Nicolae MIHALACHE-CIURDEA

Programme de recherche

Entropie des applications unimodales

Depuis mon arrivée à KTH en septembre 2007, j'ai commencé une collaboration avec Michael Benedicks sur l'entropie dans les familles des applications unimodales. Au début des années '80, Douady, Hubbard, Sullivan, Milnor et Thurston ont montré que l'entropie est monotone dans la famille quadratique

$$x \to a - x^2, \ 0 < a \leq 2.$$

On essaye de généraliser ce résultat pour les familles

$$x \to a - |x|^r,$$

pour tout $r > 1$. Il s'agit d'une conjecture presque aussi ancienne que le résultat sur la famille quadratique. Les simulations numériques que nous avons effectuées semblent confirmer cette conjecture.

Dans le cas quadratique, l'analyticité des applications unimodales est utilisée de façon essentielle. Nous avons choisie une autre voie, suggérée par John Milnor, en utilisant une version de l'algorithme de Thurston pour les applications unimodales.

Dimension des ensembles connexes oscillants

Soit $E \subseteq \mathbb{C}$ un ensemble compact connexe. Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ on dénote par $\beta_E(x, \varepsilon)$ l'oscillation de E en x à échelle ε

$$\beta_E(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \inf_{L \in \mathcal{L}} \sup_{z \in E \cap D(x, 3\varepsilon)} \operatorname{dist}(z, L),$$

où $\mathcal{L}$ est l'ensemble des droites qui intersectent le disque $D(x, \varepsilon)$. S'il existe $\beta > 0$ tel que $\beta_E(x, \varepsilon) > \beta$ pour tous $x \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ tels que $D(x, \frac{\varepsilon}{3}) \cap E \neq \emptyset$, on dit que E est β-uniformément oscillant. Sous cette hypothèse, Bishop et Jones montrent en [2] qu'il existe une constante universelle $C > 0$ telle que

$$\dim_H(E) \geq 1 + C\beta^2.$$

Je me propose de démontrer qu'un tel ensemble est de dimension strictement supérieure à 1. On dit qu'un ensemble compact connexe K est oscillant en moyenne s'il existent $\delta > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in K$ il existe une suite $(n_i)_{i>0} \subseteq \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{\#\{i : n_i \leq k\}}{k} \geq \delta$$

et pour tout $i > 0$

$$\beta_K(x, 2^{-n_i}) > \beta.$$

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un ensemble compact connexe. On dit qu'une courbe γ approche K à distance ε et on dénote par $\gamma \in \Gamma(K, \varepsilon)$ si pour tout $z \in K$, $\operatorname{dist}(z, \gamma) \leq \varepsilon$. Soit l la mesure de Hausdorff en dimension 1. Pour $\varepsilon > 0$, on définit aussi

$$l_\varepsilon(K) = \inf_{\gamma \in \Gamma(K,\varepsilon)} l(\gamma).$$

Des estimations de l_ε pour les ensembles oscillants ont été montrées en [4] et utilisées dans la preuve du résultat de Bishop et Jones. Ils construisent une mesure de probabilité μ avec $\operatorname{supp} \mu \subseteq E$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, $\mu(D(z, r)) \leq Cr^\alpha$, où C est une constante positive. Par le principe de distribution de masse, cela implique $\dim_H(E) \geq \alpha$.

Cette approche ne semble pas disponible dans le cas d'un ensemble oscillant en moyenne. Une première approche serait de démontrer une version plus faible du résultat, en remplaçant la dimension de Hausdorff par la dimension de Minkowski. J'ai observé que la croissance de $l_\varepsilon(K)$ quand $\varepsilon \to 0$ est étroitement liée à la dimension de Minkowski.

Lemme. *Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact et connexe. S'il existe $C, C' > 0$ et $0 < \alpha \leq \beta < 1$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit*

$$C\varepsilon^{-\alpha} \leq l_\varepsilon(K) \leq C'\varepsilon^{-\beta},$$

alors

$$1 + \alpha \leq \dim_M(K) \leq 1 + \beta.$$

Les estimations de l_ε obtenues en [4] sont aussi valables pour les ensembles oscillants en moyenne mais le résultat n'est pas suffisant pour appliquer le lemme précèdent.

La variante faible du résultat peut s'avérer utile dans l'étude des ensembles invariants pour une dynamique rationnelle, comme par exemple l'ensemble de Julia ou la frontière des disques de Siegel. En général, la dimension de Hausdorff et la dimension de Minkowski coïncident pour de tels ensembles.

Dimension de la frontière des disques de Siegel

Soit f une application rationnelle et Δ un disque de Siegel de f. Sur Δ, f est conjuguée à une rotation $z \to \lambda z$ dans le disque unité, où $\lambda = \exp(2\pi i\theta)$, avec $\theta \in [0, 1] \backslash \mathbb{Q}$, le nombre de rotation. Si $(a_i)_{i>0}$ est la suite de coefficients de la représentation de θ en fraction continue, on dit que θ est du type borné si la suite $(a_i)_{i>0}$ est bornée.

Graczyk et Jones ont montré en [5] que si la frontière d'un disque de Siegel Δ est un quasicercle et contient des points critiques, alors le nombre de rotation est du type borné et $\partial\Delta$ est un ensemble uniformément oscillant. Ils obtiennent donc

$$\dim_H(\partial\Delta) > 1.$$

Je me propose de démontrer que pour presque tout nombre de rotation θ, la frontière d'un disque de Siegel $\Delta(\theta)$ qui contient des points critiques est un ensemble oscillant en moyenne. Ceci pourrait donc montrer que la dimension de $\partial\Delta(\theta)$ est strictement supérieure à 1.

On connaît des exemples de disques de Siegel dont la frontière ne contient pas de points critiques et qui est lisse (donc de dimension 1). Aussi, l'ensemble de nombres de rotation ne contient pas tous les points irrationnels du cercle mais son complémentaire est de mesure de Lebesgue nulle.

Graczyk et Jones ont montré que les coefficients $(a_i)_{i>0}$ de la représentation en fraction continue du nombre de rotation θ sont liés à la géométrie de $\partial\Delta(\theta)$ aux différentes échelles. J'espère pouvoir montrer que si les moyennes

$$m(\theta, n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

sont bornées, alors $\partial\Delta(\theta)$ est un ensemble oscillant en moyenne. L'ensemble de nombres de rotation ayant cette propriété est de mesure pleine.

Invariance topologique de la condition *RCE*

Une autre direction de recherche, suggérée par un des résultats de ma thèse, est l'invariance topologique de la condition RCE (les orbites critiques récurrentes sont Collet-Eckmann) dans le cas rationnel (sur la sphère). L'invariance par conjugaison topologique de la condition de Collet-Eckmann, une propriété analytique, a été étudiée auparavant dans le cas des applications de l'intervalle. Les travaux de Nowicki, Przytycki et Sands [11, 10] ont montré que la condition de Collet-Eckmann est invariante par conjugaison topologique dans le cas S-unimodal. Les premiers contre-exemples de l'invariance topologique de la condition de Collet-Eckmann dans le cas S-multimodal ont été semi-hyperbliques (les orbites critique sont non-récurrentes). Świątek a formulé la conjecture de l'invariance topologique de la condition RCE dans le cas S-multimodal [17]. Dans [14] j'ai construit un contre-exemple pour la conjecture de Świątek qui comprend deux polynômes réels avec des points critiques de multiplicités différentes, conjugués sur l'intervalle. Une conjugaison (topologique) sur la sphère préserve la multiplicité des points critiques, par conséquent on ne peut pas construire un contre-exemple du même type.

Une première étape dans l'étude du problème serait de montrer qu'une conjugaison topologique sur $\overline{\mathbb{C}}$ est en effet quasi-conforme si une des deux applications est RCE. Cela est appuyée par le résultat de Przytycki et Rohde [15] qui montre qu'une conjugaison topologique est quasi-conforme si une des deux applications est Collet-Eckmann. Ce résultat a été généralisé par Graczyk et Smirnov [7] pour des applications qui satisfont à une condition de croissance (plus faible) de la dérivée sur les orbites critiques. Aussi, un résultat récent de Kozlovski, Shen et van Strien [9] affirme la rigidité des polynômes réels. Plus précisément, si deux polynômes ont seulement des points critiques réels de degré pair et s'ils sont conjugués sur $\mathbb{R}$ de façon que les multiplicités des points critiques soient préservées alors ils sont quasi-conformément conjugués sur $\mathbb{C}$.

À la recherche numérique des composantes farfelues de l'ensemble de Mandelbrot

La conjecture centrale en itération rationnelle est la densité des dynamiques hyperboliques. Enoncée il y a presque un siècle par Fatou et malgré des efforts impressionnants de nombreux mathématiciens, elle demeure sans preuve.

Pour $c \in \mathbb{C}$, soit f_c le polynôme quadratique $z \to z^2 + c$. L'ensemble de Mandelbrot est

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \forall n \geq 0, |f_c^n(0)| \leq 2\}.$$

Une des variantes de la conjecture de Fatou affirme que chaque composante connexe de l'intérieur de $\mathcal{M}$ contient un paramètre hyperbolique (i.e. f_c a une orbite périodique attractive). Si une telle composante connexe ne contient pas de paramètre hyperbolique, elle est appelée farfelue.

Je me propose de démontrer à l'aide de l'ordinateur que les composantes farfelues ne contiennent pas de disques de rayon 10^{-3}. En remplaçant les nombres par des intervalles dans les calculs, on peut obtenir des preuves numériques des certaines inégalités, les erreurs de calcul étant prises en compte à chaque étape. Il suffit de montrer qu'un point de l'orbite critique est en dehors du disque $\overline{D(0,2)}$ ou que l'image d'un carré Q par une itérée de f_c est strictement contenue dans Q pour démontrer que f_c est hyperbolique. On sait alors que c n'appartient pas à une composante farfelue.

Ce projet produira aussi des images très fidèles de l'ensemble de Mandelbrot. Pour chaque pixel d'une telle image on disposera d'une preuve formelle de l'existence d'un paramètre qui le représente.

Caractérisation dynamique de la régularité Hölder

Inspiré par les résultats de [3], [6] et [16], j'ai étudié la condition RCE dans l'espoir de montrer qu'elle est équivalente à la décroissance exponentielle des composantes $ExpShrink$. J'ai montré qu'elle implique $ExpShrink$ [13] et aussi que la réciproque n'est pas vraie [14]. $ExpShrink$ est équivalente à plusieurs variantes faibles d'hyperbolicité, dont la condition de Collet-Eckmann topologique (TCE), et est invariante par conjugaison topologique [16].

Je me propose d'étudier le problème suivant : trouver une condition en termes d'orbites critiques des applications rationnelles qui soit équivalente à $ExpShrink$. J'ai formulé une telle condition qui est plus générale que $ExpShrink$, décrite par la suite.

Le contre-exemple pour l'implication $ExpShrink \Rightarrow RCE$ que j'ai construit met en évidence la raison précise pour laquelle on perd la croissance de la dérivée, même sur les orbites critiques récurrentes. Lors de passage d'une telle orbite très près d'un (autre) point critique, la perte en dérivée peut être beaucoup plus importante que la perte en diamètre.

Exemple : Soit $f(z) = z^p$, $p \geq 2$, $r > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \ll r$. Alors

$$\frac{\operatorname{diam} f(B(0,r))}{\operatorname{diam} B(0,r)} = r^{p-1} \gg |f'(z)| = p|z|^{p-1}.$$

On peut donc essayer de compter la dérivée *différemment* pour obtenir une croissance exponentielle du type Collet-Eckmann. Pour des raisons de clarté, les définitions suivantes sont données dans le cas polynomial mais on peut facilement les étendre au cas rationnel en utilisant la dérivée sphérique. Soit f un polynôme. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ suffisamment petit on définit

$$D(z,r) = \begin{cases} |f'(z)|, & \text{si } \operatorname{dist}(z, \mathrm{Crit}) \geq r, \\ \mu_c |M_c| r^{\mu_c - 1}, & \text{si } \operatorname{dist}(z,c) = \operatorname{dist}(z, \mathrm{Crit}) < r \text{ et } c \in \mathrm{Crit}, \end{cases}$$

où $f(z) \approx f(c) + M_c(z-c)^{\mu_c}$ sur $B(c,r)$ pour tout $c \in \mathrm{Crit}$.

On définit aussi pour tout $n > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\theta \in (0,1)$

$$d_n(z,r,\theta) = \prod_{i=0}^{n-1} D(f^i(z), r\theta^{n-i}).$$

Cela représente une valeur augmentée de $|(f^n)'(z)|$ en tenant compte des passages de l'orbite de z trop proches des points critiques.

On dit que $z \in \mathbb{C}$ satisfait à la condition $CE_3(z)$ s'il existe $C > 0$, $\lambda > 1$, $r > 0$ et $\theta \in (0,1)$ tel que pour tout $n > 0$

$$d_n(z,r,\theta) > C\lambda^n.$$

On dit que f satisfait à la condition de Collet-Eckmann de troisième espèce CE_3 si on a $CE_3(v)$ pour toute valeur critique $v \in J$ et f n'a pas de cycle parabolique.

Comme résultats encourageants dans cette direction j'ai observé que les polynômes infiniment renormalisables ne satisfont pas CE_3 et que *ExpShrink* implique cette propriété.

Programme de recherche à long terme

Une caractérisation en termes d'orbites critiques pourrait permettre une étude de TCE dans l'espace de paramètres, en développant les méthodes employées par Aspenberg dans sa thèse [1]. Un premier problème qu'on peut se poser dans l'espace de paramètres est si presque toute application rationnelle TCE est Collet-Eckmann.

Une autre direction de recherche est d'étudier si les applications rationnelles Collet-Eckmann (ou RCE ou *ExpShrink*) sont dans l'adhérence de l'ensemble des dynamiques hyperboliques. Un résultat récent de Kozlovski, Shen et van Strien [8] montre que c'est le cas pour les polynômes réels qui ne sont pas infiniment renormalisables.

La dynamique rationnelle peut-être étudiée en relation avec les groupes de Klein, direction de recherche appelée le dictionnaire de Sullivan. La régularité John a été par exemple caractérisée par McMullen en [12]. Il serait intéressant de considérer la régularité Hölder ou même la connectivité locale (uniforme) des ensembles limite, direction qui m'a été suggérée par Peter Jones.

Références

[1] M. Aspenberg. *The Collet-Eckmann condition for rational functions on the Riemann sphere.* Thèse de doctorat, KTH, Suède 2004.

[2] C. Bishop et P. Jones. Wiggly sets and limit sets. *Ark. Mat.* 35 (1997), 201-224.

[3] L. Carleson, P. Jones et J.C. Yoccoz. Julia and John. *Bol. Soc. Bras. Mat.* 25, 1-30 (1994).

[4] P. Jones. Rectifiable sets and the Traveling Salesman Problem. *Invent. Math.* 102 (1990), 1-15.

[5] J. Graczyk et P. Jones. Dimension of the boundary of quasiconformal Siegel disks. *Invent. Math.* 148 (2002), 465-493.

[6] J. Graczyk et S. Smirnov. Collet, Eckmann and Hölder. *Invent. Math.* 133 (1998), 69-96.

[7] J. Graczyk et S. Smirnov. Non-uniform hyperbolicity in complex dynamics. *Invent. Math.*, 2008.

[8] O. Kozlovski, W. Shen et S. van Strien. Density of hyperbolicity in dimension one. *Preprint* juillet 2004. (*Annals of Mathematics* mai 2007.)

[9] O. Kozlovski, W. Shen et S. van Strien. Rigidity for real polynomials. *Preprint* juin 2003. (*Annals of Mathematics* juillet 2007.)

[10] T. Nowicki et F. Przytycki. Topological invariance of the Collet-Eckmann property for S-unimodal maps. *Fund. Math.* 155 (1998).

[11] T. Nowicki et D. Sands. Non-uniform hyperbolicity and universal bounds for S-unimodal maps. *Invent. Math.* 132 (1998), no. 3, 633-680.

[12] C. McMullen. Kleinian groups and John domains. *Topology* 37 (1998), no. 3, 485-496.

[13] N. Mihalache. Collet-Eckmann condition for recurrent critical orbits implies uniform hyperbolicity on periodic orbits. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 27(4) :1267-1286, 2007.

[14] N. Mihalache. Two counterexamples in multimodal dynamics. (arXiv :0810.1474v1).

[15] F. Przytycki et S. Rhode. Rigidity of holomorphic Collet-Eckmann repellers. *Ark. Mat.* 37 (1999), no. 2, 357-371.

[16] F. Przytycki, J. Rivera-Letelier et S. Smirnov. Equivalence and topological invariance of conditions for non-uniform hyperbolicity in the iteration of rational maps. *Invent. Math.* 151 (2003), 29-63.

[17] G. Świątek. Collet-Eckmann condition in one-dimensional dynamics. *Smooth ergodic theory and its applications* (Seattle,WA,1999), 489-498, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 69, *Amer. Math. Soc., Providence*, RI, 2001.