Institutionen för matematik
KTH
Diff. & Trans. II, del 1, 5B1202 för F2 Michael Benedicks

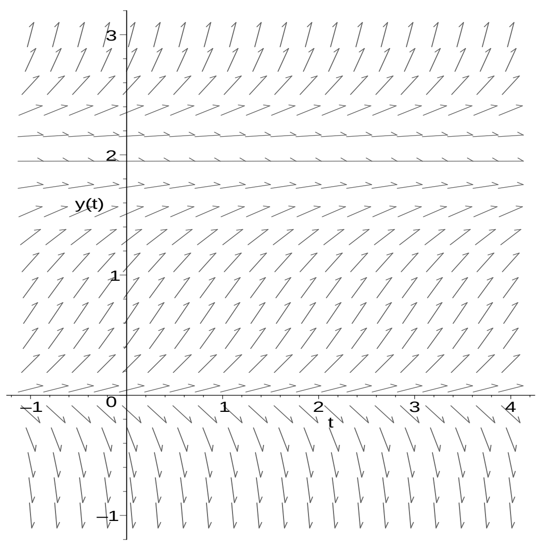
Lösningsförslag till Inlämningsuppgift 1

1. Rita riktningsfältet till differentialekvationen

$$y' = y(y-2)^2.$$

Beskriv lösningarnas beroende av begynnelsevärdet för $t = 0$ och ange lösningarnas beteende då $t \to \infty$.

Lösning.



Notera först att $y(y-2)^2 = 0$ för $y = 0$ och $y = 2$ och att $y(y-2)^2 < 0$ om $y < 0$; $y(y-2)^2 > 0$ om $0 < y < 2$; $y(y-2)^2 > 0$ om $y > 2$. Härav drar vi slutsatsen att $y = 0$ och $y = 2$ är jämviktslösningar; $y \to -\infty$ om begynnelsevärdet för $t = 0$ är negativt; $y \to 2$ om begynnelsevärdet för $t = 0$ ligger mellan 0 och 2; $y \to \infty$ om begynnelsevärdet för $t = 0$ är större än 2. $y = 0$ är en instabil jämviktslösning; $y = 2$ är en semistabil jämviktslösning.

2. Finn lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y' + 2y = te^{-2t}, \qquad y(1) = 0.$$

Lösning. Den integrerande faktorn $\mu(t) = e^{2t}$ så ekvationen kan skrivas

$$\frac{d}{dt}(ye^{2t}) = t$$

och

$$ye^{2t} = \frac{t^2}{2} + c.$$

För att begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ ska vara uppfyllt så måste vi välja $c = -\frac{1}{2}$. Den sökta lösningen till begynnelsevärdesproblemet är

$$y = (t^2 - 1)e^{-2t}/2.$$

3. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' = (2 - e^x)/(3 + 2y), \qquad y(0) = 0$$

och bestäm var lösningen antar sitt maximum.

Lösning. Vi skriver först differentialekvationen på differentialform

$$(3 + 2y)dy = (2 - e^x)dx.$$

Sedan integreras vänsterledet med avseende på y och högerledet med avseende på x och vi erhåller

$$3y + y^2 = 2x - e^x + c.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ kräver att $c = 1$. För att lösa ut y ur den implicit givna funktionen så måste vi lösa andragradsekvationen

$$y^2 + 3y - (2x - e^x + 1) = 0.$$

Lösningarna ges av

$$y = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(3/2)^2 + 2x - e^x + 1}.$$

Vi måste välja plustecken för att begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ska vara uppfyllt. Den sökta lösningen till begynnelsevärdesproblemet är

$$y = -\frac{3}{2} + \sqrt{2x - e^x + 13/4}.$$

Av differentialekvationen $y' = (2 - e^x)/(3 + 2y)$ framgår att derivatan y' är positiv i punkten $x = 0$, $y = 0$, så y växer för små x och nämnaren $3 + 2y$ håller sig borta från 0. Derivatan $y' = 0$ först då $2 - e^x = 0$, alltså då $x = \ln 2$.

I denna punkt $\underline{x = \ln 2}$ antar lösningen sitt maximum eftersom $y' > 0$ om $x < \ln 2$ och $y' < 0$ om $x > \ln 2$.

4. A recent college graduate borrows \$100,000 at an interest rate of 9% to purchase a condomium. Anticipating steady salary increases, the buyer expects to make payments at a monthly rate of $800(1 + t/120)$, where t is the number of months since the loan was made.

a) Assume that this payment schedule can be maintained, when will the loan be fully paid?

Solution. The value $S(t)$ of the remaining part of the loan at time t satisfies the differential equation

$$dS/dt - \frac{9\%}{12}S + 800(1 + t/120) = 0.$$

The general solution to the corresponding homogeneous equation

$$dS/dt = \frac{3}{400}S$$

is given by $S_h(t) = Ce^{3t/400}$. To find a particular solution we let $S = S_p = at + b$, where a and b are constants, hence $dS/dt = a$ and

$$dS/dt - \frac{3}{400}S + 800(1 + t/120) = a - \frac{3}{400}(at + b) + 800(1 + t/120) = 0.$$

Identifying terms we obtain $-3a/400+800/120 = 0$ and $a-3b/400+800 = 0$. These equations have the solutions $a = 8000/9$ and $b = 6080000/27$. The general solution $S = S_h + S_p$ is given by

$$S = Ce^{3t/400} + 8000t/9 + 6080000/27$$

and to make the initial condition $S(0) = 100000$ satisfied we have to choose $C = 100000 - 6080000/27 = -3380000/27$, that is

$$S = 6080000/27 + 8000t/9 - 3380000e^{3t/400}/27.$$

The equation $S(t) = 0$ has the approximate positive solution $t = 135$ (months) which is the answer on the question.

b) Assume the same payment schedule, how large a loan could be paid off in exactly 20 years?

Solution. The loan is denoted by N. With the number 100000 replaced by N in the a-exercise we have

$$S = 6080000/27 + 8000t/9 + (N - 6080000/27)e^{3t/400}.$$

The condition $S = 0$ when $t = 240$ (months) implies

$$6080000/27 + 8000 \cdot 240/9 + (N - 6080000/27)e^{3 \cdot 240/400} = 0$$

and this equation has the approximate solution $N = \$152,700$.

5. Betrakta differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(\cot t)y}{1+y}.$$

Ange området i ty-planet där förutsättningarna för existens och entydighetssatsen för första ordningens differentialekvationer är uppfyllda.

Lösning. Låt $f(t,y) = \frac{(\cot t)y}{1+y}$. Den partiella derivatan ges av $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cot t}{(1+y)^2}$. Funktionerna f och $\partial f/\partial y$ är kontinuerliga om $t \neq n\pi$ för $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ och $y \neq -1$. Speciellt kan man för sådana (t,y) omsluta (t,y) med en rektangel där f och $\partial f/\partial y$ är kontinuerliga. För dessa (t,y) är förutsättningarna för existens och entydighetssatsen för första ordningens differentialekvationer uppfyllda.