Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

5B1107 Differential- och integralkalkyl för F1, VT 2001

LÖSNINGSFÖRSLAG till INLÄMNINGSUPPGIFT 1,

1. Ellipsens ekvation på parameterform är
$$\bar{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, 0).$$
Vi får
$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}}(t) &= (-a\sin t, b\cos t, 0)\\ \ddot{\bar{r}}(t) &= (-a\cos t, -b\sin t, 0).\end{aligned}$$
Krökningen ges av
$$k(t) = \frac{\left|\dot{\bar{r}}(t) \times \ddot{\bar{r}}(t)\right|}{\left|\dot{\bar{r}}(t)\right|^3},$$
där
$$\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}(t) = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ -a\sin t & b\cos t & 0 \\ -a\cos t & -b\sin t & 0 \end{vmatrix} = ab\bar{e}_z$$
och vi får
$$k(t) = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos t\right)^{3/2}},$$
d.v.s. krökningsradien $R(t)$ ges av
$$\begin{aligned}R(t) &= \frac{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}{ab}\\ &= \frac{\left(\frac{a^2}{b^2}\,y^2 + \frac{b^2}{a^2}\,x^2\right)^{3/2}}{ab}\\ &= \frac{\left(b^4x^2 + a^4y^2\right)^{3/2}}{a^4b^4}.\end{aligned}$$
Svar. Krökningsradien blir $R = \frac{\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}}{a^4b^4}$.

2. Låt $u = f(r)$. Vi får av kedjeregeln

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f'(r)\,\frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = f'(r)\,\frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = f'(r)\,\frac{\partial r}{\partial z} \end{cases}$$

där $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}2x$ och analoga uttryck får för $\frac{\partial r}{\partial y}$ och $\frac{\partial r}{\partial z}$.

Det sökta uttrycket blir därför

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial x} f(r)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(r)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} f(r)\right)^2 \\ &= f'(r)^2\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-1}\big(x^2+y^2+z^2\big) \\ &= f'(r)^2. \end{aligned}$$

Svar. Uttrycket blir $f'(r)^2$.

4 a) Låt $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2x^2+y^2}$. Vi får för $x \neq 0$ och $y = 0$

$$f(x,0) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad x \to 0$$

och för $y \neq 0$

$$f(0,y) = \frac{y^2}{y^2} = 1 \to 1 \quad \text{då} \quad y \to 0,$$

vilket innebär att gränsvärdet *inte existerar.*

b) Låt $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Då $x = 0$ och $y \neq 0$ fås

$$f(0,y) = 0 \to 0 \quad \text{då} \quad y \to 0$$

och då $x \neq 0$ och $y = 0$ fås

$$f(x,0) = \frac{1}{x} \to \infty \quad \text{då} \quad x \to +0$$

så *gränsvärdet existerar inte.*

c) Låt $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2-y^2}$. Då $x = 0$ och $y \neq 0$ fås

$$f(0,y) = 0 \to 0 \quad \text{då} \quad y \to 0.$$

Välj sedan att betrakta kurvan $x = t$, $y = t\sqrt{1+t}$, $t > 0$. Detta ger

$$f\Big(t, t\sqrt{1+t}\Big) = \frac{t^3}{t^2 - \big(t^2 + t^3\big)} = -1 \to -1 \text{ då } t \to 0+$$

så *gränsvärdet existerar inte.*

d)

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

På linjen $y = -x$ fås

$$f(x,-x) = 0 \to 0 \text{ då } x \to 0$$

medan då $y = 0$ fås

$$f(x,0) = \frac{x}{x^2} \to \infty \text{ då } x \to +0.$$

så *gränsvärdet existerar inte.*

OBS! Funktionen är i detta fall ej definierad i en punkterad omgivning till $(0,0)$ (d.v.s. i $\{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < \varepsilon\}$). Teoretiskt skulle ändå gränsvärdet kunna existera, men gör det inte i detta fall.

5. Sätt $x = 1 + h$ och $y = k$. Vi får

$$
\begin{aligned}
f(1+h,k) &= \log\left[2(1+h)^2 + k^2 - k\right] \\
&= \ln\left(2 + 4h + 2h^2 + k^2 - k\right) \\
&= \ln 2 + \ln\left(1 + 2h - \frac{k}{2} + h^2 + \frac{1}{2}\,k^2\right) \\
&= \left[\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)\right] \\
&= \ln 2 + \left(2h - \frac{k}{2} + h^2 + \frac{1}{2}\,k^2\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(2h - \frac{k}{2} + h^2 + \frac{1}{2}\,k^2\right)^2 + \mathcal{O}\Big(\big(\sqrt{h^2+k^2}\big)^3\Big) \\
&= \ln 2 + 2h - \frac{k}{2} + h^2 + \frac{1}{2}\,k^2 - 2h^2 + hk \\
&\quad - \frac{k^2}{8} \quad + \mathcal{O}\Big(\big(\sqrt{h^2+k^2}\big)^3\Big) \\
&= \ln 2 + 2h - \frac{k}{2} - h^2 + hk + \frac{3k^2}{8} + \mathcal{O}\Big(\big(\sqrt{h^2+k^2}\big)^3\Big)
\end{aligned}
$$

Det approximerande taylorpolynomet är

$$p(x,y) = \ln 2 + (x-1) - \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\,(x-1)^2 + \frac{1}{2}\,(x-y)y + \frac{3}{8}\,y^2$$

och feltermen $r(x,y)$ uppfyller

$$\big|r(x,y)\big| \leq C\Big(\big((x-1)^2 + y^2\big)^{3/2}\Big)$$

så

$$\big|r(x,y)\big| / \big[(x-1)^2 + y^2\big]^2 \to 0,$$

då $(x,y) \to (1,0)$.

6. **Metod 1.**

Normalens riktningsvektor är för $u(x,y) = x^4 + y^4$ given av $\bar{n} = (4x_0^3, 4y_0^3)$ som är parallell med (x_0^3, y_0^3).

Normalens ekvation på parameterform blir

$$\begin{cases} x = x_0 + t x_0^3 \\ y = y_0 + t y_0^3. \end{cases}$$

Skärningspunkten med $u(x,y) = x_0^4 + y_0^4 + h$ ger en ekvation för t

$$\big(x_0 + t x_0^3\big)^4 + \big(y_0 + t x_0^3\big)^4 = x_0^4 + y_0^4 + h.$$

Vi får

$$x_0^4 + 4tx_0^6 + y_0^4 + 4tx_0^6 + \mathcal{O}\big(t^2\big) = x_0^4 + y_0^4 + h$$

eller ekvivalent

$$t + \mathcal{O}\big(t^2\big) = \frac{h}{4\big(x_0^6 + y_0^6\big)}$$

Vi får också en invers funktion $t = \varphi(h)$ som uppfyller

$$\varphi(h) = \frac{h}{4\big(x_0^6 + y_0^6\big)} + \mathcal{O}(h^2),$$

och

$$\varphi'(0) = \frac{dt}{dh}(0) = \frac{1}{4\big(x_0^6 + y_0^6\big)}$$

så

$$\vec{P_0P} = t\big(x_0^3, y_0^3\big) = h\,\frac{\big(x_0^3, y_0^3\big)}{4\big(x_0^3 + y_0^3\big)} + \mathcal{O}(h^2)$$

och

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{|\overrightarrow{P_0P}|} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{|\overrightarrow{P_0P}|}}{|h|} = 4\frac{x_0^6 + y_0^6}{\sqrt{x_0^6 + y_0^6}} \\ &= 4\sqrt{x_0^6 + y_0^6} = \big|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\big|\end{aligned}$$

Metod 2.

Antag att f är differentierbar och att $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Låt $\hat{n}$ vara enhetsnormalen, d.v.s. $\hat{n} = \nabla f(x_0, y_0)/|\nabla f(x_0, y_0)|$. Punkten Q är då $(x_0, y_0) + t\hat{n}$ och ,

$$f(P) - f(Q) = f((x_0, y_0) + t\hat{n}) - f(x_0, y_0) = h.$$

Vidare är $|\overrightarrow{PQ}| = |t|$.

Enligt definitionen av riktningsderivata är

$$\begin{aligned}D_{\hat{n}} f(P) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big((x_0, y_0) + t\hat{n}\big) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= (\nabla f(P)) \cdot \hat{n} = \big|\nabla f(P)\big|.\end{aligned}$$

Detta ger nu, eftersom $h \to 0 \Rightarrow t \Rightarrow 0$ [1]

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{|\overrightarrow{PQ}|} = \lim_{t\to 0} \left| \frac{f\big((x_0, y_0) + t\hat{n}\big) - f(x_0, y_0)}{t} \right|$$
$$= \big|\nabla f(P)\big|,$$

vilket är det sökta resultatet.

7. Om $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ gäller enligt implicita funktionssatsen att i en omgivning till (x_0, y_0, z_0) ligger alla punkter (x, y, x) som uppfyller $F(x, y, z)$ på en funktionsyta $z = g(x, y)$.

Derivering av $F(x, y, z) = 0$ ger

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, y, g(x, y)\big)}{\frac{\partial F}{\partial z}\big(x, y, g(x, y)\big)}$$
$$= -\frac{f'_x\big(x, y, g(x, y)\big)}{f'_z\big(x, y, g(x, y)\big)}$$
$$\frac{\partial^2_g}{\partial x^2} = -\frac{f'_z\Big(f''_{xx} + f''_{xz}\frac{\partial g}{\partial x}\Big) - f'_x\Big(f''_{zx} + f''_{zz}\frac{\partial g}{\partial x}\Big)}{\big(f'_z\big)^2}$$
$$= \frac{-f''_{xx}\big(f'_z\big)^2 + f''_{xz}f'_xf'_z + f'_xf'_zf'_{zx} - f''_{zz}\big(f'_x\big)^2}{\big(f'_z\big)^3}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x} = -\frac{f'_z\Big(f''_{xy} + f''_{xz}\frac{\partial g}{\partial y}\Big) - f'_x\Big(f''_{zy} + f''_{zz}\frac{\partial g}{\partial y}\Big)}{\big(f'_z\big)^2}$$
$$= \frac{-f''_{xy}\big(f'_z\big)^2 + f''_{xz}f'_yf'_z + f''_{zy}f'_xf'_z - f''_{zz}f'_xf'_y}{\big(f'_z\big)^3}$$

På samma sätt fås

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{-f''_{yy}\big(f'_z\big)^2 + 2f'_yf'_zf''_{yz} - f''_{zz}\cdot\big(f'_y\big)^2}{\big(f'_z\big)^3}.$$

[1] h är en kontinuerlig inverterbar funktion av t med kont invers, jfr Metod 1.