1. LÖSNINGAR INLÄMNINGSUPPGIFT 3

1. y_1 och y_2 är två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen (i). Då är $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$ lösningar till (ii). Vi vet att $\mathbf{x^{(1)}}$ och $\mathbf{x^{(2)}}$ är en bas för lösningsrummet till (ii). Vi kan då ansätta att

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} = c_1\mathbf{x^{(1)}} + c_2\mathbf{x^{(2)}} \text{ och } \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} = d_1\mathbf{x^{(1)}} + d_2\mathbf{x^{(2)}}$$

Wronskideterminanten definieras som

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \text{ respektive } W[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}] = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix}$$

Vi kan då uttrycka $W[y_1, y_2]$ som

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1x_1^{(1)} + c_2x_1^{(2)} & d_1x_1^{(1)} + d_2x_1^{(2)} \\ c_1x_2^{(1)} + c_2x_2^{(2)} & d_1x_2^{(1)} + d_2x_2^{(2)} \end{vmatrix}$$

$det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A^T})$ medför att determinanten kan skrivas som

$$\begin{vmatrix} c_1x_1^{(1)} + c_2x_1^{(2)} & c_1x_2^{(1)} + c_2x_2^{(2)} \\ d_1x_1^{(1)} + d_2x_1^{(2)} & d_1x_2^{(1)} + d_2x_2^{(2)} \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \end{pmatrix} \right| =$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} W[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]$$

Då har vi återigen använt att $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A^T})$

$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0$, ty annars vore $y_1 = cy_2$ det vill säga y_1 och y_2 vore linjärt beroende vilket är en motsägelse mot antagandet. Vi har således visat att $W[y_1, y_2] = cW[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]$

2. Vi gör enligt följande
   (a) Antag $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$. Vi får då ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & -2-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket har lösningarna $r_1 = 2$ och $r_2 = -3$. Korresponderande egenvektorer blir då (för r=2) $\xi^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och (för r=-3) $\xi^{(\mathbf{2})} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
Tillhörande losningar blir då

$$\mathbf{x^{(1)}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \text{och } \mathbf{x^{(2)}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Vi får då allmänna lösningen

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

För stora t kommer termen med e^{2t} att dominera och vi får ett exponentiellt beteende.

(b) Riktningsfältet för systemet.

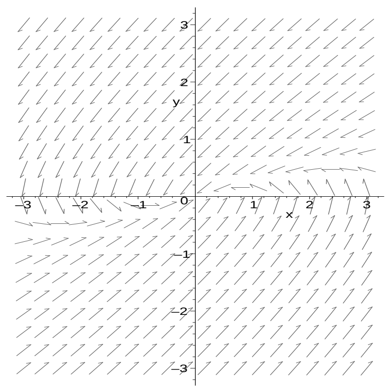

FIGURE 1. Riktningsfält uppgift 2

3. Vi gör enligt följande
   (a) Egenvärdena bestäms genom att beräkna $0 = \begin{vmatrix} -r & -5 \\ 1 & \alpha - r \end{vmatrix} = r^2 - \alpha r + 5$ vilket har lösningen $r = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 20}}{2}$
   (b) Kritiska värden för fasporträttet blir
      (i) $\alpha > 0, \alpha^2 - 20 > 0$
      Vi får positiva och reella egenvärden. Fasporträttet blir en instabil nod.
      (ii) $\alpha > 0, \alpha^2 - 20 < 0$
      Vi får komplexa egenvärden med positiva realdelar. Fasporträttet blir en instabil spiral.
      (iii) $\alpha^2 - 20 = 0$
      Om α är negativt fås en degenererad stail nod och om α är positivt en degenererad instail nod.
      (iv) $\alpha < 0, \alpha^2 - 20 > 0$
      Vi får negativa och reella egenvärden. Fasporträttet blir en stabil nod.
      (v) $\alpha < 0, \alpha^2 - 20 < 0$
      Vi får komplexa egenvärden med negativa realdelar. Fasporträttet blir en stabil spiral
      (vi) $\alpha = 0$
      Egenvärdena är rent imaginära. Fasporträttet blir ett center.

   De punkterna där fasporträttet byter karaktär är alltså
      (i) $\alpha = \sqrt{20}$: Fasporträttet går från att vara en instabil nod till att vara en instabil spiral.
      (ii) $\alpha = 0$ Fasporträttet går från att vara en instabil spriral till en stabil spiral. För $\alpha = 0$ är fasporträttet ett center.
      (iii) $\alpha = -\sqrt{20}$: Fasporträttet går från att vara en stabil spiral till att vara en stabil nod.

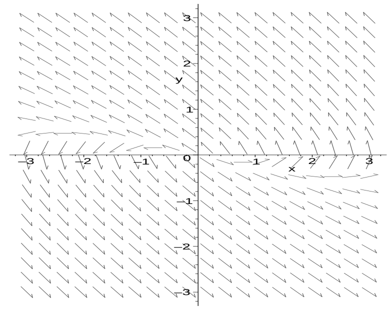

FIGURE 2. fasporträtt med $\alpha = 5$

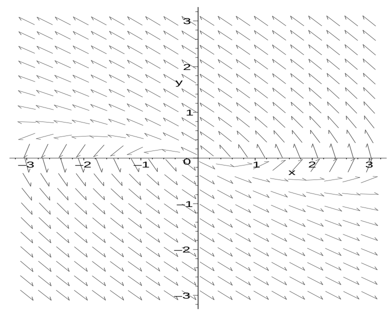

FIGURE 3. fasporträtt med $\alpha = 4$

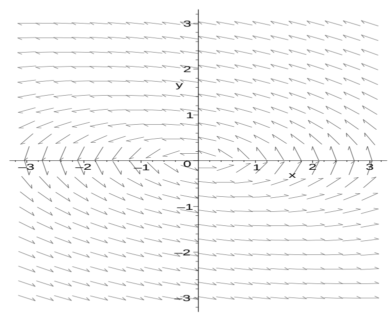

FIGURE 4. fasporträtt med $\alpha = 1$

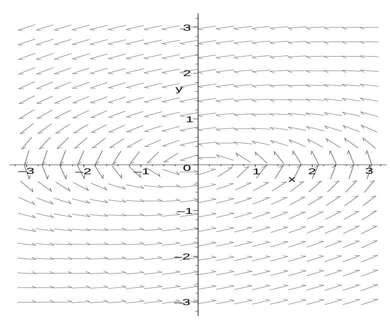

FIGURE 5. fasporträtt med $\alpha = -1$

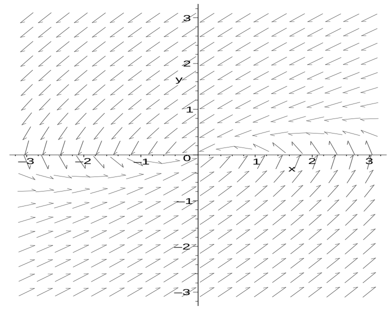

FIGURE 6. fasporträtt med $\alpha = -4$

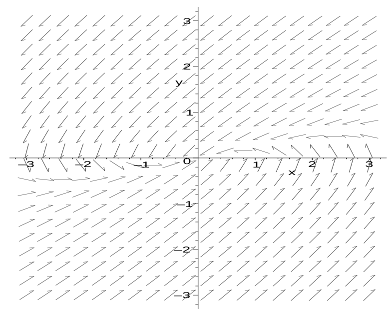

FIGURE 7. fasporträtt med $\alpha = -5$

4. Vi gör enligt foljande
   (a) Om $L = 4R^2C$ får vi foljande ekvation för egenvärdena
$$0 = \begin{vmatrix} -r & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} - r \end{vmatrix} = r^2 + \frac{r}{RC} + \frac{1}{LC}$$
   vilket har lösningen $r = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}$.
   Om $L = 4R^2C$ blir rotuttrycket $= 0$ och $r = -\frac{1}{2RC}$
   (b) $R = 1\Omega$, $C = 1f$ och $L = 1H$ samt $I(0) = 1A$ och $V(0) = 2V$ ger oss att $r = -\frac{1}{2}$ och vi får följande system för egenvektorerna.
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} = 0$$
   vilket ger egenvektorn $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. En lösning till systemet (utan begynnelsevillkor) är $\begin{pmatrix} I(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}$. För att fa fram den fullstandiga lösningen ansätter vi att $\begin{pmatrix} I(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \xi t e^{-\frac{t}{2}} + \eta e^{-\frac{t}{2}}$. Insättning i det ursprungliga systemet ger att
$$-\frac{t}{2}\xi t e^{-\frac{t}{2}} + (\xi - \frac{t}{2}\eta)e^{-\frac{t}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} (\xi t e^{-\frac{t}{2}} + \eta e^{-\frac{t}{2}})$$

Identifiering av koefficienter för $te^{-\frac{t}{2}}$ och $e^{-\frac{t}{2}}$ ger oss följande två ekvationssystem att lösa.

$$(\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\mathbf{I})\xi = 0 \text{ och } (\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\mathbf{I})\eta = \xi$$

Den första ekvationens har en lösning då ξ är en egenvektor till $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ som korresponderar till egenvärdet $-\frac{1}{2}$ dvs $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Det andra systemet kan tros sakna lösning men för någon vektor ξ är detta möjligt. Ekvationen löses genom att undersöka matrisen

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -2 \end{array}\right)$$

Vi får då (exempelvis) lösningen $\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Systemets fullständiga lösning blir då

$$\begin{pmatrix} I(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} te^{-\frac{t}{2}} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}\right]$$

Insättning av begynnelsevillkor ger oss att $c_1 = -1$ och $c_2 = 1$. Vi far da lösningen

$$\begin{pmatrix} I(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} te^{-\frac{t}{2}} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}$$

vilket kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} I(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} te^{-\frac{t}{2}}$$

5. Beteckna systemet med

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{t}) \text{ där } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{g}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}$$

Vi börjar lösa den homogena ekvationen. Vi far fram egenvärdena -3 och 2 vilka har egenvektorerna $\xi_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ respektive $\xi_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi far då den allmänna lösningen

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

till det homogena systemet. För att losa det inhomogena systemet ansätter vi att $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, där $\mathbf{T}$ är en matris med egenvektorerna $\xi_{\mathbf{1}}$ och $\xi_{\mathbf{2}}$ som columner dvs $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Vi substituerar för $\mathbf{x}$ i ursprungliga ekvationen och erhåller

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{t})$$

Genom att multiplicera med $\mathbf{T}^{-1}$ erhåller vi ekvationen

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{t})$$

$\mathbf{T^{-1}T} = \mathbf{I}$ och $\mathbf{T^{-1}AT}$ är en diagonalmatris där diagonalelementen är egenvärdena av $\mathbf{A}$ arrangerade i samma ordning som egenvektorerna. $\mathbf{T^{-1}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
Vi får ett system av okopplade första ordningens ordinära differentialekvationer enligt

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}$$

dvs vi far ekvationerna

$$y_1' + 3y_1 = \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}e^{t}$$

$$y_2' - 2y_2 = \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{2}{5}e^{t}$$

Dessa löses enklast med integrerande faktor (multiplicera första ekvationen med e^{3t} och den andra med e^{-2t}, integrera bägge leden och du får lösningarna

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}e^{t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + k_1 e^{-3t} \\ -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}e^{t} + k_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Genom att multiplicera med $\mathbf{T}$ får vi

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$