Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Lösning till kontrollskrivning, Diff. & Trans. II, del 1, 5B1202 för F2

Tordagen den 15 november, 2001, 8.15-10.00

1. Vi betraktar begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - y' - \sin y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

a) Efter att ha infört de nya variablerna $x_1 = y$ och $x_2 = y'$ får vi systemet

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_2 + \sin(x_1^2) \end{cases}$$

Begynnelsevärdesproblemet övergår i problemet

$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0)\ (= x_1'(0))\ = -1 \end{cases}$$

b) Existens och entydighetssatsen för system av differentialekvationer kan formuleras som följer:

Betrakta allmänt begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

där f tillsammans med matrisen av partiella derivator $f'_x = (\partial f_i/\partial x_j)$ är kontinuerlig i en ett område $\{(t,\mathbf{x}) : t_0 - a < t < t_0 + a, |x_i - x_i^0| < b_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$

Detta problem har en entydig lösning $\mathbf{x} = \varphi(t)$, för $|t - t_0| < h$.

Vi ser att vårt system uppfyller villkoren för existens och entydighet och vi ser att en entydig lösning existerar för $|t| < h$ för något $h > 0$.

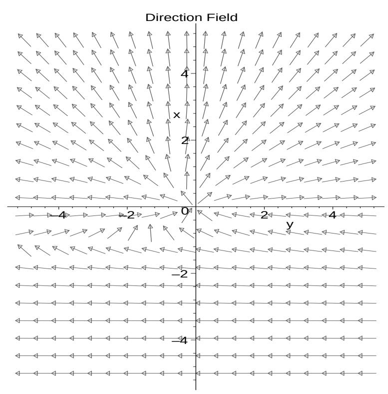
2. *Betrakta differentialekvationen*

$$ty' - y - t^2 e^{-t} = 0.$$

a) *Rita riktningsfält till den givna differentialekvationen.*

Den sk *nollisoklinen*, dvs. kurvan där riktningskoefficienten $y' = 0$ ges av $y = -t^2\, e^{-t}$.

Nedan följer en plot gjord i Maple av riktningsfältet. Observerat att y är den horisontella axeln och $x = t$ är den vertikala axeln.



b) *Utgående från riktningsfältet bestäm hur lösningen beter sig för stora positiva t.*

Från fasporträttet ser man att olika saker kan hända beroende på begynnelsevillkoret.

Svar. Då $t \to \infty$ gäller att $y(t) \to -\infty$, $y(t) \to 0$ och $y(t) \to \infty$ beroende på begynnelsevillkoret.

c) *Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen och använd den för att bestämma hur lösningen beter sig då $t \to \infty$.*

Vi kan skriva om differentialekvationen som

$$y' - \frac{1}{t}y = te^{-t}$$

Denna är linjär av första ordningen, dvs. den kan skrivas på formen $y' + p(t) = q(t)$. En integrerande faktor är $e^{P(t)}$ dár

$$P(t) = \int p(t)\,dt = \int \frac{1}{t} = -\ln|t|.$$

Och vi erhåller därför att $e^{P(t)} = \exp - \ln|t| = \frac{1}{|t|}$. Det går emellertid lika bra att använda den integrerande factorn $\frac{1}{t}$ för alla t eftersom en integrerande factor alltid får multipliceras med en konstant (positiv eller negativ). Vi får då

$$\frac{d}{dt}\left[y\,e^{P(t)}\right] = \frac{1}{t} \cdot t\,e^{-t} = e^{-t}.$$

och

$$\frac{y}{t} = \int e^{-t}\,dt = -e^{-t} + C.$$

Den allmänna lösningen ges av

$$y(t) = t(C - e^{-t}).$$

C bestäms av att $y(t_0) = y_0$. Vi ser att om $C > 0$ gäller att $y(t) \to \infty$, om $C = 0$ gäller att $y(t) \to 0$ och om $C < 0$ gäller att $y(t) \to -\infty$ då $t \to \infty$. $C = 0$ svarar mot att begynnelsepunkten (t_0, y_0) uppfyller ekvationen $y_0 = -t_0 e^{-t_0}$, $t_0 > 0$. Mängden av sådana punkter är en kurva $y = -te^{-t}$ i fjärde kvadranten. (Kurvan finns i andra kvadranten i figuren ovan eftersom axlarna är omkastade.)

3. *Lös med succesiva iterationer (Picards metod) differentialekvationen*

$$y' = ay$$

med begynnelsevillkor $y(0) = 1$.

Vi kan skriva om differentialekvationen till en integralekvation

$$\varphi(t) = y(0) + \int_0^t a\varphi(s)\,ds.$$

Picard's iterationsmetod ger att

$$\varphi_{n+1}(t) = y(0) + \int_0^t a\varphi_n(s)\,ds.$$

där $\varphi_0(t) = y(0) = 1$. Vi får därför att

$$\varphi_1(t) = y(0) + \int_0^t a\varphi_0(t)\,dt = 1 + \int_0^t a \cdot 1\,ds = 1 + at.$$

$$\varphi_2(t) = y(0) + \int_0^t a\varphi_1(t)\,dt = 1 + \int_0^t (1 + as)\,ds = 1 + at + \frac{1}{2}a^2\,t^2.$$

och allmänt via induktion att

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k t^k}{k!}.$$

Vi kan identifiera $\varphi_n(t)$ som den n:te summan i Taylorserien för e^{at}, som konvergerar för alla reella t.