Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen i 5B1107 Differential- och integralkalkyl II för F1, 02–04–10, kl. 8.00–13.00.

- Inga hjälpmedel.
- Ange dina bonuspoäng på omslaget.
- Uppgifterna nedan är tillsammans värda 35 poäng, vilket betyder att man med bonuspoängen maximalt kan komma upp i 35+4=39 poäng.
- *Normalt* används följande betygsgränser: 16–23 p ger betyget 3, 24–30 p ger betyget 4 och 31–39 p ger betyget 5. *Observera dock* att dessutom kan helhetsintrycket påverka betyget—uppåt eller nedåt.
- Varje lösning *skall* åtföljas av förklarande text och/eller figur. Alla räkningar *skall* redovisas. I den mån man använder sig av kända satser, så *skall* förutsättningarna för dessa anges.
- Det kommer att finnas ett lösningsförslag på nätadressen

  www.math.kth.se/~olles/5B1107april02losn.pdf

  efter skrivningens slut.
- Skrivningarna kan efter ett par veckor hämtas på matematikinstitutionens studentexpedition i Klocktornet, Lindstedtsvägen 25.

1. Funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

är snäll och väluppfostrad överallt utom möjligen i origo. Visa att f är kontinuerlig i origo, att de partiella derivatorna $\partial f/\partial x$ och $\partial f/\partial y$ finns där, samt undersök om f är differentierbar i origo. (4p)

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{D}} y\,dxdy,$$

där $\mathcal{D}$ är området mellan kurvorna $y = \sqrt{1-x}$, $y = \sqrt{1+x}$ och linjen $y = 0$. (3p)

3. Beräkna trippelintegralen

$$\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dxdydz,$$

där $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$. (3p)

4. Visa att $3xy^2 + 1 > 0$ då $x^2 + 2y^2 \leq 1$. (3p)

5. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 3, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

definierar en kurva $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^3$, vilken går genom punkten $(1,1,1)$.

Visa att nära $(1,1,1)$ kan $\mathcal{C}$ skrivas på formen

$$\begin{cases} x = f(z), \\ y = g(z), \end{cases}$$

samt beräkna $f'(1)$ och $g'(1)$. (3p)

6. Låt $\mathcal{S}$ vara en yta i rummet med randkurvan $\mathcal{C}$ och låt $\hat{\mathbf{N}}$ vara en enhetsnormal till $\mathcal{S}$ som är positivt orienterad med avseende på $\mathcal{C}$. Låt vidare $\mathbf{v} = (a,b,c)$, där a, b och c är konstanter. Visa att

$$\oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2 \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS. \qquad \text{(3p)}$$

7. Låt $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ och } z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$, och låt $\mathcal{S}$ vara $\mathcal{D}$:s begränsningsyta.

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (zy^4, x^3, z^2)$ ut genom $\mathcal{S}$. (3p)

8. Beräkna arean av den del av första kvadranten som ligger innanför kurvan $x^3 + y^3 = 3xy$ (=”Descartes blad”).

   Ledning: Kurvan kan parametriseras genom att man till varje punkt (x, y) på kurvan associerar lutningen t för den linje som går genom $(0, 0)$ och (x, y). Gör man detta fås

$$y = tx \Longrightarrow x^3 + t^3x^3 = 3tx^2 \Longrightarrow x(1 + t^3) = 3t \Longrightarrow$$
$$(x, y) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right), \quad \text{där} \quad 0 \le t < \infty. \qquad \text{(3p)}$$

9. Transformera Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

   till polära koordinater. (5p)

10. Bestäm de kurvor i rummet som har konstant krökning κ och konstant torsion τ genom att integrera Frenetformlerna

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{T}} \\ \hat{\boldsymbol{N}} \\ \hat{\boldsymbol{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{T}} \\ \hat{\boldsymbol{N}} \\ \hat{\boldsymbol{B}} \end{pmatrix}.$$

   Ledning: Börja med att titta på $d^2\hat{\mathbf{N}}/ds^2$. (5p)

Lycka till!