Institutionen för matematik
KTH

LÖSNINGAR till LAPPSKRIVNING NR 1, Diff. II, del 2, för F1, 5B1103 fredagen den 26 januari 2001, kl. 10.15–12.00

Vänster.

1. Sfärens ekvation ger då z löses ut att
$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$
Nära punkten $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ måste vi välja minustecken så $z = f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Normalen fås från
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2y) \end{cases}$$
och $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \frac{2}{3})^{-\frac{1}{2}} = 1$, och $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \frac{2}{3})^{-\frac{1}{2}} = 1$.
Planet som tangerar sfären i (x_0, y_0, z_0) ges av
$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$
dvs $z = -\frac{1}{\sqrt{3}} + (x - \frac{1}{\sqrt{3}}) + (y - \frac{1}{\sqrt{3}}) = x + y - \sqrt{3}$.
Svar. Tangentplanets ekvation är $z = x + y - \sqrt{3}$.

2. Kurvan ges av $\bar{r}(x) = (x, \cosh x) = (x, \frac{e^x + e^{-x}}{2})$, $0 \leq x \leq 1$. Enligt areaformeln gäller
$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 |y(x)| \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sqrt{\frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}} = \frac{2\pi}{4} \int_0^1 (e^x + e^{-x})^2\, dx \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} + 2x + -\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 = \pi(\frac{1}{4}e^2 + 1 - \frac{1}{4}e^{-2}).$$

Svar. Arean är $\pi(\frac{e^2}{4} + 1 - \frac{e^{-2}}{4})$ a.e.

3. Fältstyrkan ges av $E = f(x, y, z)$, där $x = \sin t, y = \cos t, z = t$. Vi får ändringshastigheten

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} f\big(x(t), y(t), z(t), t\big) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \cos t \frac{\partial f}{\partial x} - \sin t \frac{\partial f}{\partial y} + 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Höger.

1. **Svar.** Tangentplanet ges av
$$z = -x + y + \sqrt{3}$$
2. **Svar.** Arean är $\pi\left(\frac{e^2}{4} + 1 - \frac{e^{-2}}{4}\right)$ a.e.
3. **Svar.** $\frac{dE}{dt} = -\sin t \frac{\partial f}{\partial x} + \cos t \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}$