Institutionen för Matematik
Olle Stormark

Tentamen i 5B1201 Komplex Analys för T,
01–12–20, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Ange dina bonuspoäng på omslaget.
- Var och en av uppgifterna nedan ger maximalt 5 poäng, vilket betyder att man med bonuspoängen kan komma upp i högst $7 \cdot 5 + 4 = 39$ poäng.
- *Normalt* tillämpas följande betygsgränser: 16–21 p ger betyget 3, 22–27 p ger betyget 4, och 28–39 p ger betyget 5. *Observera dock* att dessutom kan helhetsintrycket påverka betyget—uppåt eller nedåt.
- Varje lösning *skall* åtföljas av förklarande text och/eller figur. Alla räkningar *skall* redovisas. Om man använder sig av kända satser, så *skall* förutsättningarna för dessa anges.
- Det kommer att finnas ett lösningsförslag på nätadressen

  www.math.kth.se/~olles/komplexT.pdf

  efter skrivningens slut.

1. Bestäm *alla* lösningarna till ekvationen $\sin z - \cos z = 0$.
2. Visa att om en analytisk funktion är *rent reell* i en viss domän, så måste den faktiskt vara *konstant* där.

3. (a) Betrakta funktionen

$$f(z) = \frac{3}{z(z+3)}.$$

Denna funktion kan Laurentserieutvecklas i två olika (maximala) områden omkring $z = 0$. Ange dessa områden!

(b) Bestäm de två Laurentserierna omkring $z = 0$.

4. Beräkna integralen

$$\oint_{|z+1+i|=4} z^3 \cos(1/z)\, dz.$$

5. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5 + 3\cos\theta}\, d\theta.$$

6. Visa att för positiva a är

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a}(1 - e^{-2a}).$$

Ledning: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

7. Bestäm det antal nollställen som polynomet

$$P(z) = z^3 + 2z^2 + z + 4$$

har i det högra respektive i det vänstra halvplanet.

Lycka till!