilket betyder att

$$\Delta_{L_R} \arg P(z) \approx \pi.$$

Tillsammans fås därför att

$$\Delta_{C_R+L_R} \arg P(z) \approx 3\pi + \pi = 4\pi.$$

Men

$$\Delta_{C_R+L_R} \arg P(z) = 2\pi \cdot N \Rightarrow \Delta_{C_R+L_R} \arg P(z) = 2 \cdot 2\pi \text{ (exakt!)},$$

så att $N = 2$. Och eftersom bildkurvan inte går genom origo i (u, v)-planet, så ser vi att $P(z)$ saknar nollställen på imaginära axeln.

SLUTSATS: $P(z)$ har två nollställen i det högra halvplanet och ett i det vänstra.