**5B1103, Differential och integralkalkyl för F1, Vt 2001.**
**Inlämningsuppgift 1. Lämnas in den 6 februari 2001.**

1. Beräkna krökningsradien i punkten i $(x, y)$ på ellipsen $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

2. $f$ är en deriverbar funktion av en variabel. Beräkna

$$\left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right)^2$$

då $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. $u$ är en differentierbar funktion av $x$, $y$ och $z$. Genom

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

införs nya variabler $r$, $\theta$, $\varphi$ (sk. sfäriska koordinater). Hur transformeras därvid uttrycket

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}?$$

Ledning: Jämför hur motsvarande problem behandlas i två variabler i Adams bok, sid. 729.

4. Undersök vilka av följande funktioner har ett gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$

$$\text{a)}\ \frac{x^2 + y^2}{2x^2 + y^2} \quad \text{b)}\ \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{c)}\ \frac{x^3}{x^2 - y^2} \quad \text{d)}\ \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

5. Ange ett polynom i $(x - 1)$ och $y$ av grad 2 som approximerar funktionen $f(x, y) = \log(2x^2 + y^2 - y)$ i en omgivning till $(1, 0)$ med ett fel $r(x, y)$ sådant att $[r(x, y)/((x - 1)^2 + y^2)] \to 0$ då $(x, y) \to (1, 0)$.

6. Betrakta de båda nivåkurvorna $x^4+y^4 = u$ och $x^4+y^4 = u+h$, till funktionen $f(x, y) = x^4 + y^4$, $x > 0$, $y > 0$. Normalen till den förstnämnda kurvan i punkten $P = (x_0, y_0)$ skär den andra kurvan i $Q$. Låt $\mathbf{v}$ vara vektorn $\overrightarrow{PQ}$. Visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{|\mathbf{v}|} = |\mathrm{grad}\, f(P)|.$$

(Formeln gäller i själva verket för en allmän funktion $f$, som uppfyller lämpliga villkor.)

7. Antag att funktionen $F(x, y, z)$ har kontinuerliga partiella derivator av ordning $\leq 2$.

   a) Ge ett tillräckligt villkor för att uttrycket $F(x, y, z) = 0$ skall definiera $z$ som funktion av $x$ och $y$.

   b) Beräkna $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial x \partial y$ och $\partial^2 z/\partial x^2$ uttryckt i partialderivatorna för $F$.