Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

LÖSNINGAR TILL LAPPSKRIVNING 2

5B1307 Differential- och integralkalkyl del 2 för F1, VT 2001
Fredagen den 16 februari 2001

Vänster

1. **1. Kritiska punkter i det inre av området.**
$\nabla f = (2x - 2, 2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (1,0)$, som ej ligger i det inre av området.
2. Singulära punkter. Inga sådana finns.
3. Randpunkter. Inför beteckningar för hörnen: $A = (0,0)$, $B = (0,-2)$ och $C = (2,0)$.
Sidan AB. Funktionen är
$$\varphi(y) = f(0,y) = y^2 \quad , \quad -2 \le y \le 0,$$
som är avtagande på intervallet.
Vi får
$$f(A) = f(0,0) = 0 \quad \text{och} \quad f(B) = f(0,-2) = 4.$$
Sidan AC. Funktionen är
$$\psi(x) = f(x,0) = x^2 - 2x \quad , \quad 0 \le x \le 2.$$
Kritiska punkter ges av $\psi'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ och $\psi(1) = f(1,0) = 1$.
Värdena i ändpunkterna är $f(A) = f(0,0) = 0$ och $f(C) = f(2,0) = 0$.
Sidan BC. Sidan parametriseras som $x = t$, $y = -2 + t$, $0 \le t \le 2$. Vi får
$$\theta(t) = f(t, -2+t) = t^2 + (-2+t)^2 - 2t = 2t^2 - 6t + 4.$$
Kritiska punkter på BC ges av
$$\theta'(t) = 4t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

och

$$\theta\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} - 3 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Kandidater för max och min fås enligt följande

	x	y	f
A	0	0	0
B	0	-2	4
C	2	0	0
AB	$-$	$-$	$-$
BC	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
AC	1	0	-1

Svar. $f_{\max} = 4$ som antas i $(0, -2)$.
$f_{\min} = -1$ som antas i $(1, 0)$.

2. Integralen blir

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_{-1}^{1} dx \int_{-2}^{0} dy \int_{z=0}^{z=1-y^2} xyz\,dz \\
&= \int_{-1}^{1} x\,dx \left(\int_{-2}^{0} y\,dy\right) \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x^2} \\
&= \left(\int_{-1}^{1} x \cdot \frac{\left(1-x^2\right)^2}{2}\,dx\right) \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-2}^{0} \\
&= 0 \cdot \frac{-4}{2} = 0,
\end{aligned}$$

ty $f(x) = x(1-x^2)/2$ är udda.

Svar. Integralen är 0.

3. Vi parametriserar med $x = t^3$, $y = t$, $-1 \leq t \leq 2$ vilket ger
$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 \quad \text{och} \quad \frac{dy}{dt} = 1.$$
Integralen blir
$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{2} y^2 dx + x\,dy \\ &= \int_{-1}^{2} \left(t^2 \cdot 3t^2 + t^3\right) dt \\ &= \left[\frac{3t^5}{5} + \frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \frac{\mathbf{471}}{\mathbf{20}}. \end{aligned}$$

Höger

Svar.

1. $f_{\text{max}} = 4$ antas i $(0, 2)$.
   $f_{\text{min}} = -1$ antas i $(1, 0)$.
2. Integralen är lika med 0.
3. Integralen är $\frac{\mathbf{321}}{\mathbf{20}}$.