Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

5B1201 KOMPLEX ANALYS för T2, ht 2001.

Kurslitteratur: A.D. Wunsch, *Complex Variables with Applications*, som finns att köpa i Studentkårens bokhandel.

Kursen omfattar kapitel **1**–**7**, med undantag för avsnitten **2.6**, **4.7**, **6.7**, **6.9**, **6.10**, **7.1**, **7.2**, **7.5** och samtliga appendices. Innehållet i kapitel **1** skall i stort sett vara bekant från tidigare kurser—komplexa tal från algebran och planets topologi (d.v.s. öppna och slutna mängder, enkelt sammanhang o.s.v.) från flervariabelskursen. Så det nya börjar i kapitel **2**.

I vanliga envariabelskursen studeras *reellvärda* funktioner av en *reell* variabel:

$$y = f(x).$$

Här tittar vi istället på *komplexvärda* funktioner av en *komplex* variabel:

$$w = f(z),$$

där alltså $z = x + iy$ och $w = u + iv$ är *komplexa* variabler. Speciellt ägnar vi oss åt *analytiska* funktioner, och funktioner som är *analytiska utom i vissa isolerade punkter*.

Huvudbegreppet är alltså *analyticitet*, som kan definieras på två a priori helt olika sätt.

Cauchy-Riemanns definition (= bokens definition)**:** *$f(z)$ är analytisk i en öppen mängd U i komplexa planet om $f(z)$ är deriverbar överallt i U.*

Weierstrass definition: *$f(z)$ är analytisk i den öppna mängden U om det för varje $z_0 \in U$ finns ett positivt tal R_0 så att $f(z)$ kan skrivas som en konvergent potesserie i den öppna cirkelskivan $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < R_0\}$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)\,(z - z_0)^n \quad \text{då} \quad |z - z_0| < R_0.$$

En god test på att man förstått innehållet i kapitlen **2**–**5** består i att visa att dessa definitioner verkligen är ekvivalenta—klarar *du* det?

I slutet av kapitel **5** studeras fallet då $f(z)$ är analytisk i den punkterade cirkelskivan $\{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z - z_0| < R\}$. Det visar sig att $f(z)$ kan skrivas som en s.k. *Laurentserie* där:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z_0)\,(z - z_0)^n \qquad \text{då} \qquad 0 < |z - z_0| < R;$$

observera att summationen inte startar från $n = 0$, utan från $n = -\infty$.

Av koefficienterna $a_n(z_0)$ som uppträder här visar det sig att $a_{-1}(z_0)$ är speciellt intressant—den kallas för *residyn* av $f(z)$ i z_0. Detta begrepp leder sedan till en av höjdpunkterna i vår kurs, nämligen *residysatsen* i kapitel **6**.

En förvånande tillämpning av denna sats är att man med dess hjälp kan beräkna vissa *reella* enkelintegraler, som man *inte* får ut med reella envariabelsmetoder.

En annan tillämpning är *argumentprincipen*, som bl.a. används för att studera *stabilitet för lineära differentialekvationer med konstanta koefficienter.* Eftersom den senare aspekten inte behandlas i läroboken, men dock är viktig för de fortsatta teknisstudierna, utdelas ett specellt papper om detta.

Kortfattad sammanfattning av kursen:

> *komplex deriverbarhet* $\Longrightarrow$ *Cauchy-Riemanns differentialekvationer* $\Longrightarrow$ *Cauchy-Goursats sats:* $\oint f(z)\,dz = 0$ $\Longrightarrow$ *Cauchys integralformel:* $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(s)}{s-z}\,ds$ $\Longrightarrow$ *Taylor- och Laurentserier* $\Longrightarrow$ *klassifikation av singulariteter, residybegreppet* $\Longrightarrow$ *residysatsen* $\Longrightarrow$ *argumentprincipen.*

Ett utmärkande drag är att det mesta *hänger ihop*, d.v.s. kursen består *inte* av ett antal av varandra oberoende snuttar. Så antingen förstår man rubbet, eller också just ingenting—valet är ditt!

Den **ordinarie tentan** är schemalagd till torsdagen den 20:e december, klockan 08–13. Skrivningen omfattar 7 uppgifter, vilka p.g.a. kursens karaktär kan vara rätt teoretiska.

Man kan få maximalt 35 poäng på tentamensskrivningen. Dessutom kan man få 4 bonuspoäng på två lappskrivningar, vilket ger den totala maximala poängsumman 39 poäng.

Betygsgränser: 16–21 p ger betyget **3**, 22–27 p ger betyget **4** och 28–39 p ger betyget **5**.

Lappskrivning 1 äger rum torsdagen den 15:e november, klockan 10^{15}–11^{00}, och *lappskrivning 2* torsdagen den 6:e december klockan 10^{15}–11^{00}.

Undervisningen sker i form av föreläsningar (8 timmar i veckan) och räknestugor (2 timmar i veckan plus en extra omgång med 3 timmar måndagen den 10:e december). Under de senare är det meningen att teknologerna ska *räkna själva* med möjlighet att fråga om allt det som man fastnar på. Observera att den som inte utnyttjar chansen att ställa frågor FAKTISKT FÅR SKYLLA SIG SJÄLV.

Föreläsare och **kursledare** är Olle Stormark. Adress: rum 3653 i Klocktornet, Lindstedtsvägen 25, telefon: 7907206, och e-mailadress: olles@math.kth.se .

Under räknestugorna finns följande lärare till hands för att svara på frågor:

för grupp 1 Jörgen Östensson, jorgen@math.kth.se ,

för grupp 2 Magnus Aspenberg, magnusa@math.kth.se ,

för grupp 3 Tomas Sjödin, tomas@math.kth.se .

PLAN FÖR UNDERVISNINGEN.

Det är självfallet *omöjligt* att hinna med alla de övningstal som anges nedan under räknestugorna, utan man får göra lite hemma också. Men *om* man kör fast, så *skall* man alltså passa på att fråga under räknestugorna.

vecka 44 Avsnitt **1.1–2.5:** Komplexa tal och analytiska funktioner.

Övningstal: **2.1**: 11, 13, 17; **2.2**: 9; **2.3**: 3, 5, 9, 13, 20.

vecka 45 Avsnitt **3.1–3.8:** Elementära funktioner och grensnitt.

Övningstal: **2.4**: 3, 7, 17; **2.5**: 5, 11, 13; **3.1**: 9, 13, 21, 25; **3.2**: 17, 19, 25; **3.3**: 1, 17; **3.4**: 1, 5, 19; **3.5**: 3, 9; **3.6**: 1, 19.

vecka 46 Avsnitt **4.1–4.6:** Linjeintegraler, Cauchy-Goursats sats och Cauchys integralformel.

Övningstal: **3.7**: 5, 9; **3.8**: 1, 3, 9; **4.2**: 5, 15; **4.3**: 9, 17, 25; **4.4**: 9, 11, 17.

vecka 47 Avsnitt **5.1–5.6:** Taylorserier och Laurentserier.

Övningstal: **4.5**: 9, 13; **4.6**: 5, 9; **5.4**: 3, 13, 19; **5.5**: 9, 11, 13.

vecka 48 Avsnitt **6.1–6.6 och 6.8**: Residykalkyl med tillämpning på reella integraler.

Övningsal: **5.6**: 1, 3, 11, 15; **5.7**: 3, 7; **6.1**: 1, 3, 5; **6.2**: 1, 5, 21; **6.3**: 5, 17, 19, 31; **6.4**: 3, 15; **6.5**: 13, 24.

vecka 49 Avsnitt **7.3–7.4 + stencil:** Argumentprincipen och stabilitet för lineära differentialekvationer med konstanta koefficienter.

Övningstal: **6.6**: 1, 3, 9; **6.8**: 1, 5, 7; **7.3**: 1, 3, 13.

vecka 50 3 timmars räknestuga. *Övningstal* i **7.4**: 1, 3 och 7. Observera att stabilitet betyder att samtliga nollställen till *nämnarna* ligger i *vänstra* halvplanet; täljarna behöver man inte bry sig om.

Plocka dessutom ut ett antal extentor från nätet och räkna igenom dessa.

TILL SLUT: Lärarna blir överlyckliga om de får många och kniviga frågor—och djupt deprimerade om de möts av tystnad och ointresse. Tänk också på att eftersom tiden är irreversibel, så måste kritik framföras *innan kursen är slut*, för att de ansvariga ska ha någon sportslig chans att åtgärda sådant som är mindre bra.

Lycka till med studierna!