

La condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes

Nicolae Mihalache

Soutenance de thèse

Orsay, 12 Décembre 2006

Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

Définition

L'**ensemble de Fatou** est défini par

$$\mathcal{F} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid (f^n)_{n>0} \text{ est normale sur un voisinage de } z\}.$$

L'**ensemble de Julia** est

$$\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}.$$

Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

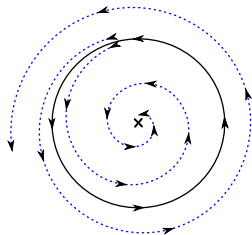
Définition

L'**ensemble de Fatou** est défini par

$$\mathcal{F} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid (f^n)_{n>0} \text{ est normale sur un voisinage de } z\}.$$

L'**ensemble de Julia** est

$$\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}.$$



$$f(z) = z^2$$

Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

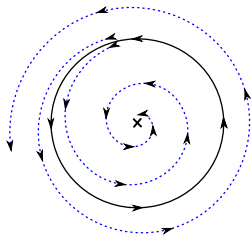
Définition

L'ensemble de Fatou est défini par

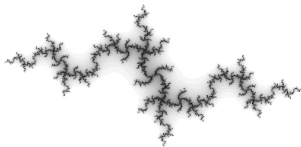
$$\mathcal{F} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid (f^n)_{n>0} \text{ est normale sur un voisinage de } z\}.$$

L'ensemble de Julia est

$$\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}.$$



$$f(z) = z^2$$



$$f(z) = z^2 + c_0$$

Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

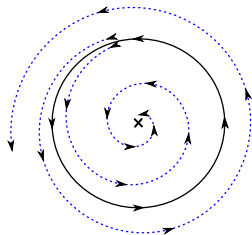
Définition

L'ensemble de Fatou est défini par

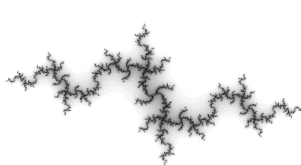
$$\mathcal{F} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid (f^n)_{n>0} \text{ est normale sur un voisinage de } z\}.$$

L'ensemble de Julia est

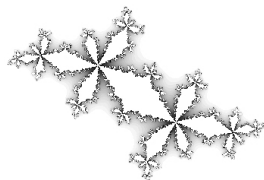
$$\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}.$$



$$f(z) = z^2$$



$$f(z) = z^2 + c_0$$



$$f(z) = z^2 + c_1$$

Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

Définition

L'ensemble de Fatou est défini par

$$\mathcal{F} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid (f^n)_{n>0} \text{ est normale sur un voisinage de } z\}.$$

L'ensemble de Julia est

$$\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}.$$

Propriétés des ensembles \mathcal{J} et \mathcal{F}

- \mathcal{J} est compact parfait non vide et \mathcal{F} est ouvert
- \mathcal{J} et \mathcal{F} sont totalement invariants
- $\mathcal{J} = \overline{\bigcup_{n>0} f^{-n}(z)}$ pour tout $z \in \mathcal{J}$
- \mathcal{J} est l'adhérence de l'ensemble des orbites périodiques répulsives
- toute composante de \mathcal{F} est périodique ou prépériodique [Sullivan, '85]

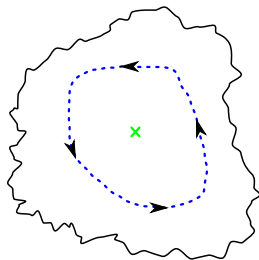
L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes **périodiques** de \mathcal{F}

L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes **périodiques** de \mathcal{F}

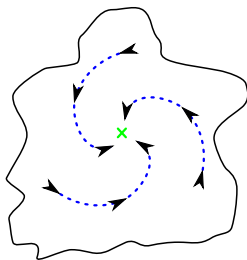
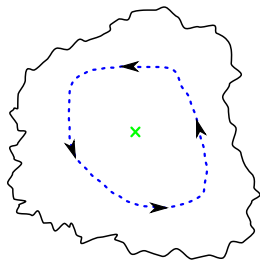
- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)



L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes **périodiques** de \mathcal{F}

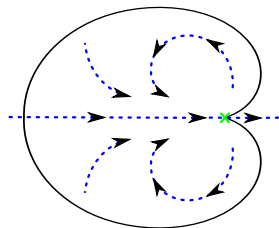
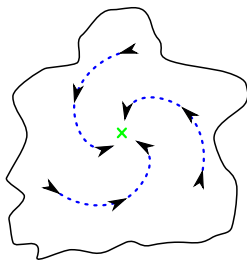
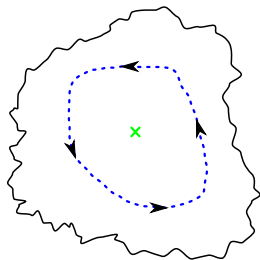
- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- cycles attractifs (contiennent une orbite périodique attractive)



L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes **périodiques** de \mathcal{F}

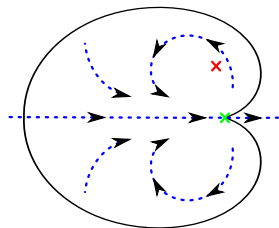
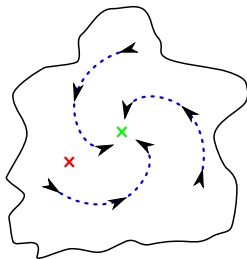
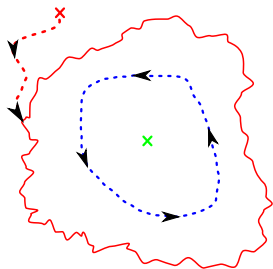
- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- cycles attractifs (contiennent une orbite périodique attractive)
- cycles paraboliques (la frontière contient une orbite périodique indifférente de multiplicateur rationnel)



L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes **périodiques** de \mathcal{F}

- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- cycles attractifs (contiennent une orbite périodique attractive)
- cycles paraboliques (la frontière contient une orbite périodique indifférente de multiplicateur rationnel)



L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes **périodiques** de \mathcal{F}

- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- cycles attractifs (contiennent une orbite périodique attractive)
- cycles paraboliques (la frontière contient une orbite périodique indifférente de multiplicateur rationnel)

L'ensemble **critique** est

$$\text{Crit} = \{c \in \overline{\mathbb{C}} \mid f'(c) = 0\}.$$

L'ensemble **postcritique** est

$$\text{PC} = \{f^n(c) \mid c \in \text{Crit}, n \geq 0\}.$$

L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes **périodiques** de \mathcal{F}

- **domaines de rotation** (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- cycles attractifs (contiennent une orbite périodique attractive)
- cycles paraboliques (la frontière contient une orbite périodique indifférente de multiplicateur rationnel)

L'ensemble **critique** est

$$\text{Crit} = \{c \in \overline{\mathbb{C}} \mid f'(c) = 0\}.$$

L'ensemble **postcritique** est

$$\text{PC} = \{f^n(c) \mid c \in \text{Crit}, n \geq 0\}.$$

Proposition

Soit U une composante **périodique** de \mathcal{F} .

- si U est un **domaine de rotation** alors $\partial U \subseteq \overline{\text{PC}}$,

L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes **périodiques** de \mathcal{F}

- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- **cycles attractifs** (contiennent une orbite périodique attractive)
- **cycles paraboliques** (la frontière contient une orbite périodique indifférente de multiplicateur rationnel)

L'ensemble **critique** est

$$\text{Crit} = \{c \in \overline{\mathbb{C}} \mid f'(c) = 0\}.$$

L'ensemble **postcritique** est

$$\text{PC} = \{f^n(c) \mid c \in \text{Crit}, n \geq 0\}.$$

Proposition

Soit U une composante **périodique** de \mathcal{F} .

- si U est un domaine de rotation alors $\partial U \subseteq \overline{\text{PC}}$,
- **sinon** il existe $n \geq 0$ tel que $\text{Crit} \cap f^n(U) \neq \emptyset$.

Hyperbolicité et sous-hyperbolicité

Soit f **sans** cycle **parabolique**. Alors pour tout $c \in \text{Crit} \cap \mathcal{F}$

$$\text{dist}(\{f^n(c) \mid n \geq 0\}, \mathcal{J}) > 0.$$

Hyperbolicité et sous-hyperbolicité

Soit f **sans** cycle **parabolique**. Alors pour tout $c \in \text{Crit} \cap \mathcal{F}$

$$\text{dist}(\{f^n(c) \mid n \geq 0\}, \mathcal{J}) > 0.$$

Définition

On appelle f *hyperbolique* si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites

- $\exists C > 0 \exists \lambda > 1 \forall z \in \mathcal{J} \forall n \geq 1 |(f^n)'| > C\lambda^n.$
- $\text{Crit} \cap \mathcal{J} = \emptyset.$

Si f est hyperbolique alors $\text{HDim}(\mathcal{J}) < 2.$

Hyperbolicité et sous-hyperbolicité

Soit f **sans** cycle **parabolique**. Alors pour tout $c \in \text{Crit} \cap \mathcal{F}$

$$\text{dist}(\{f^n(c) \mid n \geq 0\}, \mathcal{J}) > 0.$$

Définition

On appelle f *hyperbolique* si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites

- $\exists C > 0 \exists \lambda > 1 \forall z \in \mathcal{J} \forall n \geq 1 |(f^n)'| > C\lambda^n.$
- $\text{Crit} \cap \mathcal{J} = \emptyset.$

Si f est hyperbolique alors $\text{HDim}(\mathcal{J}) < 2.$

Définition

On appelle f *sous-hyperbolique* si $\text{PC} \cap \mathcal{J}$ est *fini*.

Si f est un polynôme sous-hyperbolique et \mathcal{J} est connexe alors \mathcal{J} est **localement connexe**.

- Soit f sans cycle parabolique, $\text{Crit}_{\mathcal{J}} = \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\text{PC}_{\mathcal{J}} = \text{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\text{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f \text{ Hyp.} & \Rightarrow & f \text{ Sous-hyp.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \text{ poly.} \\ \text{HD}(\mathcal{J}) < 2 & & \mathcal{J} \text{ l.c.} \end{array}$$

Semi-hyperbolicité

Définition

On appelle f *semi-hyperbolique* si pour tout $c \in \text{Crit} \cap \mathcal{J}$, $c \notin \omega(c)$.

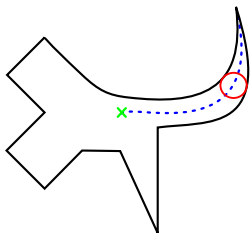
Semi-hyperbolicité

Définition

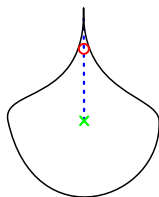
On appelle f *semi-hyperbolique* si pour tout $c \in \text{Crit} \cap \mathcal{J}$, $c \notin \omega(c)$.

Un domaine Ω est un **domaine de John** s'il existe $z_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $z_1 \in \Omega$ il existe une courbe γ qui connecte z_0 à z_1 telle que

$$\forall z \in \gamma \quad \text{dist}(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon \text{dist}(z, z_1).$$



John



pas John

Semi-hyperbolicité

Définition

On appelle f *semi-hyperbolique* si pour tout $c \in \text{Crit} \cap \mathcal{J}$, $c \notin \omega(c)$.

Un domaine Ω est un *domaine de John* s'il existe $z_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $z_1 \in \Omega$ il existe une courbe γ qui connecte z_0 à z_1 telle que

$$\forall z \in \gamma \quad \text{dist}(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon \text{dist}(z, z_1).$$

Théorème (Carleson, Jones, Yoccoz - '94)

Si f est un *polynôme* alors les conditions suivantes sont *équivalentes* :

- f est *semi-hyperbolique*.
- Toute composante de \mathcal{F} est un *domaine de John*.
- Il existe $r > 0$, $\lambda > 1$ et $\mu < \infty$ telles que pour tout $z \in \mathcal{J}$, $n \geq 0$ et W une composante de $f^{-n}(B(z, r))$

$$\deg_W(f^n) \leq \mu \text{ et } \text{diam } W \leq \lambda^{-n}.$$

- Soit f sans cycle parabolique, $\text{Crit}_{\mathcal{J}} = \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\text{PC}_{\mathcal{J}} = \text{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\text{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \text{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \text{NR} \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 f \text{ Hyp.} & \Rightarrow & f \text{ Sous-hyp.} & \Rightarrow & f \text{ SH} \\
 & & & & \text{[CJY]} \Downarrow \text{ poly.} \\
 & & & & \mathcal{F} \text{ John} \\
 \\
 \Downarrow & & \Downarrow \text{ poly.} & & \\
 \text{HD}(\mathcal{J}) < 2 & & \mathcal{J} \text{ l.c.} & &
 \end{array}$$

La condition de Collet-Eckmann

Définition

On appelle f *Collet-Eckmann* s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que

$$\forall c \in \text{Crit} \cap \mathcal{J} \quad \forall n \geq 1 \quad |(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

La condition de Collet-Eckmann

Définition

On appelle f **Collet-Eckmann** s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que

$$\forall c \in \text{Crit} \cap \mathcal{J} \quad \forall n \geq 1 \quad |(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

Un domaine Ω simplement connexe est un **domaine de Hölder** si l'application de Riemann $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ s'étend à une application Hölder continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Cette définition peut être généralisée pour tout domaine.

$$\Omega \text{ John} \Rightarrow \Omega \text{ Hölder}$$

La condition de Collet-Eckmann

Définition

On appelle f *Collet-Eckmann* s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que

$$\forall c \in \text{Crit} \cap \mathcal{J} \quad \forall n \geq 1 \quad |(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

Un domaine Ω simplement connexe est un **domaine de Hölder** si l'application de Riemann $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ s'étend à une application Hölder continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Cette définition peut être généralisée pour tout domaine.

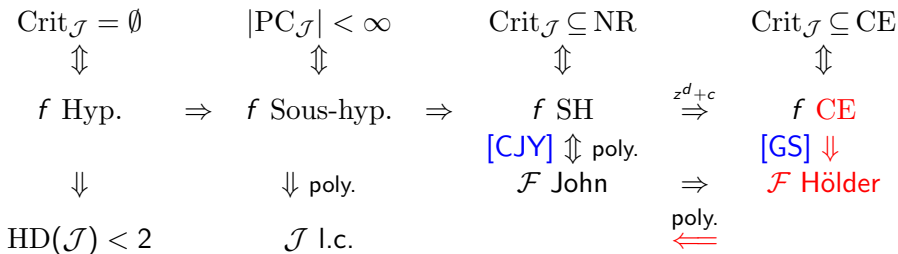
$$\Omega \text{ John} \Rightarrow \Omega \text{ Hölder}$$

Théorème (Graczyk, Smirnov - '98)

Si f est *Collet-Eckmann* alors toutes les composantes de l'ensemble de Fatou sont des **domaines de Hölder**.

Si f est un polynôme et \mathcal{F} est Hölder alors $\text{HDim}(\mathcal{J}) < 2$. Si de plus \mathcal{J} est connexe alors \mathcal{J} est **localement connexe**.

- Soit f sans cycle parabolique, $\text{Crit}_{\mathcal{J}} = \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\text{PC}_{\mathcal{J}} = \text{PC} \cap \mathcal{J}$.



Conditions équivalentes à la régularité Hölder de \mathcal{F}

Théorème (Przytycki, Rivera-Letelier, Smirnov - '03)

Les conditions suivantes impliquent l'absence d'orbites paraboliques, elles sont équivalentes et invariantes par conjugaison topologique :

CE₂(z₀) Il existe $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, $C > 0$ et $\lambda > 1$ tels que pour tout $n \geq 1$ et $w \in f^{-n}(z_0)$

$$|(f^n)'(w)| > C\lambda^n.$$

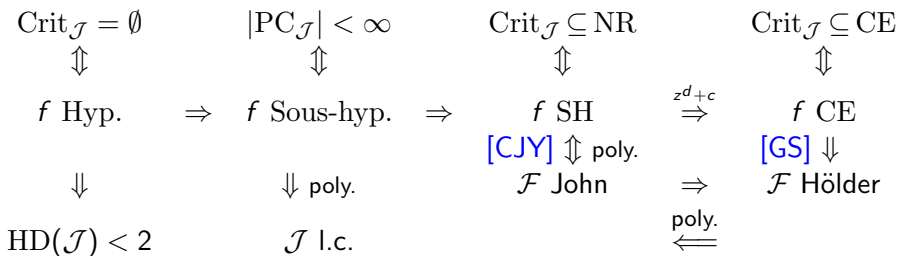
UHP Il existe $\lambda > 1$ telle que tout point périodique répulsif p de période $n \geq 1$ satisfait $|(f^n)'(p)| > \lambda^n$.

ExpShrink Il existe $r > 0$ et $\lambda > 1$ telles que pour tout $z \in \mathcal{J}$, $n \geq 0$ et W une composante de $f^{-n}(B(z, r))$

$$\text{diam } W \leq \lambda^{-n}.$$

Consequence : En utilisant aussi des résultats de Graczyk et Smirnov, en présence des cycles attractifs, ces conditions sont équivalentes à la régularité Hölder des composantes de \mathcal{F} .

- Soit f sans cycle parabolique, $\text{Crit}_{\mathcal{J}} = \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\text{PC}_{\mathcal{J}} = \text{PC} \cap \mathcal{J}$.



$$\left. \begin{array}{l} \text{SH} \Rightarrow \\ \text{CE} \Rightarrow \end{array} \right\} \text{Hölder} \Leftrightarrow \text{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \text{UHP} \Leftrightarrow \text{ExpShrink} \Leftrightarrow \text{TCE} \text{ [PRS]}$$

Invariance topologique et contre-exemples

Théorème (Nowicki, Przytycki, Sands - '98)

*La condition de **Collet-Eckmann** pour les applications S -unimodales est invariante par conjugaison topologique.*

Invariance topologique et contre-exemples

Théorème (Nowicki, Przytycki, Sands - '98)

*La condition de **Collet-Eckmann** pour les applications S -unimodales est invariante par conjugaison topologique.*

Théorème (Przytycki '00)

*Si $|\text{Crit} \cap \mathcal{J}| = 1$ et \mathcal{F} est **Hölder**, alors f est **Collet-Eckmann**.*

Invariance topologique et contre-exemples

Théorème (Nowicki, Przytycki, Sands - '98)

*La condition de **Collet-Eckmann** pour les applications S -unimodales est invariante par conjugaison topologique.*

Théorème (Przytycki '00)

*Si $|\text{Crit} \cap \mathcal{J}| = 1$ et \mathcal{F} est **Hölder**, alors f est **Collet-Eckmann**.*

On dispose de contre-exemples **semi-hyperboliques** pour l'invariance topologique de la condition de Collet-Eckmann.

Invariance topologique et contre-exemples

Théorème (Nowicki, Przytycki, Sands - '98)

*La condition de **Collet-Eckmann** pour les applications S -unimodales est invariante par conjugaison topologique.*

Théorème (Przytycki '00)

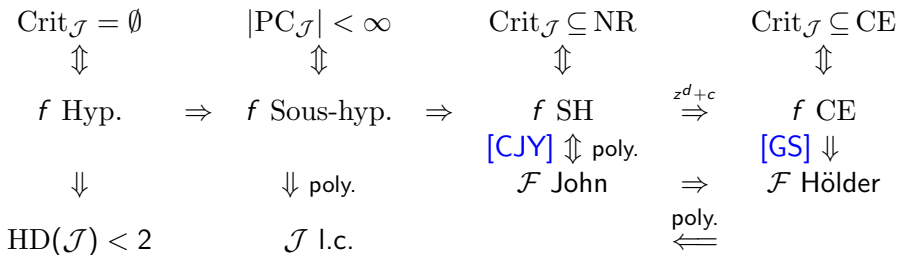
*Si $|\text{Crit} \cap \mathcal{J}| = 1$ et \mathcal{F} est **Hölder**, alors f est **Collet-Eckmann**.*

On dispose de contre-exemples **semi-hyperboliques** pour l'invariance topologique de la condition de Collet-Eckmann.

Conjecture (Świątek - '99)

*La condition de **Collet-Eckmann** pour les points critiques récurrents des applications S -multimodales est invariante par conjugaison topologique.*

- Soit f sans cycle parabolique, $\text{Crit}_{\mathcal{J}} = \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\text{PC}_{\mathcal{J}} = \text{PC} \cap \mathcal{J}$.



$$\left. \begin{array}{l} \text{SH} \Rightarrow \\ \text{CE} \Rightarrow \end{array} \right\} \text{Hölder} \Leftrightarrow \text{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \text{UHP} \Leftrightarrow \text{ExpShrink} \Leftrightarrow \text{TCE} \quad [\text{PRS}]$$

Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	? Oui [Sw]
rationnelle	Oui	Non (SH)	?

La condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes

On dit que f satisfait à la **condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes** (RCE) s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que pour tout $c \in \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ récurrent ($c \in \omega(c)$) et tout $n \geq 1$

$$|(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

La condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes

On dit que f satisfait à la **condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes** (RCE) s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que pour tout $c \in \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ récurrent ($c \in \omega(c)$) et tout $n \geq 1$

$$|(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

Théorème (N.M.)

RCE \Rightarrow Hölder.

La condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes

On dit que f satisfait à la **condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes** (RCE) s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que pour tout $c \in \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ récurrent ($c \in \omega(c)$) et tout $n \geq 1$

$$|(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

Théorème (N.M.)

$$\text{RCE} \Rightarrow \text{Hölder}.$$

Théorème (N.M.)

Il existe un polynôme réel *Hölder* de degré 3 qui n'est *pas* RCE.

La condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes

On dit que f satisfait à la **condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes** (RCE) s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que pour tout $c \in \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ récurrent ($c \in \omega(c)$) et tout $n \geq 1$

$$|(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

Théorème (N.M.)

RCE \Rightarrow Hölder.

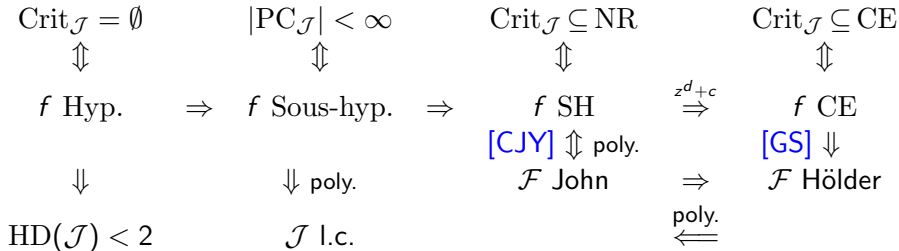
Théorème (N.M.)

Il existe un polynôme réel **Hölder** de degré 3 qui n'est *pas* RCE.

Théorème (N.M.)

La condition RCE *n'est pas invariante par conjugaison topologique* dans la classe des applications 2-modales avec dérivée Schwarzienne négative.

- Soit f sans cycle parabolique, $\text{Crit}_{\mathcal{J}} = \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\text{PC}_{\mathcal{J}} = \text{PC} \cap \mathcal{J}$.



$$\left. \begin{array}{l} \text{SH} \Rightarrow \\ \text{CE} \Rightarrow \end{array} \right\} \text{RCE} \Rightarrow \text{Hölder} \Leftrightarrow \text{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \text{ExpShrink} \Leftrightarrow \text{TCE} \quad \text{[PRS]}$$

Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	Non
rationnelle	Oui	Non (SH)	?

Distorsion

Lemme de Koebe

Soit $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe *univalente* du disque unité dans le plan complexe. L'image $g(\mathbb{D})$ contient le disque $B(g(0), \frac{1}{4} |g'(0)|)$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

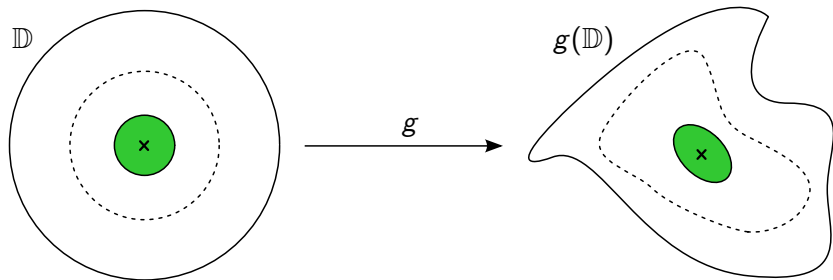
$$\frac{(1 - |z|)}{(1 + |z|)^3} \leq \frac{|g'(z)|}{|g'(0)|} \leq \frac{(1 + |z|)}{(1 - |z|)^3}.$$

Distorsion

Lemme de Koebe

Soit $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe *univalente* du disque unité dans le plan complexe. L'image $g(\mathbb{D})$ contient le disque $B(g(0), \frac{1}{4}|g'(0)|)$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$\frac{(1 - |z|)}{(1 + |z|)^3} \leq \frac{|g'(z)|}{|g'(0)|} \leq \frac{(1 + |z|)}{(1 - |z|)^3}.$$

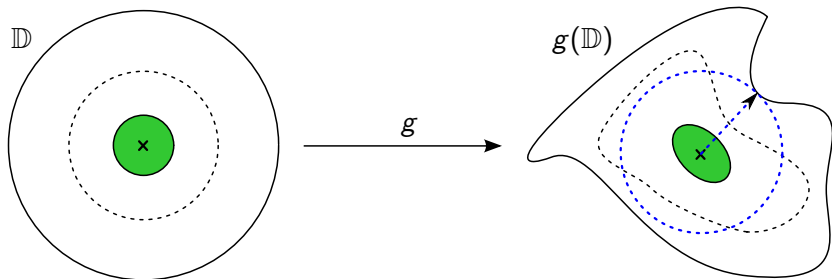


Distorsion

Lemme de Koebe

Soit $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe *univalente* du disque unité dans le plan complexe. L'image $g(\mathbb{D})$ contient le disque $B(g(0), \frac{1}{4}|g'(0)|)$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$\frac{(1 - |z|)}{(1 + |z|)^3} \leq \frac{|g'(z)|}{|g'(0)|} \leq \frac{(1 + |z|)}{(1 - |z|)^3}.$$

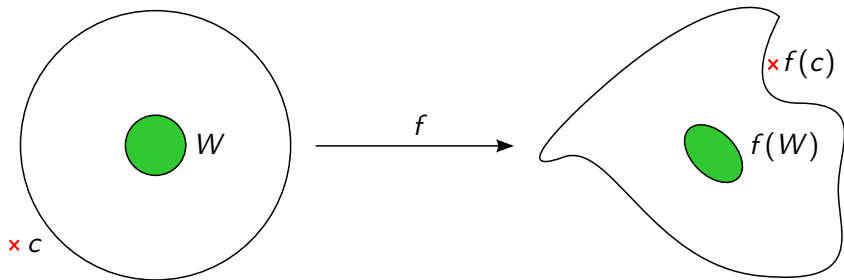


Distorsion

Lemme de Koebe

Soit $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe *univalente* du disque unité dans le plan complexe. L'image $g(\mathbb{D})$ contient le disque $B(g(0), \frac{1}{4}|g'(0)|)$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$\frac{(1 - |z|)}{(1 + |z|)^3} \leq \frac{|g'(z)|}{|g'(0)|} \leq \frac{(1 + |z|)}{(1 - |z|)^3}.$$



Distorsion

Lemme de Koebe

Soit $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe *univalente* du disque unité dans le plan complexe. L'image $g(\mathbb{D})$ contient le disque $B(g(0), \frac{1}{4} |g'(0)|)$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$\frac{(1 - |z|)}{(1 + |z|)^3} \leq \frac{|g'(z)|}{|g'(0)|} \leq \frac{(1 + |z|)}{(1 - |z|)^3}.$$

Corollaire

Pour tout $D > 1$ il existe $\varepsilon > 0$ qui ne dépend pas de f tel que pour tout ouvert connexe W avec $\text{diam } W \leq \varepsilon \text{ dist}(W, \text{Crit})$

$$\sup_{x, y \in \overline{W}} \left| \frac{f'(x)}{f'(y)} \right| \leq D.$$

Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Théorème (Carleson, Jones, Yoccoz - '94)

Si f est un polynôme alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- f est *semi-hyperbolique*.
- Toute composante de \mathcal{F} est un domaine de John.
- Il existe $r > 0$, $\lambda > 1$ et $\mu < \infty$ telles que pour tout $z \in \mathcal{J}$, $n \geq 0$ et W une composante de $f^{-n}(B(z, r))$

$$\deg_W(f^n) \leq \mu \text{ et } \text{diam } W \leq \lambda^{-n}.$$

Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Lemme (distorsion géométrique)

Pour tout $\mu \geq 1$ il existe $0 < \tau_\mu < 1$ et $0 < C_\mu$ telles que pour tout *polynôme* f , $R > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $W = B(z, 2R)^{-1}$ et $W' = B(z, R)^{-1} \subseteq W$, si $\deg_W f \leq \mu$ alors

$$\text{diam } W' < \tau_\mu \text{ diam } W \text{ et}$$

$$\text{dist}(z', \partial W') > C_\mu \text{ diam } W'.$$

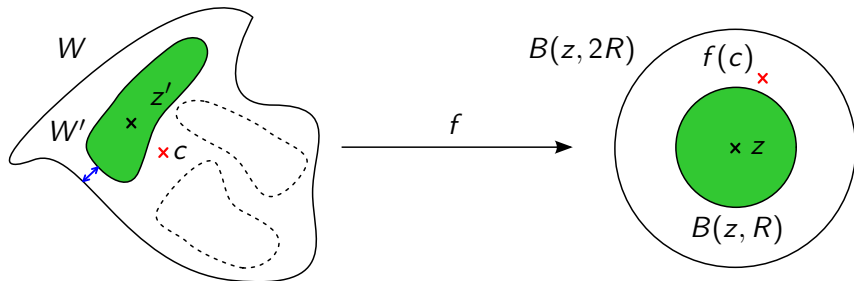
Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Lemme (distorsion géométrique)

Pour tout $\mu \geq 1$ il existe $0 < \tau_\mu < 1$ et $0 < C_\mu$ telles que pour tout *polynôme* f , $R > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $W = B(z, 2R)^{-1}$ et $W' = B(z, R)^{-1} \subseteq W$, si $\deg_W f \leq \mu$ alors

$$\text{diam } W' < \tau_\mu \text{ diam } W \text{ et}$$

$$\text{dist}(z', \partial W') > C_\mu \text{ diam } W'.$$



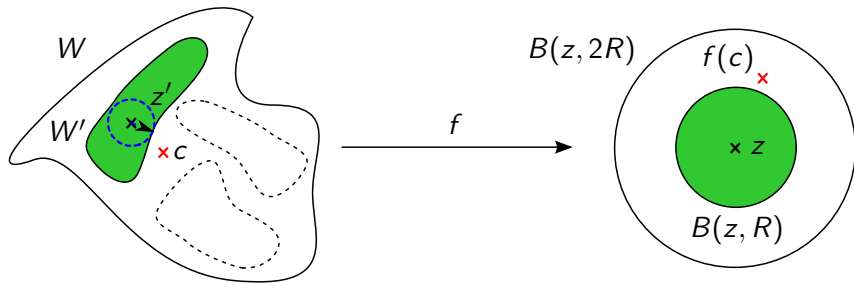
Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Lemme (distorsion géométrique)

Pour tout $\mu \geq 1$ il existe $0 < \tau_\mu < 1$ et $0 < C_\mu$ telles que pour tout *polynôme* f , $R > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $W = B(z, 2R)^{-1}$ et $W' = B(z, R)^{-1} \subseteq W$, si $\deg_W f \leq \mu$ alors

$$\text{diam } W' < \tau_\mu \text{ diam } W \text{ et}$$

$$\text{dist}(z', \partial W') > C_\mu \text{ diam } W'.$$



Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Lemme (distorsion géométrique)

Pour tout $\mu \geq 1$ il existe $0 < \tau_\mu < 1$ et $0 < C_\mu$ telles que pour tout polynôme f , $R > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $W = B(z, 2R)^{-1}$ et $W' = B(z, R)^{-1} \subseteq W$, si $\deg_W f \leq \mu$ alors

$$\text{diam } W' < \tau_\mu \text{diam } W \text{ et}$$

$$\text{dist}(z', \partial W') > C_\mu \text{diam } W'.$$

- il existe $\varepsilon > 0$ et $\mu \geq 1$ tels que pour tout $z \in \mathcal{J}$ si $W = B(z, r)^{-n}$ et $\text{diam } f^i(W) < \varepsilon$ pour $i = 0, \dots, n-1$ alors

$$\deg_W f^n \leq \mu.$$

Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Lemme (distorsion géométrique)

Pour tout $\mu \geq 1$ il existe $0 < \tau_\mu < 1$ et $0 < C_\mu$ telles que pour tout polynôme f , $R > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $W = B(z, 2R)^{-1}$ et $W' = B(z, R)^{-1} \subseteq W$, si $\deg_W f \leq \mu$ alors

$$\text{diam } W' < \tau_\mu \text{diam } W \text{ et}$$

$$\text{dist}(z', \partial W') > C_\mu \text{diam } W'.$$

- il existe $\varepsilon > 0$ et $\mu \geq 1$ tels que pour tout $z \in \mathcal{J}$ si $W = B(z, r)^{-n}$ et $\text{diam } f^i(W) < \varepsilon$ pour $i = 0, \dots, n-1$ alors

$$\deg_W f^n \leq \mu.$$

Définition

On appelle f *stable en arrière* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in \mathcal{J} \forall n \geq 1 \text{diam } B(z, \delta)^{-n} < \varepsilon.$$

Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.

Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

- si f est **stable en arrière** alors il existe $L > 0$ tel que

$$\text{diam } B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \quad \forall z \in \mathcal{J}.$$

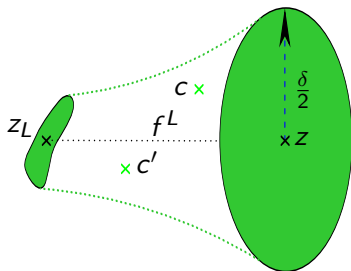
Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

- si f est **stable en arrière** alors il existe $L > 0$ tel que

$$\text{diam } B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \quad \forall z \in \mathcal{J}.$$



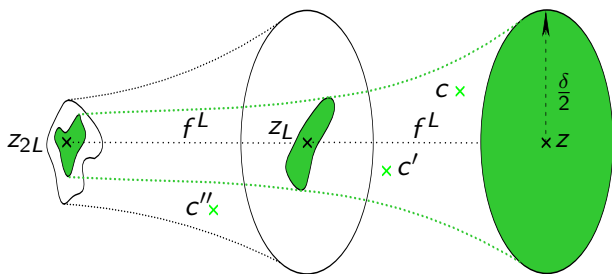
Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

- si f est **stable en arrière** alors il existe $L > 0$ tel que

$$\text{diam } B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \quad \forall z \in \mathcal{J}.$$



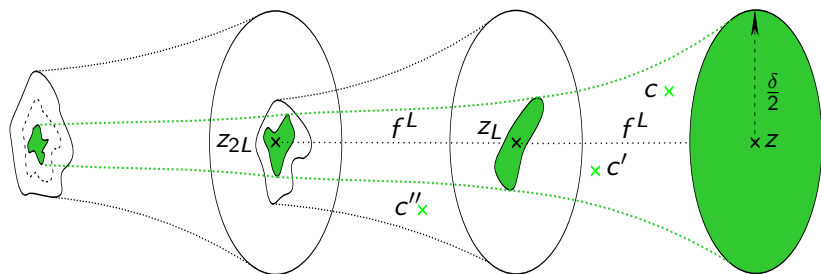
Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

- si f est **stable en arrière** alors il existe $L > 0$ tel que

$$\text{diam } B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \quad \forall z \in \mathcal{J}.$$



Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

- si f est **stable en arrière** alors il existe $L > 0$ tel que

$$\text{diam } B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \quad \forall z \in \mathcal{J}.$$

- par une construction du type **télescope**, pour tout $z \in \mathcal{J}$ et $k \geq 1$

$$\text{diam } B(z, \delta/2)^{-kL} < \tau_\mu^k \delta.$$

Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

- si f est **stable en arrière** alors il existe $L > 0$ tel que

$$\text{diam } B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \quad \forall z \in \mathcal{J}.$$

- par une construction du type **télescope**, pour tout $z \in \mathcal{J}$ et $k \geq 1$

$$\text{diam } B(z, \delta/2)^{-kL} < \tau_{\mu}^k \delta.$$

- un lemme de Mañé implique la **stabilité en arrière**.

Lemme de Mañé

Il existe V un voisinage de \mathcal{J} tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 1$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in V$, si $\text{deg}_{B(z, 2\delta)}^{-n} \leq \mu$ alors

$$\text{diam } B(z, \delta)^{-n} < \varepsilon.$$

Esquisse de la preuve du Théorème GS

Stratégie générale :

$$\text{CE} \Rightarrow \text{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder}.$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0, \dots, N}$ une orbite en arrière de z_0 , arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'échelle - et on construit un **télescope** autour de cette orbite.

Esquisse de la preuve du Théorème GS

Stratégie générale :

$$\text{CE} \Rightarrow \text{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder.}$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0, \dots, N}$ une orbite en arrière de z_0 , arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'échelle - et on construit un **télescope** autour de cette orbite.

- $\exists L > 0 \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)-L} f^L = 1$ alors

$$\left| (f^L)'(z_L) \right| > 2.$$

Esquisse de la preuve du Théorème GS

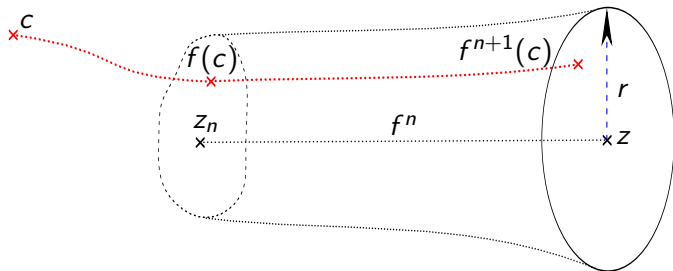
Stratégie générale :

$$CE \Rightarrow CE_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder.}$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0, \dots, N}$ une orbite en arrière de z_0 , arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'échelle - et on construit un **télescope** autour de cette orbite.

- $\exists L > 0 \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)-L} f^L = 1$ alors

$$\left| (f^L)'(z_L) \right| > 2.$$



Esquisse de la preuve du Théorème GS

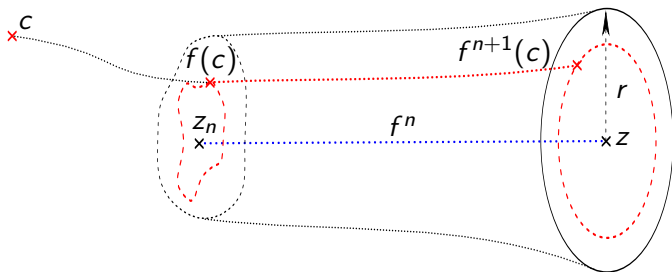
Stratégie générale :

$$\text{CE} \Rightarrow \text{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder.}$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0, \dots, N}$ une orbite en arrière de z_0 , arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'échelle - et on construit un **télescope** autour de cette orbite.

- $\exists L > 0 \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)-L} f^L = 1$ alors

$$\left| (f^L)'(z_L) \right| > 2.$$



Esquisse de la preuve du Théorème GS

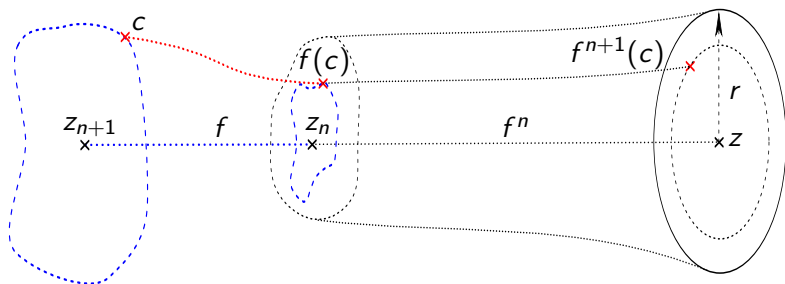
Stratégie générale :

$$\text{CE} \Rightarrow \text{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder.}$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0, \dots, N}$ une orbite en arrière de z_0 , arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'échelle - et on construit un **télescope** autour de cette orbite.

- $\exists L > 0 \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)-L} f^L = 1$ alors

$$\left| (f^L)'(z_L) \right| > 2.$$



Esquisse de la preuve du Théorème GS

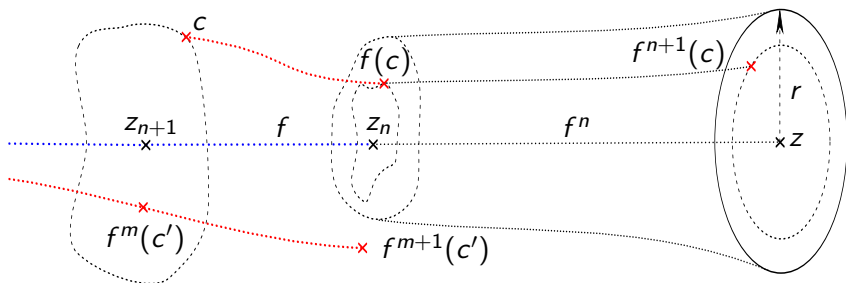
Stratégie générale :

$$\text{CE} \Rightarrow \text{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder.}$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0, \dots, N}$ une orbite en arrière de z_0 , arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'échelle - et on construit un **télescope** autour de cette orbite.

- $\exists L > 0 \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)} f^L = 1$ alors

$$\left| (f^L)'(z_L) \right| > 2.$$



Esquisse de la preuve du Théorème GS

Stratégie générale :

$$\text{CE} \Rightarrow \text{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder.}$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0, \dots, N}$ une orbite en arrière de z_0 , arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'échelle - et on construit un **télescope** autour de cette orbite.

- $\exists L > 0 \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)-L} f^L = 1$ alors

$$\left| (f^L)'(z_L) \right| > 2.$$

- il existe $1 < \lambda_0 < \lambda$ tel que si $B(z, r)^{-n-1} \cap \text{Crit}_{\mathcal{J}} \neq \emptyset$ et n minimal avec cette propriété alors

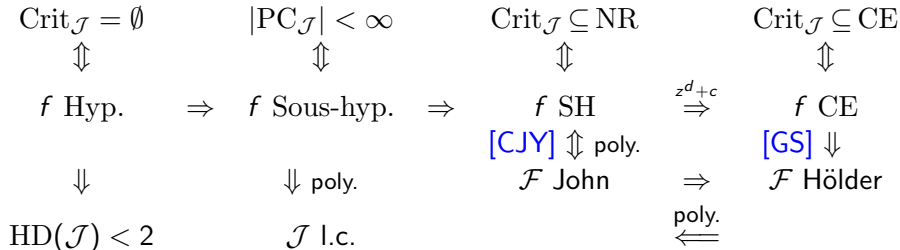
$$\left| (f^n)'(z_n) \right| > \lambda_0^n.$$

- si $c \in \text{Crit}$ alors sur $B(c, R)$

$$f(z) \approx f(c) + C_c(z - c)^{\mu_c}.$$

- **télescope** avec 3 types de tubes $\Rightarrow \text{CE}_2(z_0)$.

- Soit f sans cycle parabolique, $\text{Crit}_{\mathcal{J}} = \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\text{PC}_{\mathcal{J}} = \text{PC} \cap \mathcal{J}$.



$$\left. \begin{array}{l} \text{SH} \Rightarrow \\ \text{CE} \Rightarrow \end{array} \right\} \text{RCE} \Rightarrow \text{Hölder} \Leftrightarrow \text{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \text{ExpShrink} \Leftrightarrow \text{TCE} \quad \text{[PRS]}$$

Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	Non
rationnelle	Oui	Non (SH)	?

Esquisse de la preuve de RCE \Rightarrow Hölder

Stratégie générale :

télescope \Rightarrow ExpShrink

Esquisse de la preuve de RCE \Rightarrow Hölder

Stratégie générale :

télescope \Rightarrow ExpShrink

Nouveaux outils :

- contrôle de la distorsion dans le cas **rationnel**. Si $0 < r < R$, $W = B(z, R)^{-1}$, $W' = B(z, r)^{-1} \subseteq W$ et $\mu = \deg_W g$ alors

$$\frac{\text{diam } W'}{\text{diam } W} < 64 \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Esquisse de la preuve de RCE \Rightarrow Hölder

Stratégie générale :

télescope \Rightarrow ExpShrink

Nouveaux outils :

- contrôle de la distorsion dans le cas **rationnel**. Si $0 < r < R$, $W = B(z, R)^{-1}$, $W' = B(z, r)^{-1} \subseteq W$ et $\mu = \deg_W g$ alors

$$\frac{\text{diam } W'}{\text{diam } W} < 64 \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

- contraction exponentielle du diamètre en présence des orbites CE **sans borne a priori** du **degré**. Il existe $\varepsilon > 0$ et $1 < \lambda_0 < \lambda$ tels que pour tout $z \in \mathcal{J}$, $W = B(z, r)^{-n-1}$ si $W \cap \text{CE} \neq \emptyset$ et $\text{diam } f^i(W) < \varepsilon$ pour tout $i = 1, \dots, n$ alors

$$\text{diam } f(W) < \lambda_0^{-n} r.$$

Esquisse de la preuve de RCE \Rightarrow Hölder

Stratégie générale :

télescope \Rightarrow ExpShrink

Nouveaux outils :

- contrôle de la distorsion dans le cas **rationnel**. Si $0 < r < R$, $W = B(z, R)^{-1}$, $W' = B(z, r)^{-1} \subseteq W$ et $\mu = \deg_W g$ alors

$$\frac{\text{diam } W'}{\text{diam } W} < 64 \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

- contraction exponentielle du diamètre en présence des orbites CE **sans borne a priori** du **degré**. Il existe $\varepsilon > 0$ et $1 < \lambda_0 < \lambda$ tels que pour tout $z \in \mathcal{J}$, $W = B(z, r)^{-n-1}$ si $W \cap \text{CE} \neq \emptyset$ et $\text{diam } f^i(W) < \varepsilon$ pour tout $i = 1, \dots, n$ alors

$$\text{diam } f(W) < \lambda_0^{-n} r.$$

En utilisant aussi un argument de compacité et le lemme de Mañé on obtient la **stabilité en arrière**.

Construction du télescope

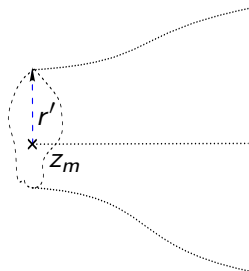
Soit $\mu = \prod_{c \in \text{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \text{CE} \neq \emptyset.$$

Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \text{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

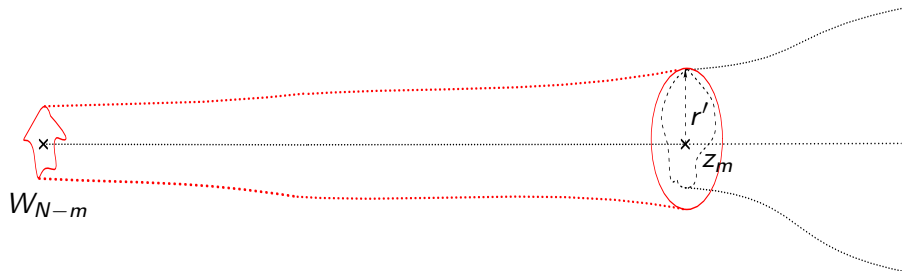
$$f^k(W) \cap \text{CE} \neq \emptyset.$$



Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathbb{N}^R} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

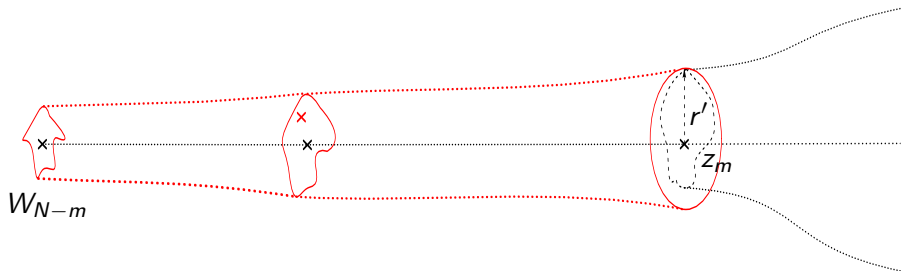
$$f^k(W) \cap \text{CE} \neq \emptyset.$$



Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathbb{N}^R} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \text{CE} \neq \emptyset.$$

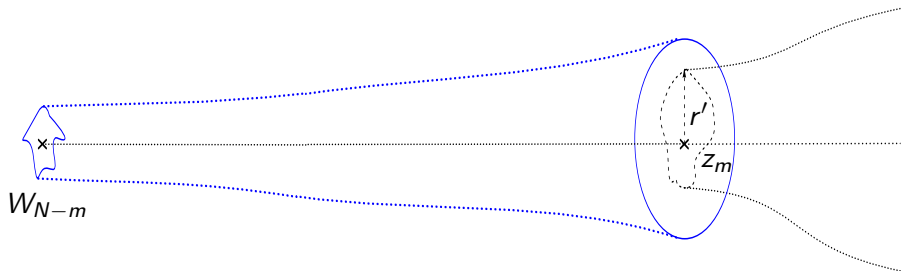


- **type 1** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$

Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathbb{N}^R} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \text{CE} \neq \emptyset.$$

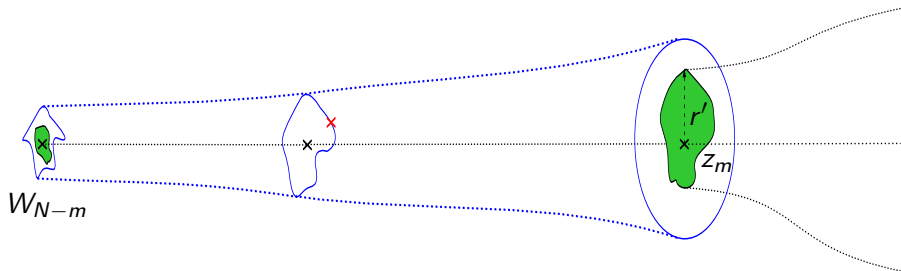


- **type 1** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$

Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathbb{N}\mathbb{R}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \text{CE} \neq \emptyset.$$

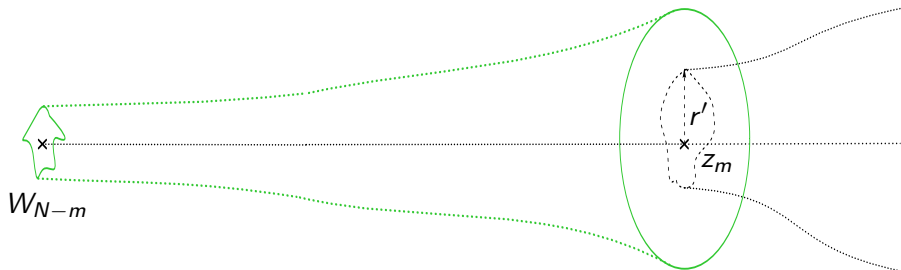


- **type 1** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$
- **type 2** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $\deg_{\overline{W_{N-m}}} f^{N-m} > \mu$

Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathbb{N}^R} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \text{CE} \neq \emptyset.$$

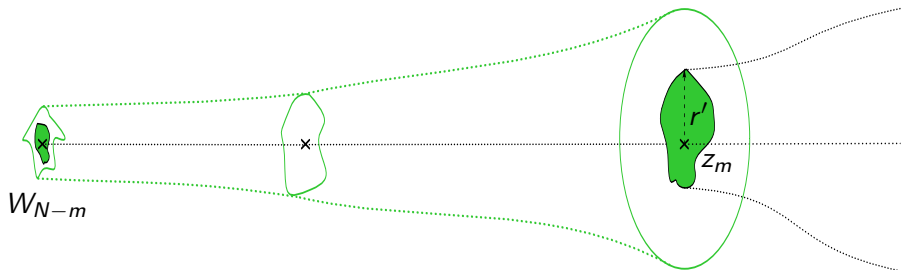


- **type 1** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$
- **type 2** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $\deg_{\overline{W_{N-m}}} f^{N-m} > \mu$

Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathbb{N}^R} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \text{CE} \neq \emptyset.$$



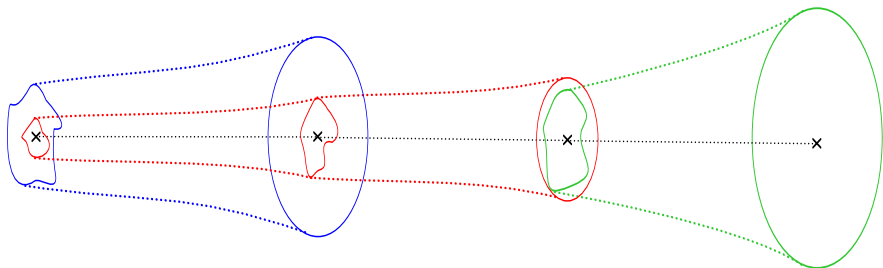
- **type 1** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$
- **type 2** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $\deg_{\overline{W_{N-m}}} f^{N-m} > \mu$
- **type 3** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $r = R$

Construction du télescope

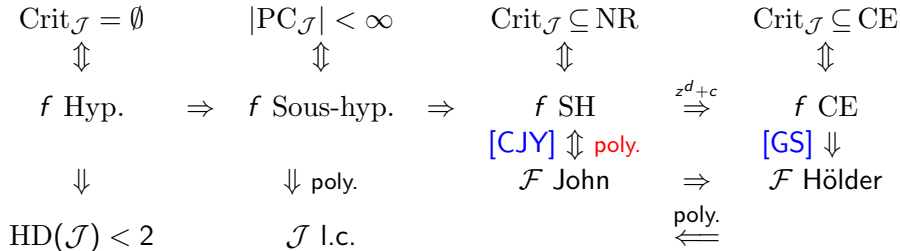
Soit $\mu = \prod_{c \in \text{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \text{CE} \neq \emptyset.$$

- **type 1** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$
- **type 2** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $\deg_{\overline{W_{N-m}}} f^{N-m} > \mu$
- **type 3** - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $r = R$



- Soit f sans cycle parabolique, $\text{Crit}_{\mathcal{J}} = \text{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\text{PC}_{\mathcal{J}} = \text{PC} \cap \mathcal{J}$.



$$\left. \begin{array}{l} \text{SH} \Rightarrow \\ \text{CE} \Rightarrow \end{array} \right\} \text{RCE} \Rightarrow? \text{Crit}_{\mathcal{J}} \Leftrightarrow \text{Hölder} \Leftrightarrow \text{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \text{ExpShrink} \quad \text{[PRS]}$$

Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	Non
rationnelle	Oui	Non (SH)	?

Problèmes ouverts

- f rationnelle SH $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ (uniformément) John
 - on sait déjà que f SH \Leftrightarrow ExpShrink + degré borné
- invariance topologique de la condition RCE
 - le contre-exemple du cas S-multimodal ne peut pas être adapté
- condition en termes d'orbites critiques équivalente à la régularité Hölder
 - on dispose d'une condition plus faible que Hölder
 - cela pourrait donner lieu à l'étude de la condition de régularité Hölder dans l'espace de paramètres en utilisant des outils développés par Aspenberg pour montrer que $\text{Leb}(\text{CE} \setminus \text{Hyp}) > 0$