Institutionen för Matematik, KTH
Olle Stormark

Tentamen i 5B1107 Differential- och integralkalkyl II för F1, 02–08–21.

- Inga hjälpmedel.
- Ange dina bonuspoäng på omslaget.
- Uppgifterna nedan är tillsammans värda 35 poäng, vilket betyder att man med bonuspoängen kan komma upp i 35+4=39 poäng.
- Betygsgränser: 16–23 poäng ger betyget 3, 24–30 poäng ger betyget 4 och 31–39 poäng ger betyget 5.
- Varje lösning SKALL åtföljas av förklarande text och/eller figur. Alla räkningar SKALL redovisas. I den mån kända satser används, så SKALL förutsättningarna för dessa anges.

1. Bestäm arean av den yta som fås genom att rotera kurvan
$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 2t^3, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1,$$
omkring y-axeln. (3p)

2. En punkt P rör sig längs skärningen mellan cylindern $z = x^2$ och planet $x + y = 2$ med den riktning i vilken y växer, så att P har den konstanta farten $v = 3$. Bestäm P:s hastighet $\boldsymbol{v}$ i $(1, 1, 1)$. (4p)

3. Beräkna förstaderivatorna i origo av funktionen
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + 3y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
(3p)

4. Låt $f(u, v, w)$ vara en oändligt deriverbar funktion av de tre variablerna u,v och w. Då är
$$g(x, y) = f(y^2, xy, -x^2)$$
en oändligt deriverbar funktion av x och y. Uttryck
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}.$$
med hjälp av f:s första- och andraderivator. (4p)

5. (a) Förklara vad som menas med att funktionen $f(x, y)$ är *differentierbar* i punkten (a, b). (1p)

   (b) *Visa*:
$$f(x, y) \text{ differentierbar i } (a, b) \Longrightarrow f(x, y) \text{ kontinuerlig i } (a, b).$$
(1p)

   (c) Är följande påstående sant? Bevisa, eller ange ett motexempel!
$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ finns i } (a, b) \Longrightarrow f(x, y) \text{ är kontinuerlig i } (a, b).$$
(1p)

6. Ekvationssystemet
$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3, \\ x^3 z + 2y - uv = 2, \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases} \qquad (*)$$
betyder geometriskt skärningen mellan tre hyperytor i det 5-dimensionella (x, y, z, u, v)-rummet och *bör* därmed utgöra en 2-dimensionell yta i det 5-dimensionella rummet.

Visa att man nära punkten $(1, 1, 1, 1, 1)$ kan lösa ut x, y och z som funktioner av u och v, så att ytan (*) där kan skrivas på parameterformen
$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$$
samt beräkna förstaderivatorna av $x(u, v)$, $y(u, v)$ och $z(u, v)$ då $(u, v) = (1, 1)$. (4p)

7. Bestäm de största och minsta värdena som koordinatfunktionen x antar på skärningskurvan mellan planet $z = x + y$ och ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$. (4p)

8. Låt a och c vara givna positiva tal, och låt R vara det område som ligger ovanför konen $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ och inuti sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Beräkna integralen

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz. \qquad \text{(3p)}$$

9. Låt

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \text{ och } x^2 + y^2 \geq a^2\}$$

(dvs. $\mathcal{D}$ är ett klot med ett cylindriskt hål), och låt $\mathcal{S}$ vara $\mathcal{D}$:s yta. $\mathcal{S}$ består av två delar: insidan $\mathcal{S}_i$ (= delmängd av cylinderytan $x^2 + y^2 = a^2$) och utsidan $\mathcal{S}_u$ (= delmängd av sfäriska ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$). Beräkna flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = (x + yz, y - xz, z - e^x \sin y)$$

genom

   (a) hela ytan $\mathcal{S}$, (1p)

   (b) insidan $\mathcal{S}_i$, (1p)

   (c) utsidan $\mathcal{S}_u$. (1p)

10. Låt $\mathcal{C}$ vara skärningen mellan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (där a är ett givet positivt tal) och $x + y + z = 0$. Visa att

$$\oint_{\mathcal{C}} y\, dx + z\, dy + x\, dz = \pm\sqrt{3}\pi a^2,$$

där tecknet beror på $\mathcal{C}$:s orientering. (4p)

Lycka till!