Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till tentamen i 5B1201 Komplex Analys för F,T och E, 02–04–11.

1. *Beräkna* $\arcsin 100$ *genom att bestämma* alla *lösningarna till ekvationen*

$$\sin z = 100$$

(*och* inte *genom att sätta in* $z = 100$ *i en färdig formel för* $\arcsin z$.)

Lösning: $\sin z = 100 \iff \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = 100 \iff$
$e^{iz} - 2i \cdot 100 - e^{-iz} = 0 \iff (e^{iz})^2 - 2i \cdot 100 e^{iz} - 1 = 0 \iff$
$e^{iz} = i \cdot 100 \pm \sqrt{-10000 + 1} = e^{i\pi/2} \cdot (100 \pm \sqrt{9999}) \iff$
$iz = \ln(100 \pm \sqrt{9999}) + i\,(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ med $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \iff$
$z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i\,\ln(100 \pm \sqrt{9999})$.

Eftersom $(100 + \sqrt{9999})(100 - \sqrt{9999}) = 10000 - 9999 = 1$, så är $\ln(100 + \sqrt{9999}) = -\ln(100 - \sqrt{9999})$, varför vi kan ge svaret som

$$\arcsin 100 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i\ln(100 + \sqrt{9999}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

där det framgår att värdena är parvist komplexkonjugerade.

2. *Beräkna integralen*

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}} \frac{2z + 3}{z - 1}\, dz$$

längs tre olika vägar $\mathcal{C}_{(a)}$, $\mathcal{C}_{(b)}$ *och* $\mathcal{C}_{(c)}$ *från* $z = 2$ *till* $z = 2i$, *där*

(a) $\mathcal{C}_{(a)} =$ *raka vägen från* 2 *till* $2i$;

(b) $\mathcal{C}_{(b)}$ = *cirkelbågen* $\{z = 2e^{i\theta} \colon 0 \le \theta \le \pi/2\}$ *från* 2 *till* $2i$;

(c) $\mathcal{C}_{(c)}$ = *cirkelbågen* $\{z = 2e^{i\theta} \colon -3\pi/2 \le \theta \le 0\}$ *från* 2 *till* $2i$.

Lösning för (a) och (b):

$$\begin{aligned}
&\frac{2z+3}{z-1} = 2 + 5 \cdot \frac{1}{z-1} \Rightarrow \\
&\mathcal{I} = 2\int_2^{2i} dz + 5\int_2^{2i} \frac{dz}{z-1} = -4 + 4i + 5 \cdot \int_2^{2i} \frac{dz}{z-1}.
\end{aligned}$$

$(z-1)^{-1}$ är analytisk i den enkelt sammanhängande domänen $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z \le 0\}$ och har där den primitiva funktionen

$$\log(z-1) = \ln|z-1| + i\arg(z-1), \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(z-1) < \frac{3\pi}{2}.$$

Eftersom integrationsvägarna i (a) och (b) ligger i $\mathcal{D}$, så kan vi använda oss av den primitiva funktionen och få

$$\begin{aligned}
\int_2^{2i} \frac{dz}{z-1} =& [\ln|z-1| + i\arg(z-1)]_2^{2i} \\
&= \ln|2i-1| - \ln 2 + i \cdot (\pi - \arctan 2 - 0) \\
&= \ln\frac{\sqrt{5}}{2} + i(\pi - \arctan 2) \Rightarrow \\
\mathcal{I} &= \ln\frac{\sqrt{5}}{2} - 4 + i(4 + \pi - \arctan 2).
\end{aligned}$$

Lösning för (c):

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}_{(b)}} - \int_{\mathcal{C}_{(c)}} = \oint_{|z|=2} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[2 + 5\cdot(z-1)^{-1}, 1\right] = 2\pi i \cdot 5 \Rightarrow \\
&\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}_{(c)}} = \int_{\mathcal{C}_{(b)}} -10\pi i = \ln\frac{\sqrt{5}}{2} - 4 + i(4 - 9\pi - \arctan 2).
\end{aligned}$$

3. (a) *(3p) Använd Cauchys integralformel för att visa att om $f(z)$ är analytisk i någon öppen mängd innehållande den slutna cirkelskivan $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| \le r\}$, så är*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

(b) *(2p) Låt $a > 1$ och låt n vara ett positivt heltal. Beräkna integralen*

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{a + \cos(n\theta)}{a^2 + 2a\cos(n\theta) + 1}\, d\theta$$

t.ex. genom att tillämpa resultatet i (a) på funktionen $f(z) = (z^n + a)^{-1}$ och cirkeln $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$.

Lösning för (a): Cauchys integralformel ger

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \{z = z_0 + re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta. \end{aligned}$$

(b): Insättning i formeln med $f(z) = (z^n + a)^{-1}$, $z_0 = 0$ och $r = 1$ ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{in\theta} + a}\, d\theta \qquad \{\text{förläng med nämnarens komplexkonjugat}\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-in\theta} + a}{1 + a(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) + a^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a + \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)}{a^2 + 2a\cos(n\theta) + 1}\, d\theta. \end{aligned}$$

Genom att ta realdelarna av båda leden samt multiplicera med 2π fås till slut att

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{a + \cos(n\theta)}{a^2 + 2a\cos(n\theta) + 1}\, d\theta = 2\pi a.$$

4. *Antag att $f(z) = g(z)/h(z)$, där $g(z)$ och $h(z)$ är analytiska i en öppen omgivning av z_0 och $g(z_0) \neq 0$.*

   Om $h(z_0) = 0$ men $h'(z_0) \neq 0$, så säger en välkänd formel att

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Visa *att om istället $h(z_0) = h'(z_0) = 0$ och $h''(z_0 \neq 0$, så är*

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{2g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3(h''(z_0))^2}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^2} \cdot \frac{g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \dots}{\frac{h''(z_0)}{2} + \frac{h'''(z_0)}{6}(z-z_0) + \dots} \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^2} \cdot (a_{-2} + a_{-1}(z-z_0) + \dots) \end{aligned}$$

där a_{-2}, a_{-1}, $\dots$ fås ur

$$\begin{aligned} &g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \dots \\ &\quad = (h''(z_0)/2 + (h'''(z_0)/6)(z-z_0) + \dots)\,(a_{-2} + a_{-1}(z-z_0) + \dots)\,. \end{aligned}$$

Koefficienterna framför $(z-z_0)^0$ och $(z-z_0)^1$ här ges av

$$g(z_0) = \frac{h''(z_0)}{2} \cdot a_{-2} \quad \text{och} \quad g'(z_0) = \frac{h''(z_0)}{2} \cdot a_{-1} + \frac{h'''(z_0)}{6} \cdot a_{-2}$$

respektive, så att

$$\begin{aligned} a_{-2} =& \frac{2g(z_0)}{h''(z_0)} \qquad \text{och} \\ a_{-1} =& \operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{2g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3(h''(z_0))^2}. \end{aligned}$$

5. *Beräkna Taylorserien (inklusive dess konvergensradie) för funktionen* $\operatorname{Log} z$ *omkring punkten* $1+i$*, där*

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \arg z \quad \text{då } -\pi < \arg z < \pi.$$

Lösning: Vi ska alltså bestämma koefficienterna a_n i serien $\operatorname{Log} z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-(1+i))^n$. Med $w = z-(1+i)$ fås

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(w + (1+i)) = f(w), \quad \text{säg.}$$

Genom att derivera $f(w)$ kan man utnyttja den geometriska serien:

$$\begin{aligned} f'(w) &= \frac{1}{w+1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1-(-w)/(1+i)} \\ &= \frac{1}{1+i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^n}{(1+i)^n} \quad \text{då } |w| < |1+i| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Integration av

$$f'(w) = \frac{1}{1+i} - \frac{w}{(1+i)^2} + \frac{w^2}{(1+i)^3} \dots$$

ger

$$\begin{aligned} f(w) &= f(0) + \frac{w}{1+i} - \frac{w^2}{2(1+i)^2} + \frac{w^3}{3(1+i)^3} - \dots \\ &= \ln|1+i| + i\,\mathrm{Arg}\,(1+i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+i)^n}\, w^n. \end{aligned}$$

$w = z - (1+i)$ ger till slut att

$$\mathrm{Log}\, z = \frac{\ln 2}{2} + i\,\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+i)^n} \left(z - (1+i)\right)^n \text{ då } |z-(1+i)| < \sqrt{2}.$$

6. (a) *(3p) Antag att den reella funktionen $u(x,y)$ är harmonisk i en enkelt sammanhängande domän $\mathcal{D}$. En reell funktion $v(x,y)$ sägs vara ett* harmoniskt konjugat *till $u(x,y)$ i $\mathcal{D}$ om $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ är analytisk i $\mathcal{D}$.*

   Låt $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, och låt B vara ett givet reellt tal. Visa *att $u(x,y)$ har ett entydigt bestämt harmoniskt konjugat $v(x,y)$ i $\mathcal{D}$ uppfyllande $v(x_0,y_0) = B$.*

   Ledning: Om *v finns, så måste*

   $$v(x,y) = B + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy,$$

   där $\partial v/\partial x$ och $\partial v/\partial y$ tack vare CR-ekvationerna kan uttryckas med hjälp av u:s derivator. Kruxet består i att visa att integralen ovan är väldefinierad oberoende av vägen mellan (x_0, y_0) och (x,y).

   (b) *(2p) Betrakta t.ex. den harmoniska funktionen $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ i $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y) \neq (0,0)\}$.* Visa *att $u(x,y)$ har ett entydigt bestämt harmoniskt konjugat i högra halvplanet $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\}$ med $v(1,0) = 0$, och förklara varför detta konjugat inte kan fortsättas på ett entydigt sätt till $\mathcal{D}$ som en harmonisk funktion.*

Lösning av (a): Enligt ledningen är

$$v(x,y) = B + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy \right).$$

Eftersom $\mathcal{D}$ är enkelt sammanhängande säger Green att denna integral är oberoende av vägen om

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

vilket är sant på grund av att u är harmonisk.

(b): I högra halvplanet gäller det att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{y}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow v = \arctan\frac{y}{x} + g(y);$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} + g'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \iff g = \text{konstant} \Rightarrow$$

$$v = \arctan\frac{y}{x} + B, \quad \text{där} \quad 0 = v(1,0) = \arctan 0 + B \Longrightarrow B = 0.$$

Detta ger att

$$v = \arg z \qquad \text{då} \ -\pi/2 < \arg z < \pi/2,$$

som *inte* kan fortsättas runt origo till en (entydig) funktion. Vidare är

$$f(z) = u + iv = \ln|z| + i\arg z = \log z.$$

7. *Låt m och n vara positiva heltal med $n \geq m+2$.* Visa *att*

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1}\,dx = \frac{\pi/n}{\sin\left(\frac{m+n}{n}\pi\right)},$$

t.ex. genom att att använda residykalkyl på funktionen $f(z) = \frac{z^m}{z^n+1}$ och den slutna kurvan

$$L_0 \cup C_R \cup L_{2\pi/n} = \{z = re^{i0} \colon 0 \leq r \leq R\} \cup \{z = Re^{i\theta} \colon 0 \leq \theta \leq 2\pi/n\} \cup \{z = re^{i2\pi/n} \colon 0 \leq r \leq R\}.$$

Lösning: De singulära punkterna för $f(z) = z^m/(z^n+1)$ ges av

$$z^n = -1 = e^{i(2k+1)\pi} \Rightarrow z = e^{i\frac{2k+1}{n}\pi} \quad \text{för } k = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Innanför den slutna kurvan $L_0 \cup C_R \cup L_{2\pi/n}$ finns bara *en* singulär punkt, nämligen

$$z = e^{i\pi/n}.$$

Residysatsen tillämpad på $f(z)$ och vår slutna kurva säger att

$$\int_{L_0} f\,dz + \int_{C_R} f\,dz + \int_{L_{2\pi/n}} f\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}[f(z), e^{i\pi/n}].$$

Låt oss titta på dessa fyra termer i tur och ordning!

$$\begin{aligned}
&\int_{L_0} f\,dz = \int_0^R \frac{x^m}{x^n+1}\,dx \to \int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1}\,dx \qquad \text{då } R \to \infty,\\
&\left|\int_{C_R} f\,dz\right| \leq \frac{R^m}{R^n-1} \cdot \frac{2\pi R}{n} = \mathcal{O}(R^{m+1-n}) \to 0 \qquad \text{då } R \to \infty,\\
&\int_{L_{2\pi/n}} f\,dz = \int_R^0 \frac{r^m e^{im\frac{2\pi}{n}}}{r^n e^{i2\pi}+1} e^{i\frac{2\pi}{n}}\,dr = -e^{i\frac{(m+1)2\pi}{n}} \cdot \int_0^R \frac{r^m}{r^n+1}\,dr\\
&\to e^{i\frac{m+1}{n}2\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1}\,dx \qquad \text{då } R \to \infty,\\
&\operatorname{Res}\left[\frac{z^m}{z^n+1}, e^{i\frac{\pi}{n}}\right] = \frac{e^{i\frac{m}{n}\pi}}{ne^{i\frac{n-1}{n}\pi}} = -\frac{1}{n}e^{i\frac{m+1}{n}\pi}.
\end{aligned}$$

$$\text{Så } R \to \infty \Longrightarrow \int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1}\,dx \cdot \left(1 - e^{i\frac{m+1}{n}2\pi}\right) = -\frac{2\pi i}{n}e^{i\frac{m+1}{n}\pi}, \text{ varför}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1}\,dx &= -\frac{2\pi i}{n} \frac{e^{i\frac{m+1}{n}\pi}}{1-e^{i\frac{m+1}{n}2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\frac{m+1}{n}\pi}}{e^{-i\frac{m+1}{n}\pi}}\\
&= -\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{e^{-i\frac{m+1}{n}\pi} - e^{i\frac{m+1}{n}\pi}} = -\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{1}{-2i\sin\left(\frac{m+1}{n}\pi\right)}\\
&= \frac{\pi/n}{\sin\left(\frac{m+1}{n}\pi\right)}.
\end{aligned}$$