Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till tentamen i 5B1107 Differential- och integralkalkyl II för F1, 02–04–10.

1. *Funktionen*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

är snäll och väluppfostrad överallt utom möjligen i origo. Visa att f är kontinuerlig i origo, att de partiella derivatorna $\partial f/\partial x$ och $\partial f/\partial y$ finns där, samt undersök om f är differentierbar i origo. (4p)

Lösning: Då $(x,y) \neq (0,0)$ kan man använda polära koordinater:

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \Longrightarrow f = \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r}$$
$$= r\cos\theta\sin\theta \to 0 \quad \text{då } r \to 0 \Longrightarrow f \text{ är kontinuerlig i } (0,0).$$

Eftersom f är identiskt noll på x- och y-axlarna, så är

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

f är differentierbar i origo om

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0 \text{ då } (h,k) \to (0,0).$$

Här är detta uttryck lika med

$$\frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - h \cdot 0 - k \cdot 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{h^2+k^2} = \{ \text{ polära koordinater } \}$$
$$= \cos\theta\sin\theta, \text{ som } \textit{inte} \text{ går mot 0 då } r = \sqrt{h^2+k^2} \to 0.$$

Slutsats: f är *inte* differentierbar i origo.

2. Beräkna dubbelintegralen
$$\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{D}} y\,dxdy,$$
där $\mathcal{D}$ är området mellan kurvorna $y = \sqrt{1-x}$, $y = \sqrt{1+x}$ och linjen $y = 0$. (3p)

Lösning:
$$\begin{aligned} y = \sqrt{1-x} &\iff x = 1 - y^2 \quad \text{och } y \geq 0, \\ y = \sqrt{1+x} &\iff x = y^2 - 1 \text{ och } y \geq 0; \end{aligned}$$
dessa kurvor skär varandra då
$$x = 1 - y^2 = y^2 - 1 \iff y^2 = 1 \iff y = 1 \text{ (eftersom } y \geq 0).$$
Därmed blir
$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=-1+y^2}^{x=1-y^2} dx \right) y\,dy = \int_{y=0}^{y=1} 2(1-y^2)y\,dy \\ &= 2\int_0^1 (y - y^3)\,dy = 2\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. *Beräkna trippelintegralen*
$$\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dxdydz,$$
där $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. (3p)

Lösning: Med sfäriska koordinater fås
$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{\rho=1}^{2} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta}{\rho^5} \cdot \rho^2 \sin\phi\,d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_{\rho=1}^{2} \frac{d\rho}{\rho} \cdot \int_{\phi=0}^{\pi} \sin^3\phi\,d\phi \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta \\ &= \ln 2 \cdot \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\phi) \sin\phi\,d\phi \cdot \pi = \{u = \cos\phi,\ du = -\sin\phi d\phi\} \\ &= \pi\ \ln 2 \cdot \int_1^{-1} (1-u^2)\,(-du) = \pi\ \ln 2 \cdot 2\int_0^1 (1-u^2)\,du \\ &= 2\pi\ \ln 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi\ \ln 2}{3}. \end{aligned}$$

4. *Visa att* $3xy^2 + 1 > 0$ *då* $x^2 + 2y^2 \leq 1$. (3p)

Lösning: Vi ska visa att minsta värdet för $f(x,y) = 3xy^2 + 1$ i $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ är > 0.

$\mathcal{D}$:s inre:

$$\begin{cases} 0 = \partial f/\partial x = 3y^2 \iff y = 0, \\ 0 = \partial f/\partial y = 6xy; \text{ då } y = 0 \text{ fås att } x \text{ är godtycklig.} \end{cases}$$

D.v.s., om f antar sitt minsta värde i $\mathcal{D}$:s inre, så sker det på x-axeln, där $f = 1 > 0$.

$\mathcal{D}$:s rand: Här är

$$y^2 = \frac{1}{2}(1 - x^2) \quad \text{då } -1 \leq x \leq 1,$$

varför

$$\begin{aligned} f &= 3x \cdot \frac{1}{2}(1 - x^2) + 1 = \frac{3}{2}(x - x^3) + 1 \text{ då } -1 \leq x \leq 1, \text{ och} \\ 0 &= \frac{df}{dx} = \frac{3}{2}(1 - 3x^2) \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Så möjliga x-värden där f kan anta sitt minsta värde är ± 1 och $\pm 1/\sqrt{3}$. Då $x = \pm 1 \implies f = 1$ och $x = \pm 1/\sqrt{3} \implies f = 1 \pm 1/\sqrt{3}$ ser man att f:s minsta värde då $x^2 + 2y^2 \leq 1$ är lika med $1 - 1/\sqrt{3}$, som *är* > 0.

5. *Ekvationssystemet*

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 3, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

definierar en kurva $\mathcal{C}$ *i* $\mathbb{R}^3$, *vilken går genom punkten* $(1,1,1)$.

Visa att nära $(1,1,1)$ *kan* $\mathcal{C}$ *skrivas på formen*

$$\begin{cases} x = f(z), \\ y = g(z), \end{cases}$$

samt beräkna $f'(1)$ *och* $g'(1)$. (3p)

Lösning: Differentiering av ekvationerna ger

$$\begin{cases} (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = 0, \\ x\,dx - y\,dy + z\,dz = 0 \end{cases}$$

som då $x = y = z = 1$ reduceras till

$$(*) \qquad \begin{cases} dx + dy + dz = 0 & (1) \\ dx - dy + dz = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Longrightarrow dx = -dz \quad \text{och} \quad (1) - (2) \Longrightarrow dy = 0.$$

Eftersom man således kan lösa ut dx och dy som multipler av dz ur $(*)$, så säger implicita funktionssatsen att man nära punkten $(1,1,1)$ kan lösa ut x och y som funktioner av z:

$$\begin{cases} x = f(z), \\ y = g(z). \end{cases}$$

Och $dx = -dz \Longrightarrow f'(1) = -1$, $dy = 0 \Longrightarrow g'(1) = 0$.

6. *Låt $\mathcal{S}$ vara en yta i rummet med randkurvan $\mathcal{C}$ och låt $\hat{\mathbf{N}}$ vara en enhetsnormal till $\mathcal{S}$ som är positivt orienterad med avseende på $\mathcal{C}$. Låt vidare $\mathbf{v} = (a, b, c)$, där a, b och c är konstanter. Visa att*

$$\oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2 \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Eftersom

$$\mathbf{v} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = (bz - cy, cx - az, ay - bx)$$

och

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bz - cy & cx - az & ay - bx \end{vmatrix} = (a + a, b + b, c + c) = 2\mathbf{v},$$

så säger Stokes sats att

$$\oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 2 \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

7. *Låt $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ och $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\}$, och låt $\mathcal{S}$ vara $\mathcal{D}$:s begränsningsyta.*

   Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (zy^4, x^3, z^2)$ ut genom $\mathcal{S}$. (3p)

   Lösning: Divergenssatsen säger att

$$\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz,$$

   där $\operatorname{div} \mathbf{F} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) \cdot (zy^4, x^3, z^2) = 2z$. I sfäriska koordinater ges $\mathcal{D}$ av $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \phi \le \pi/4$ och $0 \le \theta \le 2\pi$, så att

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= 2 \int_{\rho=0}^{1} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho \cos \phi \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= 2 \int_{\rho=0}^{1} \rho^3 \, d\rho \cdot \int_{\phi=0}^{\pi/4} \sin \phi \cdot \cos \phi \, d\phi \cdot 2\pi \\ &= 4\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

8. *Beräkna arean av den del av första kvadranten som ligger innanför kurvan $x^3 + y^3 = 3xy$ (="Descartes blad").*

   Ledning: *Kurvan kan parametriseras genom att man till varje punkt (x, y) på kurvan associerar lutningen t för den linje som går genom $(0, 0)$ och (x, y). Gör man detta fås*

$$\begin{aligned}&y = tx \implies x^3 + t^3x^3 = 3tx^2 \implies x(1 + t^3) = 3t \implies \\ &(x, y) = \left(\frac{3t}{1 + t^3}, \frac{3t^2}{1 + t^3} \right), \quad \text{där} \quad 0 \le t < \infty.\end{aligned}$$ (3p)

   Lösning: Enligt en känd formel (som följer omedelbart ur Greens sats) ges arean innanför en sluten kurva $\mathcal{C}$ av

$$A = \oint_{\mathcal{C}} (-y) \, dx = \oint_{\mathcal{C}} x \, dy = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} -y \, dx + x \, dy.$$

   Här är

$$\begin{aligned}-y \, dx + x \, dy &= - tx \, dx + x \, d(tx) = -tx \, dx + x(x \, dt + t \, dx) \\ &= x^2 \, dt = \frac{9t^2}{(1 + t^3)^2} \, dt,\end{aligned}$$

så att

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{9t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = \{u = 1+t^3,\ du = 3t^2\,dt\} \\
&= \frac{3}{2}\int_1^\infty \frac{du}{u^2} = \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^\infty = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

9. *Transformera Laplaces ekvation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

till polära koordinater. (5p)

Lösning:

$$
\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \implies \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} \implies
$$

$$
\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \frac{-\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},
$$

varur man läser ut att

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Med hjälp av kedjeregeln fås nu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{-\sin\theta}{r}$$

och

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{-\sin\theta}{r}\right)\cdot\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot(-\sin\theta)\cdot\frac{-\sin\theta}{r} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\cdot\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\cdot\frac{-\sin\theta}{r}\right)\cdot\frac{-\sin\theta}{r} \\
&+ \frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\left(\frac{-\cos\theta}{r}\cdot\frac{-\sin\theta}{r} + \frac{\sin\theta}{r^2}\cdot\cos\theta\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\cos^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{r^2} \\
&+ \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\sin^2\theta}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}.
\end{aligned}
$$

På precis samma sätt ser man att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \sin^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\cos^2\theta}{r^2}$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{-2\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

Adderar man uttrycken för $\partial^2 u/\partial x^2$ och $\partial^2 u/\partial y^2$ så ser man med hjälp av trigonometriska ettan att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

10. *Bestäm de kurvor i rummet som har konstant krökning κ och konstant torsion τ genom att integrera Frenetformlerna*

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{T}} \\ \hat{\boldsymbol{N}} \\ \hat{\boldsymbol{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{T}} \\ \hat{\boldsymbol{N}} \\ \hat{\boldsymbol{B}} \end{pmatrix}.$$

Ledning: *Börja med att titta på $d^2\hat{\boldsymbol{N}}/ds^2$.* (5p)

Lösning: Eftersom κ och τ är konstanta ger derivation av

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{N}}}{ds} = -\kappa\hat{\boldsymbol{T}} + \tau\hat{\boldsymbol{B}}$$

att

$$\frac{d^2\hat{\boldsymbol{N}}}{ds^2} = -\kappa \cdot \kappa\hat{\boldsymbol{N}} + \tau \cdot (-\tau\hat{\boldsymbol{N}})$$

eller

$$\frac{d^2\hat{\boldsymbol{N}}}{ds^2} + (\kappa^2 + \tau^2)\hat{\boldsymbol{N}} = 0,$$

det vill säga den berömda svängningsekvationen från mekaniken, med den välkända lösningen

$$\hat{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{C_1}\cos(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}s) + \boldsymbol{C_2}\sin(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}s),$$

där $\boldsymbol{C_1}$ och $\boldsymbol{C_2}$ är godtyckliga konstanta vektorer. Integration av

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{T}}}{ds} = \kappa\hat{\boldsymbol{N}}$$

ger härnäst att

$$\hat{\boldsymbol{T}} = \frac{\boldsymbol{C_1}\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\sin(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}s) - \frac{\boldsymbol{C_2}\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\cos(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}s) + \boldsymbol{C_3},$$

med en ny konstant vektor $\boldsymbol{C_3}$. Till slut fås $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ genom att integrera $d\mathbf{r}/ds = \hat{\boldsymbol{T}}$:

$$\mathbf{r} = -\frac{\boldsymbol{C_1}\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\cos(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}s) - \frac{\boldsymbol{C_2}\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\sin(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}s) + \boldsymbol{C_3}s + \boldsymbol{C_4},$$

med ännu en ny konstant vektor $\boldsymbol{C_4}$.