Nicolae MIHALACHE-CIURDEA

Rapport sur les travaux effectués

Mes travaux récents se sont portés sur les relations entre les propriétés dynamiques et géométriques de l'ensemble de Julia des applications rationnelles. La section suivante présente les résultats antérieurs dans cette direction, afin de fixer le cadre. Une deuxième section décrit les résultats que j'ai obtenu pendant ma thèse. Ensuite j'énonce mes résultats récents sur la régularité John et la connectivité locale des ensembles de Julia.

Hyperbolicité et ses versions plus faibles

Soit f une application rationnelle de degré $d \geq 2$ et J son ensemble de Julia. L'ensemble de Julia est l'adhérence des orbites périodiques répulsives et l'ensemble de Fatou, son complémentaire, contient toutes les orbites périodiques attractives et leurs bassins d'attraction. Tout bassin d'attraction d'une orbite périodique attractive contient un point critique de f. Si f est un polynôme, J est connexe si et seulement si toutes les orbites critiques sont bornées. On dit que f est hyperbolique s'il existe des constantes $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que

$$\left|(f^n)'(z)\right| > C\lambda^n \text{ pour tous } z \in J \text{ et } n \geq 1.$$

Une application rationnelle est hyperbolique si et seulement si les orbites critiques ne s'accumulent pas sur l'ensemble de Julia (et dans ce cas il n'y a pas de point critique dans J). Les dynamiques hyperboliques sont totalement comprises et la conjecture de Fatou affirme que l'ensemble des applications rationnelles hyperboliques est dense dans l'ensemble des applications rationnelles de degré d. Dans sa thèse de doctorat [1], Aspenberg a monté que l'ensemble de paramètres des dynamiques Collet-Eckmann qui ne sont pas hyperboliques n'est pas négligeable. Cela motive aussi l'étude des applications faiblement hyperboliques.

Dans le cas où l'ensemble de Julia contient des points critiques on peut se demander si on peut obtenir une expansion uniforme sur des sous-ensembles compacts invariants de l'ensemble de Julia. Cela est vrai par exemple pour l'ensemble des points d'accumulation $\omega(c')$ d'une orbite critique $O(c')$ si pour tout $c \in \mathrm{Crit}$ (l'ensemble des points critiques), $\omega(c)$ est disjoint de l'ensemble des points critiques Crit, en l'absence d'orbite périodique parabolique (orbite périodique indifférente de multiplicateur rationnel). La condition de Misiurewicz demande cette propriété pour toutes les orbites critiques de l'ensemble de Julia. Elle a été ensuite généralisée en demandant seulement $c \notin \omega(c)$ pour tout $c \in \mathrm{Crit} \cap J$ en l'absence d'orbite périodique parabolique. On appelle cette condition *semi-hyperbolicité*. En dynamique unimodale ou quadratique la condition de Collet-Eckmann est impliquée par la semi-hyperbolicité. On dit qu'un point critique $c \in \mathrm{Crit}$ satisfait à la condition de Collet-Eckmann s'il existe des constantes $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que

$$\left|(f^n)'(f(c))\right| > C\lambda^n \text{ pour tout } n \geq 1.$$

On dit que f satisfait à la condition de Collet-Eckmann si tous ses points critiques dans J sont Collet-Eckmann en l'absence d'orbite périodique parabolique et on dénote cette condition par CE.

L'étude de la régularité des composantes de l'ensemble de Fatou a été initiée par Carleson, Jones et Yoccoz dans [2]. Ils démontrent qu'un polynôme est semi-hyperbolique si et seulement si le bassin d'attraction de l'infini est un domaine de John. Graczyk et Smirnov montrent plus tard dans [3] que les composantes de l'ensemble de Fatou sont des domaines de Hölder pour les applications rationnelles CE. Voir aussi [4] pour une généralisation de la condition de Collet-Eckmann. On dit que l'application f satisfait à la condition de Collet-Eckmann de deuxième espèce $CE2(z_0)$ pour un $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ s'il existe des constantes $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que pour tout $y \in f^{-n}(z_0)$ avec $n > 0$ on a

$$\left|(f^n)'(y)\right| > C\lambda^n.$$

Przytycki, Rivera-Letelier et Smirnov établissent en [12] l'équivalence entre $CE2(z_0)$ pour un $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ et la *décroissance exponentielle du diamètre* des composantes ($ExpShrink$). En fait elles sont équivalentes à plusieurs conditions dont l'hyperbolicité uniforme sur les orbites périodiques répulsives et la condition de Collet-Eckmann topologique. Cette dernière est formulée exclusivement en termes topologiques donc ces conditions sont préservées par conjugaison topologique. On dit que l'application rationnelle f satisfait à $ExpShrink$ s'il existe $r > 0$ et $\lambda > 1$ tels que pour tout $z \in J$ et $n > 0$

$$\operatorname{diam} \operatorname{Comp} f^{-n}\left(B(z, r)\right) < \lambda^{-n}.$$

Carleson, Jones et Yoccoz [2] montrent aussi que les polynômes semi-hyperboliques satisfont $ExpShrink$ et donc toutes ces conditions équivalentes. La réciproque n'est pas vraie, voir [12]. Également, la condition CE n'est pas impliquée par ces conditions équivalentes, sauf dans le cas où l'application a un seul point critique, voir [9]. Une application rationnelle satisfaisant ces conditions équivalentes a une dynamique presque hyperbolique. Cela a aussi des conséquences sur la géométrie de l'ensemble de Julia. Par exemple, dans le cas polynomial, la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Julia est strictement inférieure à 2 et il est localement connexe s'il est connexe, voir [3].

La condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes

Pendant ma thèse, j'ai étudié une condition plus générale que la semi-hyperbolicité et que la condition de Collet-Eckmann. On l'appelle *Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes* (RCE) et son étude a été inspirée par les résultats de [2] et [3]. Une application rationnelle f satisfait à cette condition si elle ne possède pas d'orbite périodique parabolique et tout point critique récurrent dans l'ensemble de Julia est Collet-Eckmann. J'ai démontré qu'elle a comme conséquence $ExpShrink$ et donc la régularité Hölder des composantes de l'ensemble de Fatou [6]. J'ai construit un contre-exemple pour la réciproque [7].

La condition CE pour les orbites critiques récurrentes a déjà été formulée dans le cas S-multimodal [14]. Disposant seulement de contre-exemples semi-hyperboliques pour l'invariance topologique de CE pour ces applications, Świątek conjecture l'invariance topologique de RCE pour les applications S-multimodales. Les techniques que j'ai développées pour construire un polynôme *ExpShrink* qui ne satisfait pas à RCE produisent aussi un contre-exemple pour cette conjecture [7].

Géométrie de l'ensemble de Julia

Récemment j'ai montré dans [8] que les composantes connexes de l'ensemble de Fatou d'une application rationnelle semi-hyperbolique sont des domaines de John et que la réciproque n'est pas vraie. Ceci généralise le résultat de Carleson, Jones et Yoccoz [2]. Ils montrent qu'un polynôme est semi-hyperbolique si et seulement si l'ensemble de Julia est *fractal*.

En [2], la fractalité de l'ensemble de Julia des polynômes est montrée équivalente aussi à la régularité John du bassin d'attraction de l'infini. Ceci implique la régularité John de toutes les composantes connexes de l'ensemble de Fatou. Un domaine $\Omega\subseteq\overline{\mathbb{C}}$ est un domaine ε-*John* s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $z_1 \in \Omega$ il existe un arc $\gamma\subseteq\Omega$ qui connecte z_1 à z_0 tel que pour tout $z \in \gamma$

$$\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon \operatorname{dist}(z, z_1).$$

Comme conséquence du résultat principal de ma thèse ($RCE \Rightarrow ExpShrink$) une application rationnelle est semi-hyperbolique si et seulement si J est fractal. En utilisant une caractérisation de la régularité John en termes de la métrique quasi-hyperbolique (obtenue par Herron en [5]), j'ai obtenu la régularité John des composantes de l'ensemble de Fatou d'une telle application. Si de plus J est connexe alors la régularité John est uniforme et J est uniformément localement connexe.

On peut généraliser *ExpShrink* en demandant seulement que le diamètre des préimages des disques centrés sur J soit borné par les termes d'une série convergente. On dit qu'une telle application rationnelle a une décroissance sommable des diamètres (*SumShrink*). J'ai aussi montré [8] que si f satisfait à *SumShrink* et si J est connexe, alors le diamètre des composantes connexes de l'ensemble de Fatou converge vers 0. En utilisant aussi la connexité locale de leur frontière, montrée en [4] par Graczyk et Smirnov, j'obtiens que l'ensemble de Julia est localement connexe.

Des classes d'applications rationnelles qui satisfont à *SumShrink* mais qui ne satisfont pas à *ExpShrink* ont été étudiées par exemple en [4], [13] et [11].

Références

[1] M. Aspenberg. *The Collet-Eckmann condition for rational functions on the Riemann sphere.* Thèse de doctorat, KTH, Suède 2004.

[2] L. Carleson, P. Jones et J.C. Yoccoz. Julia and John. *Bol. Soc. Bras. Mat.* 25, 1-30 (1994).

[3] J. Graczyk et S. Smirnov. Collet, Eckmann and Hölder. *Invent. Math.* 133 (1998), 69-96.

[4] J. Graczyk et S. Smirnov. Non-uniform hyperbolicity in complex dynamics. *Invent. Math.*, 2008.

[5] David A. Herron. John domains and the quasihyperbolic metric. *Complex Variables theory Appl.*, 39(4) :327–334, 1999.

[6] N. Mihalache. Collet-Eckmann condition for recurrent critical orbits implies uniform hyperbolicity on periodic orbits. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 27(4) :1267-1286, 2007.

[7] N. Mihalache. Two counterexamples in multimodal dynamics. (arXiv :0810.1474v1).

[8] N. Mihalache. John and Julia revisited. (arXiv :0803.3889v2)

[9] F. Przytycki. Hölder implies Collet-Eckmann. *Géometrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995). Astérisque* 261 (2000), xiv, 385-403.

[10] F. Przytycki. On measure and Hausdorff dimension of Julia sets for holomorphic Collet-Eckmann maps. *International Conference on Dynamical Systems* (Montevideo, 1995), 167-181, *Pitma Res. Notes. Math.* Ser. 362, Longman, Harlow

[11] Feliks Przytycki. An improvement of J. Rivera-Letelier result on weak hyperbolicity on periodic orbits for polynomials. *Proyecciones*, 24(3) :277–286 (2006), 2005.

[12] F. Przytycki, J. Rivera-Letelier et S. Smirnov. Equivalence and topological invariance of conditions for non-uniform hyperbolicity in the iteration of rational maps. *Invent. Math.* 151 (2003), 29-63.

[13] J. Rivera-Letelier. Weak hyperbolicity on periodic orbits for polynomials. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(12) :1113–1118, 2002.

[14] G. Świątek. Collet-Eckmann condition in one-dimensional dynamics. *Smooth ergodic theory and its applications* (Seattle,WA,1999), 489-498, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 69, *Amer. Math. Soc., Providence*, RI, 2001.