Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen i 5B1201 Komplex Analys för F,T och E,
02–04–11, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Ange dina bonuspoäng på omslaget.
- Var och en av uppgifterna nedan ger maximalt 5 poäng, vilket betyder att man med bonuspoängen kan komma upp i högst $7 \cdot 5 + 4 = 39$ poäng.
- *Normalt* tillämpas följande betygsgränser: 16–21 p ger betyget 3, 22–27 p ger betyget 4, och 28–39 p ger betyget 5. *Observera dock* att dessutom kan helhetsintrycket påverka betyget—uppåt eller nedåt.
- Varje lösning *skall* åtföljas av förklarande text och/eller figur. Alla räkningar *skall* redovisas. Om man använder sig av kända satser, så *skall* förutsättningarna för dessa anges.
- Det kommer att finnas ett lösningsförslag på nätadressen

  www.math.kth.se/~olles/5B1201april02losn.pdf

  efter skrivningens slut.

1. Beräkna $\arcsin 100$ genom att bestämma *alla* lösningarna till ekvationen

$$\sin z = 100$$

(och *inte* genom att sätta in $z = 100$ i en färdig formel för $\arcsin z$.)

2. Beräkna integralen

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}} \frac{2z+3}{z-1}\, dz$$

längs tre olika vägar $\mathcal{C}_{(a)}$, $\mathcal{C}_{(b)}$ och $\mathcal{C}_{(c)}$ från $z = 2$ till $z = 2i$, där

(a) $\mathcal{C}_{(a)}$ = raka vägen från 2 till $2i$;

(b) $\mathcal{C}_{(b)}$ = cirkelbågen $\{z = 2e^{i\theta} \colon 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ från 2 till $2i$;

(c) $\mathcal{C}_{(c)}$ = cirkelbågen $\{z = 2e^{i\theta} \colon -3\pi/2 \leq \theta \leq 0\}$ från 2 till $2i$.

3. (a) *(3p)* Använd Cauchys integralformel för att visa att om $f(z)$ är analytisk i någon öppen mängd innehållande den slutna cirkelskivan $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| \leq r\}$, så är

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

(b) *(2p)* Låt $a > 1$ och låt n vara ett positivt heltal. Beräkna integralen

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{a + \cos(n\theta)}{a^2 + 2a\cos(n\theta) + 1}\, d\theta$$

t.ex. genom att tillämpa resultatet i (a) på funktionen $f(z) = (z^n + a)^{-1}$ och cirkeln $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$.

4. Antag att $f(z) = g(z)/h(z)$, där $g(z)$ och $h(z)$ är analytiska i en öppen omgivning av z_0 och $g(z_0) \neq 0$.

Om $h(z_0) = 0$ men $h'(z_0) \neq 0$, så säger en välkänd formel att

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Visa att om istället $h(z_0) = h'(z_0) = 0$ och $h''(z_0 \neq 0$, så är

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{2g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3(h''(z_0))^2}.$$

5. Beräkna Taylorserien (inklusive dess konvergensradie) för funktionen $\operatorname{Log} z$ omkring punkten $1 + i$, där

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \arg z \quad \text{då } -\pi < \arg z < \pi.$$

6. (a) *(3p)* Antag att den reella funktionen $u(x, y)$ är harmonisk i en enkelt sammanhängande domän $\mathcal{D}$. En reell funktion $v(x, y)$ sägs vara ett *harmoniskt konjugat* till $u(x, y)$ i $\mathcal{D}$ om $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ är analytisk i $\mathcal{D}$.

   Låt $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, och låt B vara ett givet reellt tal. *Visa* att $u(x, y)$ har ett entydigt bestämt harmoniskt konjugat $v(x, y)$ i $\mathcal{D}$ uppfyllande $v(x_0, y_0) = B$.

   Ledning: Om v finns, så måste

$$v(x, y) = B + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy,$$

   där $\partial v/\partial x$ och $\partial v/\partial y$ tack vare CR-ekvationerna kan uttryckas med hjälp av u:s derivator. Kruxet består i att visa att integralen ovan är väldefinierad *oberoende av vägen mellan* (x_0, y_0) *och* (x, y).

   (b) *(2p)* Betrakta t.ex. den harmoniska funktionen $u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ i $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$. *Visa* att $u(x, y)$ har ett entydigt bestämt harmoniskt konjugat i högra halvplanet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ med $v(1, 0) = 0$, och förklara varför detta konjugat inte kan fortsättas på ett entydigt sätt till $\mathcal{D}$ som en harmonisk funktion.

7. Låt m och n vara positiva heltal med $n \geq m + 2$. *Visa* att

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n + 1}\, dx = \frac{\pi/n}{\sin\left(\frac{m+n}{n}\pi\right)},$$

   t.ex. genom att att använda residykalkyl på funktionen $f(z) = \frac{z^m}{z^n+1}$ och den slutna kurvan

$$\begin{aligned} L_0 \cup C_R \cup L_{2\pi/n} = &\{z = re^{i0} : 0 \leq r \leq R\} \cup \{z = Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi/n\} \\ &\cup \{z = re^{i2\pi/n} : 0 \leq r \leq R\}. \end{aligned}$$

Lycka till!