Institutionen för matematik
KTH
Diff. & Trans. II, del 1, 5B1202 för F2 Michael Benedicks

Lösningsförslag till Inlämningsuppgift 4

1.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I den kritiska punkten $\mathbf{x} = \mathbf{x^0}$ är $d\mathbf{x}/\mathbf{dt} = \mathbf{0}$ vilket ger

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ekvationssystem har lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{\mathbf{-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den kritiska punkten har koordinaterna $x_0 = -1$, $y_0 = 0$. Efter en transformation $\mathbf{x} = \mathbf{x^0} + \mathbf{u}$ blir vänsterledet i den ursprungliga ekvationen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x^0}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

och högerledet

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}(\mathbf{x^0} + \mathbf{u}) + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x^0} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{u}.\end{aligned}$$

Efter translationen har ekvationen övergått i

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{u}.$$

Låt

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rötterna till ekvationen $\det(A - rI) = 0$ utgör egenvärdena till A. Determinanten blir

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} -2-r & 1 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix} = (-2-r)^2 - 1^2 = (r+2)^2 - 1 = 0$$

vilket medför att

$$r+2=\pm 1.$$

Egenvärdena $r_1 = -1$ och $r_2 = -3$ är negativa och olika så den kritiska punkten är en asymptotiskt stabil nod.

2. (a)

$$dx/dt = (2+x)(y-x), \qquad dy/dt = y(2+x-x^2)$$

De kritiska punkterna fås som lösningar till ekvationerna

$$(2+x)(y-x) = 0, \qquad y(2+x-x^2) = 0.$$

Kombinationen $2+x=0$ och $y=0$ ger den kritiska punkten $(-2,0)$; $2+x=0$ och $2+x-x^2=0$ saknar lösning; $y-x=0$ och $y=0$ ger den kritiska punkten $(0,0)$; $y-x=0$ och $2+x-x^2=0$ ger de kritiska punkterna $(-1,-1)$ och $(2,2)$.
(b) Använd t.ex. Maple.
(c) $(0,0)$ sadelpunkt, icke stabil;
$(2,2)$ spiralpunkt, asymptotiskt stabil;
$(-1,-1)$ spiralpunkt, asymptotiskt stabil;
$(-2,0)$ sadelpunkt, icke stabil.

3. (a)

$$dx/dt = (1+x)\sin y, \qquad dy/dt = 1-x-\cos y$$

De kritiska punkterna fås som lösningar till ekvationerna

$$(1+x)\sin y = 0, \qquad 1-x-\cos y = 0$$

Kombinationen $1+x=0$ och $1-x-\cos y=0$ saknar lösning; $\sin y = 0$ och $1-x-\cos y=0$ ger de kritiska punkterna

$$(0, 2n\pi)$$

där n är ett heltal och de kritiska punkterna

$$(2, (2n-1)\pi)$$

där n är ett heltal.
(b) Jacobian-matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(1+x)\sin y & \frac{\partial}{\partial y}(1+x)\sin y \\ \frac{\partial}{\partial x}1-x-\cos y & \frac{\partial}{\partial y}1-x-\cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin y & (1+x)\cos y \\ -1 & \sin y \end{pmatrix}$$

så de linjära systemen nära respektive kritisk punkt är

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

vid $(0, 2n\pi)$ och

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

vid $(2, (2n-1)\pi)$.
(c) Matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

har de imaginära egenvärdena $\pm i$ så punkterna $(0, 2n\pi)$ är centrumpunkter. Matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

har egenvärdena $\pm\sqrt{3}$, ett positivt och ett negativt, alltså är punkterna $(2, (2n-1)\pi)$ icke stabila sadelpunkter.

4.

$$x^2y'' + xy' + (x-2)y = 0$$

Punkten $x = 0$ är en reguljär singulär punkt eftersom $x \cdot x/x^2 = 1$ och $x^2(x-2)/x^2 = x-2$ är analytiska i en omgivning av $x = 0$. Indexekvationen

$$r(r-1) + r - 2 = r^2 - 2 = 0$$

har rötterna $r_1 = \sqrt{2}$ och $r_2 = -\sqrt{2}$. Antag nu att vår ekvation har en lösning på formen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

Derivatorna y' och y'' ges då av

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}.$$

Med denna ansats blir

$$x^2y'' + xy' + (x-2)y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - 2]x^{r+n}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{r+n} = a_0[r^2-2]x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n[(r+n)^2-2] + a_{n-1}\}x^{r+n} = 0$$

För r som satisfierar indexekvationen har vi följande rekursiva relation om vi kräver att koefficienten framför x^{r+n} är 0:

$$a_n[(r+n)^2-2] + a_{n-1} = 0$$

eller

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(r+n)^2-2}.$$

För $r = \sqrt{2}$ blir

$$a_1 = -\frac{a_0}{(\sqrt{2}+1)^2-2} = -\frac{a_0}{1+2\sqrt{2}},$$

$$a_2 = \frac{a_0}{2!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})},$$

$$a_3 = -\frac{a_0}{3!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}.$$

Med $a_0 = 1$ och $r = \sqrt{2}$ blir serielösningen $(x > 0)$

$$y_1(x) = x^{\sqrt{2}}\Big[1 - \frac{x}{1+2\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})} + \dots$$
$$+ \frac{(-1)^n}{n!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})\cdots(n+2\sqrt{2})}x^n + \cdots\Big].$$

För $r = -\sqrt{2}$ blir

$$a_1 = -\frac{a_0}{(-\sqrt{2}+1)^2-2} = -\frac{a_0}{1-2\sqrt{2}},$$

$$a_2 = \frac{a_0}{2!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})},$$

$$a_3 = -\frac{a_0}{3!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}.$$

Med $a_0 = 1$ och $r = -\sqrt{2}$ blir serielösningen $(x > 0)$

$$y_2(x) = x^{-\sqrt{2}}\Big[1 - \frac{x}{1-2\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})} + \ldots \\ + \frac{(-1)^n}{n!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})\cdots(n-2\sqrt{2})}x^n + \cdots\Big].$$

5. (a)

$$xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$$

Punkten $x = 0$ är en reguljär singulär punkt eftersom $x \cdot 2x/x = 2x$ och $x^2 6e^x/x = 6xe^x$ är analytiska i en omgivning av $x = 0$.

(b) Ekvationen kan skrivas

$$x^2y'' + 2x^2y' + 6xe^x y = 0,$$

indexekvationen blir

$$r(r-1) + 0 \cdot r + 0 = 0,$$

vilken har rötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = 0$.

(c) Med lärobokens beteckningar är

$$2x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n,$$

dvs $p_1 = 2$, resterande $p_n = 0$ och

$$6xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Maclaurinutvecklingen av e^x ger $q_0 = 0$,

$$q_n = \frac{6}{(n-1)!}, \qquad n \geq 1.$$

Med $r = 1$ resulterar en ansats

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

i den rekursiva relationen (se läroboken)

$$F(1+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(1+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \qquad n \geq 1$$

där $F(r) = r(r-1)$. Med $a_0 = 1$ får vi $2a_1 + 2 + 6 = 0$ vilket ger $a_1 = -4$. Att $3 \cdot 2a_2 + 6 + (-4)(2 \cdot 2 + 6) = 0$ medför att $a_2 = 17/3$ och att $4 \cdot 3a_3 + 3 + (-4) \cdot 6 + (17/3) \cdot (3 \cdot 2 + 6) = 0$ medför att $a_3 = -47/12$. Vi har funnit att

$$y_1(x) = x(1 - 4x + 17x^2/3 - 47x^3/12) + \cdots = x - 4x^2 + 17x^3/3 - 47x^4/12 + \cdots .$$

För att finna $y_2(x)$ som är linjärt oberoende med $y_1(x)$ så ansätter vi

$$y_2(x) = ay_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r_2+n}$$

med $r_2 = 0$ vilket resulterar i den rekursiva relationen

$$a \cdot (2n-1)a_{n-1} + a \cdot 2a_{n-2} + F(n)c_n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k[kp_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \qquad n \geq 1$$

Låt $c_0 = 1$. För $n = 1$ blir $a + 6 = 0$ så konstanten $a = -6$. Vi kan välja $c_1 = 0$. För $n = 2$ blir $(-6) \cdot 3 \cdot (-4) + (-6) \cdot 2 + 2c_2 + 6 = 0$ vilket medför att $c_2 = -33$. Om $n = 3$ så får vi $(-6) \cdot 5 \cdot 17/3 + (-6) \cdot 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 2c_3 + 3 + (-33)(2 \cdot 2 + 6) = 0$ vilket medför att $c_3 = 449/6$. Vi har nu funnit att

$$y_2(x) = -6y_1(x)\ln x + 1 - 33x^2 + 449x^3/6 + \cdots .$$