Institutionen för matematik
KTH
Diff. & Trans. II, del 1, 5B1202 för Michael Benedicks.

Lösningsförslag till inlämningsuppgift 2.

1. Vi ska lösa differentialekvationen

$$y' = \frac{t^2}{y\,(1+t^2)}, \quad y\,(0) = y_0.$$

Om $y_0 = 0$ saknas uppenbarligen lösning. Antag så $y_0 \neq 0$. Problemet är då ekvivalent med följande:

$$\begin{aligned} yy' &= \frac{t^2}{(1+t^2)\,,(0)}, \quad y\,(0) = y_0. \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{3}\ln\left(1+t^3\right) + c, \quad y(0) = y_0. \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{3}\ln\left(1+t^3\right) + \frac{1}{2}y_0^2 \end{aligned}$$

Detta ger att

$$y\,(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\ln\left(1+t^3\right) + y_0^2},$$

med plustecken om $y_0 > 0$ och minustecken om $y_0 < 0$.
I båda fallen ges existensintervallet av olikheten

$$\frac{2}{3}\ln\left(1+t^3\right) + y_0^2 \geq 0,$$

vilket efter enkla omskrivningar ger

$$t \geq -\sqrt[3]{1-\exp\left(-\frac{3y_0^2}{2}\right)}.$$

Existensintervallet ges således av

$$-\sqrt[3]{1-\exp\left(-\frac{3y_0^2}{2}\right)} \leq t < \infty.$$

2.
a). Vi har att

$$\frac{dy}{dt} = k\,(1-y)^2\,,$$

där k ar en konstant strikt större än noll. Klart då att enda jämviktslösningen ges av att y = 1, ty $y' = 0$ om och endast om $y = 1$.
b). Grafen till funktionen $f(y) = k\,(1-y)^2$ visas nedan.

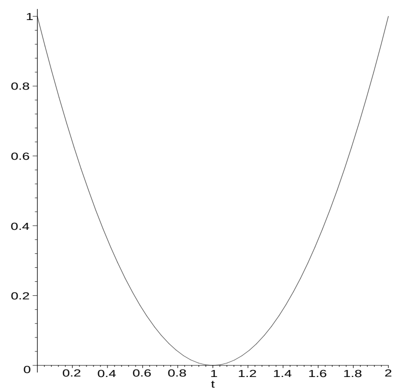

Figure 1: $f\,(y) = k\,(1-y)^2$.

Vi ser (även utan denna) att $y' > 0$ om $y < 1$ eller om $y > 1$. Detta ger att lösningar under jämviktstillståndet närmar sig detta, medan lösningar ovanför detta avlagsnar sig från detta. Således är $y = 1$ en semistabil jämviktslösning.
c). För $y \neq 1$ fås att

$$y' = k\,(1-y)^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{(1-y)^2} = k \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-y}\right) = k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-y} = kt + c \Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{kt+c} = \frac{kt+c-1}{kt+c}$$

Begynnelsevillkoret $y\,(0) = y_0\,(y_0 \neq 1)$ ger nu att $c = \frac{1}{1-y_0}$. Insättning och hyfsning ger så att

$$y(t) = \frac{y_0 + (1-y_0)\,kt}{1 + (1-y_0)\,kt}.$$

Vi ser att om $y_0 > 1$, så gäller att $y(t) \to \infty$ då $t \to \frac{1}{k(1-y_0)}$, medan om $y_0 < 1$ så gäller att $y(t) \to 1$ då $t \to \infty$. Detta bekräftar slutsatserna i del b).

3. Man ser att y = 0 är en lösning. Antag nu y$\neq 0$. Vi kan då multiplicera med y, och ser att ekvationen är ekvivalent med

$$y^2 + \left(2xy - y^2 \exp(y)\right) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Sätt nu $M(x,y) = y^2$ och $N(x,y) = 2xy - y^2 \exp(y)$. Enkel räkning ger att $M_y(x,y) = N_x(x,y) = 2y$. Detta visar att den senare ekvationen är exakt, så det existerar en funktion $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sådan att $\psi_x = M$ och $\psi_y = N$. Integreras den första av dessa så fås att $\psi(x,y) = xy^2 + f(y)$, där $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ återstår att bestämma. Detta göres genom insättning i den senare. Vi får: $2xy + f'(y) = 2xy - y^2 \exp(y)$, varför

$$\begin{aligned} f(y) &= -\int y^2 \exp(y) dy = -y^2 \exp(y) + \int 2y \exp(y) dy = -y^2 \exp(y) + \\ &+ 2y \exp(y) - \int 2 \exp(y) dy = -(y^2 + 2y - 2) \exp(y) + c, \end{aligned}$$

där c är en godtycklig konstant. Låt $\psi(x,y) := xy^2 - (y^2 - 2y + 2) \exp(y)$. Den givna differentialekvationen är således ekvivalent med att $y = 0$ eller att

$$\frac{d}{dx}\psi(x,y) = 0 \Leftrightarrow xy^2 - (y^2 - 2y + 2) \exp(y) = c,$$

där c är en godtycklig konstant.

4. Vi får för $x \neq 0$ efter division med x att

$$y' = \frac{2\frac{y}{x} - 1}{2 - \frac{y}{x}}.$$

Sätt $z = \frac{y}{x}$, så att $y = xz$. Eftersom $y' = z + xz'$, så fås då att differentialekvationen övergår i

$$z + xz' = \frac{2z-1}{2-z} \Leftrightarrow xz' = \frac{2z-1}{2-z} - z = \frac{2z - 1 - 2z + z^2}{2-z} = \frac{z^2-1}{2-z}$$

Detta är ekvivalent med att $z = \pm 1$ eller att

$$\frac{2-z}{(z+1)(z-1)} z' = \frac{1}{x} \qquad (z \neq 2)$$

Genom partialbråksuppdelning så fås att

$$\frac{2-z}{(z+1)(z-1)}z' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$
$$-\frac{3}{2}\ln|z+1| + \frac{1}{2}\ln|z-1| = \ln|x| + c \Leftrightarrow \ln\frac{|z-1|}{|z+1|^3} = \ln|x|^2 + 2c$$

där c är en godtycklig reell konstant. Detta är ekvivalent med

$$\frac{|z-1|}{|z+1|^3} = cx^2, \quad c > 0 \Leftrightarrow \frac{z-1}{(z+1)^3} = cx^2, \quad c \neq 0$$

Insättes nu att $z = \frac{y}{x}$ så ses detta ekvivalent med

$$\frac{y-x}{(y+x)^3} = c, \quad c \neq 0 \Leftrightarrow y - x = c\,(y+x)^3\,, \quad c \neq 0\,(y \neq -x)$$

Sammantaget med $z = \pm 1$ ger detta svaret $y = -x$ eller $y - x = c\,(y+x)^3$, där $c \in \mathbb{R}$ är en konstant.

b). Sätt nu

$$\begin{cases} x &= X - h \\ y &= Y - k \end{cases}$$

Enkel räkning ger då att

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2Y - X + h - 2k + 5}{2X - Y + k - 2h - 4}$$

Genom att välja h, k som lösningen till systemet

$$\begin{cases} h - 2k &= -5 \\ -2h + k &= 4 \end{cases}$$

så återföres problemet på det i a). Lösningen till detta system ges av $h = -1$, $k = 2$. Svaret blir så att $y = -x - 1$, eller $y - x + 3 = c\,(y + x + 1)^3$, där $c \in \mathbb{R}$ är en konstant.

5.

a). Vi ser att

$$y' = t^2 y - t, \quad y\,(0) \Leftrightarrow y(t) = \int_0^t \left(s^2 y\,(s) - s\right) ds$$

Sätt nu

$$\phi_0 = 0$$
$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t \left(s^2\phi_n(s) - s\right) ds$$

Enkel räkning ger att $\phi_0 = 0, \phi_1(t) = -\frac{t^2}{2}, \phi_2(t) = -\frac{t^5}{10} - \frac{t^2}{2}$, etc. Man visar medelst induktion att

$$\phi_n(t) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{t^{3k-1}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3k-1)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Påståendet är sant för $n = 1$, enligt ovan. Antag det sant för n. Då fås att

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t \left(s^2\phi_n(s) - s\right) ds =$$
$$= \int_0^t \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{s^{3k+1}}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3k-1)} - s\right) ds = -\sum_{k=1}^{n} \frac{t^{3k+2}}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3k+2)} - \frac{t^2}{2} =$$
$$= -\sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^{3k-1}}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3k-1)} - \frac{t^2}{2} = -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{3k-1}}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3k-1)},$$

vilket visar påståendet även för $n + 1$.

b). De fyra första iteraten visas nedan.

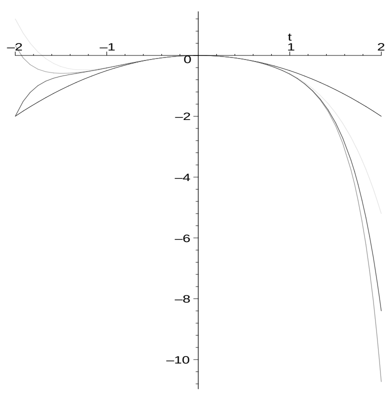

Figure 2: De fyra första iteraten.

Vi ser att sekvensen tycks konvergera åtminstone för små värden på t. Genom att använda t.ex. kvotkriteriet så visar man dock att serien konvergerar punktvis för alla $t \in \mathbb{R}$.