Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till tentamen i 5B1107 Differential- och integralkalkyl II, 02–03–04.

1. Betrakta skruvlinjen

$$\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, e^t), \quad -\infty < t < \infty.$$

   (a) Bestäm tangenten till skruvlinjen i en godtycklig punkt $\mathbf{r}(t)$. (*1p*)

   (b) Bestäm skärningspunkten mellan tangenten och xy-planet. (*1p*)

   (c) Visa att mängden av alla dessa skärningspunkter för $-\infty < t < \infty$ bildar en cirkel i xy-planet. (*1p*) **(3p)**

Lösning. (a) Tangenten i punkten $\mathbf{r}(t)$ ges av

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) + s \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\cos t - s \cdot \sin t, \sin t + s \cdot \cos t, (1+s)e^t\right).$$

där $-\infty < s < \infty$.

(b) Skärningen med xy-planet fås då z-komponenten är $= 0$, det vill säga

$$(1+s)e^t = 0 \iff s = -1 \Longrightarrow (x, y) = (\cos t + \sin t, \sin t - \cos t).$$

(c) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\cos t + \sin t)^2 + (\sin t - \cos t)^2 \\ &= \cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t - 2\sin t \cos t + \cos^2 t = 2, \end{aligned}$$

så sökta mängden är cirkeln $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 2\}$.

2. (a) Ange först det maximala definitionsområdet för funktionen

$$f(x, y) = \frac{xy}{1 - y + xy}.$$

   Låt sedan $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1 \text{ och } 0 \le y \le 1\}$, och låt $\mathcal{D}^*$ vara lika med $\mathcal{D}$ minus hörnpunkten $(0, 1)$. Visa att f är väldefinierad i $\mathcal{D}^*$, men är av formen "$\frac{0}{0}$" i punkten $(0, 1)$. (*1p*)

(b) Man ser lätt att f till och med är kontinuerlig i $\mathcal{D}^*$. Men är det möjligt att definiera f i punkten $(0,1)$ så att f blir kontinuerlig i hela $\mathcal{D}$? Förklara! (*2p*) **(3p)**

Lösning. (a) f är definierad då nämnaren är $\neq 0$, det vill säga $y(1-x) \neq 1$. När $x = 1$ är detta uppfyllt för alla y. Då $x < 1$ är villkoret ekvivalent med $y \neq \frac{1}{1-x}$. $0 < x < 1 \Longrightarrow \frac{1}{1-x} > 1 \Longrightarrow f$ väldefinierad då $0 < x < 1$ och $y \leq 1$; $x = 0 \Longrightarrow \frac{1}{1-x} = 1 \Longrightarrow f$ väldefinierad även då $x = 0$ och $y < 1 \Longrightarrow f$ väldefinierad i $\mathcal{D}^*$, men är uppenbarligen av formen "$\frac{0}{0}$" i hörnpunkten $(0,1)$.

(b) Om f kan fortsättas kontinuerligt från $\mathcal{D}^*$ till hörnpunkten $(0,1)$, så måste $f(x,y)$ gå mot ett bestämt värde närhelst $(x,y) \to (0,1)$ inom $\mathcal{D}^*$. Men

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

och

$$\lim_{y\to 1^-} f(0,y) = \lim_{y\to 1^-} \frac{0}{1-y} = 0,$$

så detta är *inte* sant.

3. Låt f och g vara differentierbara funktioner från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}$.

(a) Vad är det för villkor som enligt implicita funktionssatsen krävs för att systemet

$$\begin{cases} x = f(u,v,w), \\ y = g(u,v,w), \end{cases}$$

lokalt ska definiera u och v som funktioner av x, y och w? (*1p*)

(b) Bestäm de partiella derivatorna av u och v med avseende på x, y respektive w uttryckta med hjälp av f:s och g:s derivator om villkoret ovan är uppfyllt. (*4p*) **(5p)**

Lösning. (a) Det lättaste sättet att inse villkoret för att kunna lösa ut u och v är att differentiera det givna systemet, och sedan undersöka när differentialerna du och dv kan lösas ut. Man får

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial f}{\partial u}\, du + \frac{\partial f}{\partial v}\, dv + \frac{\partial f}{\partial w}\, dw \\ dy = \frac{\partial g}{\partial u}\, du + \frac{\partial g}{\partial v}\, dv + \frac{\partial g}{\partial w}\, dw, \end{cases}$$

eller

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx - \frac{\partial f}{\partial w}\, dw \\ dy - \frac{\partial g}{\partial w}\, dw \end{pmatrix}.$$

För att kunna lösa ut du och dv måste matrisen i vänsterledet vara inverterbar, vilket den är om och endast om dess determinant är $\neq 0$, det vill säga

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \neq 0.$$

(b) I så fall fås med vanlig matrisinvertering att

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial v} & -\frac{\partial f}{\partial v} \\ -\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx - \frac{\partial f}{\partial w}\, dw \\ dy - \frac{\partial g}{\partial w}\, dw \end{pmatrix},$$

eller

$$\begin{cases} du = \left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right)^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial v}\, dx - \frac{\partial f}{\partial v}\, dy + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\, dw\right) \\ dv = \left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right)^{-1} \left(-\frac{\partial g}{\partial u}\, dx + \frac{\partial f}{\partial u}\, dy - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\, dw\right). \end{cases}$$

Identifiering med

$$\begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial w}\, dw, \\ dv = \frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy + \frac{\partial v}{\partial w}\, dw, \end{cases}$$

ger till slut att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial u}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial w} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,w)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}.$$

4. Beräkna volymen av den största fyrkantiga låda, vars sidor är parallella med koordinatplanen, vilken ryms inuti ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

där a, b och c är givna positiva tal. **(3p)**

Lösning. Låt lådans hörnpunkt i första oktanten ha koordinaterna (x, y, z); av symmetriskäl inses att de åtta hörnen i så fall ges av $(\pm x, \pm y, \pm z)$, varför lådans volym är $= 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz$.

Så problemet är: maximera $8xyz$ under bivillkoret att (x, y, z) ligger på ellipsoiden, det vill säga $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0$.

Enligt Lagrange sätter man

$$L(x, y, z, \lambda) := 8xyz + \lambda \cdot (x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1),$$

och bestämmer de kritiska punkterna för denna funktion av fyra variabler:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2}, \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2}, \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial z} = 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2}, \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1. \end{cases}$$

För att få en *maximal* volym måste uppenbarligen var och en av x, y och z vara > 0. Men då kan man lösa ut $-\lambda$ ur de tre första ekvationerna:

$$-\lambda = \frac{4a^2yz}{x} = \frac{4b^2xz}{y} = \frac{4c^2xy}{z},$$

så att

$$\frac{a^2yz}{x} = \frac{b^2xz}{y} \iff a^2y^2 = b^2x^2 \iff y = \frac{b}{a}x,$$

och

$$\frac{a^2yz}{x} = \frac{c^2xy}{z} \iff a^2z^2 = c^2x^2 \iff z = \frac{c}{a}x.$$

Med $t := ax$ fås därför $(x, y, z) = (at, bt, ct)$, vilket insatt i fjärde ekvationen ovan ger

$$t^2 + t^2 + t^2 = 1 \iff t = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies (x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (a, b, c).$$

Då vi bara har *en* kritisk punkt för strikt positiva x, y och z, och då det uppenbarligen *finns* ett maximum, så *måste* den maximala volymen fås i denna kritiska punkt, det vill säga

$$\text{maximala volymen} = 8 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} abc.$$

5. Visa att funktionen $f(x, y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ har oändligt många maximipunkter, men inga minimipunkter alls. **(4p)**

Lösning. Låt oss först bestämma alla kritiska punkter:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = (1 + e^y)(-\sin x) \iff \sin x = 0 \iff x = n\pi, \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \cos x - e^y - ye^y = e^y(\cos x - 1 - y), \end{cases}$$

där n är ett godtyckligt heltal.

$$x = n\pi \Longrightarrow \cos(n\pi) - 1 - y = 0 \iff y = (-1)^n - 1.$$

Så n jämn $= 2k \Longrightarrow$ kritiska punkten $(x, y) = (2k\pi, 0)$ och n udda $= 2k + 1 \Longrightarrow$ kritiska punkten $(x, y) = ((2k + 1)\pi, -2)$, där alltså $k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$.

Låt oss sedan bestämma dessa kritiska punkters karaktär, vilket man gör genom att titta på andraderivatorna:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -(1 + e^y)\cos x, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^y \sin x, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^y(\cos x - 1 - y) + e^y(-1) = e^y(\cos x - 2 - y). \end{cases}$$

(a) $(x, y) = (2k\pi, 0)$ ger

$$\begin{cases} A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2k\pi, 0) = -2 < 0, \\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2k\pi, 0) = 0, \\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2k\pi, 0) = -1, \\ AC - B^2 = 2 > 0; \end{cases}$$

$A < 0$ och $AC - B^2 > 0$ betyder att dessa kritiska punkter är *maximipunkter* för f.

(b) $(x, y) = ((2k+1)\pi, -2)$ ger

$$\begin{cases} A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}((2k+1)\pi, -2) = 1 + e^{-2}, \\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}((2k+1)\pi, -2) = 0, \\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}((2k+1)\pi, -2) = -e^{-2}, \\ AC - B^2 = -e^{-2}(1 + e^{-2}) < 0; \end{cases}$$

$AC - B^2 < 0$ betyder att dessa kritiska punkter är *sadelpunkter*.

Och således saknar f minimipunkter.

6. Låt T vara den tetraeder vars hörn är belägna i punkterna $(0,0,0)$, $(a,0,0)$ $(0,a,0)$ och $(0,0,a)$, där a är ett givet positivt tal. Beräkna integralen

$$I = \iiint_T (x^2 + y^2)\, dxdydz.$$

(3p)

Lösning. Ritar man upp tetraedern så ser man lätt att

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T (x^2 + y^2)\, dxdy \\ &= \int_{x=0}^{x=a} \left(\int_{y=0}^{y=a-x} (x^2 + y^2) \left(\int_{z=0}^{z=a-x-y} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=a} \left(\int_{y=0}^{y=a-x} (x^2 + y^2)(a - x - y)\, dy \right) dx; \end{aligned}$$

här är den inre integralen

$$\begin{aligned} &= \int_{y=0}^{y=a-x} \big(-y^3 + (a-x)y^2 - x^2 y + x^2(a-x) \big)\, dy \\ &= \left[-\frac{y^4}{4} + \frac{(a-x)y^3}{3} - \frac{x^2y^2}{2} + x^2(a-x)y \right]_{y=0}^{y=a-x} \\ &= -\frac{(a-x)^4}{4} + \frac{(a-x)^4}{3} - \frac{x^2(a-x)^2}{2} + x^2(a-x)^2 \\ &= \frac{(a-x)^4}{12} + \frac{x^2(a-x)^2}{2}, \end{aligned}$$

så att

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{x=0}^{x=a} \left(\frac{(x-a)^4}{12} + \frac{x^4}{2} - ax^3 + \frac{a^2x^2}{2} \right) dx \\
&= \left[\frac{(x-a)^5}{60} + \frac{x^5}{10} - \frac{ax^4}{4} + \frac{a^2x^3}{6} \right]_0^a \\
&= \frac{a^5}{60} + \frac{a^5}{10} - \frac{a^5}{4} + \frac{a^5}{6} = \frac{2a^5}{60} \\
&= \frac{a^5}{30}.
\end{aligned}
$$

7. I en rät cirkulär kon med höjden h och basradien R är densiteten proportionell mot avståndet till basytan, samt är lika med δ i konens topp. Beräkna konens massa. **(4p)**

Lösning. I cylinderkoordinaterna r, θ och z är volymselementet $= r\,drd\theta dz$, och eftersom densiteten på nivån z är lika med $\delta \cdot \frac{z}{h}$ så blir massan dm av volymselementet vid (r, θ, z) lika med $dm = \frac{\delta}{h} zr\,drd\theta dz$, varför hela massan blir

$$
m = \int dm = \frac{\delta}{h} \iiint zr\,drd\theta dz.
$$

Med hjälp av likformiga trianglar inser man att då (r, θ, z) ligger på konens yta gäller att

$$
\frac{z}{h} = \frac{R-r}{R} \quad \text{eller} \quad z = h\left(1 - \frac{r}{R}\right).
$$

Därmed blir

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\delta}{h} \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \cdot \int_{r=0}^{R} r \left(\int_{z=0}^{z=h\left(1-\frac{r}{R}\right)} z\,dz \right) dr \\
&= \frac{\delta}{h} \cdot 2\pi \cdot \int_{r=0}^{r=R} r \cdot \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 dr \\
&= \delta\pi h \cdot \int_{r=0}^{r=R} \left(r - \frac{2r^2}{R} + \frac{r^3}{R^2} \right) dr
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta\pi h \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{2r^3}{3R} + \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R \\
&= \delta\pi h R^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{12}\delta h R^2.
\end{aligned}
$$

8. (a) Bestäm arean av den del av rotationsparaboloiden $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2\}$ som ligger inuti cylindern $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = R^2\}$, där R är ett givet positivt tal. (*2p*)

   (b) Bestäm arean av den del av sadelytan $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 2xy\}$ som ligger inuti cylindern ovan. (*1p*) **(3p)**

   Lösning. (a) $z = x^2 + y^2 \implies \frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$, så att ytelementet är lika med

$$
dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\, dxdy.
$$

   Därmed blir den sökta arean lika med

$$
\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2 \le R^2} \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\, dxdy \\
&= \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (1+4r^2)^{1/2}\, r dr d\theta \\
&= 2\pi \cdot \left[(1+4r^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\right]_0^R \\
&= \frac{\pi}{6}\left((1+4R^2)^{3/2} - 1\right).
\end{aligned}
$$

   (b) $z = 2xy \implies \frac{\partial z}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x \implies$ ytelementet är lika med

$$
\sqrt{1 + 4y^2 + 4x^2}\, dxdy,
$$

   vilket är samma som ovan, varför vi också får samma svar här.

9. Längs z-axeln går en konstant elektrisk ström. En magnetisk masspunkt i $\mathbf{r} = (x,y,z)$ påverkas av denna ström med kraften

$$
\mathbf{F} = \frac{k}{x^2+y^2}(-y, x, 0), \qquad \text{där } k \text{ är en viss konstant.}
$$

Arbetet som $\mathbf{F}$ utför då den magnetiska masspunkten följer kurvan $\mathcal{C}$ från $\mathbf{r}_0$ till $\mathbf{r}_1$ ges av linjeintegralen $A = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(a) Uttryck linjeintegralen med hjälp av cylinderkoordinater. (*1p*)

(b) Beräkna arbetet då $\mathcal{C}$ går från $\mathbf{r}_0 = (1, -1, 2)$ till $\mathbf{r}_1 = (1, 1, 7)$ och hela tiden befinner sig i det högra halvrummet $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0\}$. (*1p*)

(c) Beräkna arbetet då $\mathcal{C}$ är en sluten kurva vars projektion på xy-planet inte omsluter origo. (*1p*)

(d) Beräkna arbetet då $\mathcal{C}$ är en sluten kurv vars projektion på xy-planet går ett varv i positiv led runt origo. (*1p*) **(4p)**

Lösning.

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \frac{k}{x^2 + y^2}(-y, x, 0) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= k \int_{\text{proj}(\mathcal{C})} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

där proj($\mathcal{C}$) är $\mathcal{C}$:s projektion på xy-planet.

(a) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \Longrightarrow -y\,dx + x\,dy$
$= -r\sin\theta(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) + r\cos\theta(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) = r^2\,d\theta,$

vilket betyder att

$$\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = d\theta,$$

och

$$\begin{aligned} A &= k \int_{\text{proj}(\mathcal{C})} d\theta \\ &= k \cdot (\text{ totala vinkeländringen då man genomlöper proj}(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

(b) $A = k \cdot (\text{vinkeländringen från } -\pi/4 \text{ till } \pi/4) = k \cdot \pi/2.$

(c) proj($\mathcal{C}$) omsluter *inte* origo $\Longrightarrow$

$$A = k \cdot (\text{vinkeländringen från en viss vinkel till samma vinkel}) = 0.$$

(d) proj($\mathcal{C}$) går ett varv i positiv led runt origo $\Longrightarrow A = k \cdot 2\pi.$

10. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $(xz, -yz, z^3)$ och låt $\mathcal{S}$ vara den 2-dimensionella enhetssfären $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Beräkna flödesintegralen

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

där $\hat{\mathbf{N}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen. **(3p)**

Lösning. Enligt divergenssatsen är

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz \\
&= \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} (z - z + 3z^2)\, dxdydz = 3 \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} z^2\, dxdydz \\
&= 3 \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho^2 \cos^2\phi \cdot \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta \\
&= 3 \int_{\rho=0}^{1} \rho^4\, d\rho \cdot \int_{\phi=0}^{\pi} \cos^2\phi \sin\phi\, d\phi \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \\
&= 3 \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{1} \cdot \left[-\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_{\phi=0}^{\pi} \cdot 2\pi \\
&= \frac{1}{5} \cdot (1+1) \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{5}.
\end{aligned}$$