Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen i 5B1107 Differential- och integralkalkyl II för F1, 02–03–04, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Ange dina bonuspoäng på omslaget.
- Uppgifterna nedan är tillsammans värda 35 poäng, vilket betyder att man med bonuspoängen maximalt kan komma upp i 35+4=39 poäng.
- *Normalt* används följande betygsgränser: 16–23 *p* ger betyget 3, 24–30 *p* ger betyget 4, och 31–39 *p* ger betyget 5. *Observera dock* att dessutom kan *helhetsintrycket* påverka betyget (uppåt eller nedåt).
- Varje lösning *skall* åtföljas av förklarande text och/eller figur. Alla räkningar *skall* redovisas. I den mån man använder sig av kända satser, så *skall* förutsättningarna för dessa anges.
- Efter skrivningens slut kommer det att finnas ett lösningsförslag på

  www.math.kth.se/~olles/5B1107mars02losn.pdf
- Skrivningarna återfås på matematikinstitutionens studentexpedition i Klocktornet, Lindstedtsvägen 25.
- **Omtentamen** ons 10/4 kl. 8–13.

1. Betrakta skruvlinjen

$$\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, e^t), \quad -\infty < t < \infty.$$

   (a) Bestäm tangenten till skruvlinjen i en godtycklig punkt $\mathbf{r}(t)$. (*1p*)

   (b) Bestäm skärningspunkten mellan tangenten och xy-planet. (*1p*)

   (c) Visa att mängden av alla dessa skärningspunkter för $-\infty < t < \infty$ bildar en cirkel i xy-planet. (*1p*) **(3p)**

2. (a) Ange först det maximala definitionsområdet för funktionen

$$f(x,y) = \frac{xy}{1-y+xy}.$$

Låt sedan $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1 \text{ och } 0 \le y \le 1\}$, och låt $\mathcal{D}^*$ vara lika med $\mathcal{D}$ minus hörnpunkten $(0,1)$. Visa att f är väldefinierad i $\mathcal{D}^*$, men är av formen "$\frac{0}{0}$" i punkten $(0,1)$. (*1p*)

(b) Man ser lätt att f till och med är kontinuerlig i $\mathcal{D}^*$. Men är det möjligt att definiera f i punkten $(0,1)$ så att f blir kontinuerlig i hela $\mathcal{D}$? Förklara! (*2p*) **(3p)**

3. Låt f och g vara differentierbara funktioner från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}$.

(a) Vad är det för villkor som enligt implicita funktionssatsen krävs för att systemet

$$\begin{cases} x = f(u,v,w), \\ y = g(u,v,w), \end{cases}$$

lokalt ska definiera u och v som funktioner av x, y och w? (*1p*)

(b) Bestäm de partiella derivatorna av u och v med avseende på x, y respektive w uttryckta med hjälp av f:s och g:s derivator om villkoret ovan är uppfyllt. (*4p*) **(5p)**

4. Beräkna volymen av den största fyrkantiga låda, vars sidor är parallella med koordinatplanen, vilken ryms inuti ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

där a, b och c är givna positiva tal. **(3p)**

5. Visa att funktionen $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$ har oändligt många maximipunkter, men inga minimipunkter alls. **(4p)**

6. Låt T vara den tetraeder vars hörn är belägna i punkterna $(0,0,0)$, $(a,0,0)$ $(0,a,0)$ och $(0,0,a)$, där a är ett givet positivt tal. Beräkna integralen

$$I = \iiint_T (x^2+y^2)\, dxdydz.$$

(3p)

7. I en rät cirkulär kon med höjden h och basradien R är densiteten proportionell mot avståndet till basytan, samt är lika med δ i konens topp. Beräkna konens massa. **(4p)**

8. (a) Bestäm arean av den del av rotationsparaboloiden $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\}$ som ligger inuti cylindern $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = R^2\}$, där R är ett givet positivt tal. (*2p*)

   (b) Bestäm arean av den del av sadelytan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 2xy\}$ som ligger inuti cylindern ovan. (*1p*) **(3p)**

9. Längs z-axeln går en konstant elektrisk ström. En magnetisk masspunkt i $\mathbf{r} = (x, y, z)$ påverkas av denna ström med kraften

$$\mathbf{F} = \frac{k}{x^2 + y^2}(-y, x, 0), \qquad \text{där } k \text{ är en viss konstant.}$$

Arbetet som $\mathbf{F}$ utför då den magnetiska masspunkten följer kurvan $\mathcal{C}$ från $\mathbf{r}_0$ till $\mathbf{r}_1$ ges av linjeintegralen $A = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

   (a) Uttryck linjeintegralen med hjälp av cylinderkoordinater. (*1p*)

   (b) Beräkna arbetet då $\mathcal{C}$ går från $\mathbf{r}_0 = (1, -1, 2)$ till $\mathbf{r}_1 = (1, 1, 7)$ och hela tiden befinner sig i det högra halvrummet $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0\}$. (*1p*)

   (c) Beräkna arbetet då $\mathcal{C}$ är en sluten kurva vars projektion på xy-planet inte omsluter origo. (*1p*)

   (d) Beräkna arbetet då $\mathcal{C}$ är en sluten kurv vars projektion på xy-planet går ett varv i positiv led runt origo. (*1p*) **(4p)**

10. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $(xz, -yz, z^3)$ och låt $\mathcal{S}$ vara den 2-dimensionella enhetssfären $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Beräkna flödesintegralen

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

där $\hat{\mathbf{N}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen. **(3p)**