Existens och entydighet för ordinära differentialekvationer

Michael Björklund, $\mathfrak{F}$-00
f00-mib@f.kth.se

Grundläggande begrepp

Definition 1 *En metrik på en mängd M är en avbildning $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ som uppfyller*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \qquad \forall x,y,z \in M \end{aligned}$$

Obs 1 *En metrik ger en topologi på M genom*

$$B(p,r) = \{\, x \in M \,:\, d(x,p) < r \}$$

Definition 2 *Ett metriskt rum är ett rum med en metrik definerad.*

Övning 1 *Visa att $\mathbb{R}^n$ med $d(x,y) = |x-y|$ bildar ett metriskt rum.*

Definition 3 *En följd $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ kallas Cauchy om $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, n, m > N$ gäller att $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.*

Övning 2 *Visa att Cauchyföljder konvergerar i $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{C}^n$.*

Definition 4 *Ett komplett rum är ett rum X i vilket varje cauchyföljd konvergerar, d.v.s. om $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ är cauchy så existerar ett $x \in X$ sådant att $d(x, x_n) \rightarrow 0\ , n \rightarrow \infty$.*

Definition 5 *En funktion $f : X \rightarrow X$ kallas en strikt kontraktion (på X) om $\exists\, c < 1\,:\, d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x,y)\ \forall x, y \in X$.*

Definition 6 *En funktion $f : X \rightarrow Y$ sägs uppfylla Lipschitz villkor, om $\exists\, A > 0\ \forall\, x, y \in X$ gäller att $d(f(x), f(y)) \leq A\, d(x,y)$.*

Övning 3 *Visa att funktioner som uppfyller Lipschitz villkor är kontinuerliga.*

Nödvändig teori

Vi kommer i vårt bevis att behöva använda följande kraftfulla resultat av Banach:

Sats 1 (Banachs fixpunktsats) *Låt X vara ett komplett metriskt rum och f en strikt kontraktiv avbildning. Då har f en unik fixpunkt.*

Bevis.
Låt oss först visa uniciteten:
Antag att p och q är två distinkta fixpunkter till f. Inses: $d(f(p), f(q)) = d(p, q) \leq c\, d(p, q)$, men $c < 1$ varför vi får en motsägelse. Fixpunkten måste vara unik.

Existensen:
Välj godtyckligt $x_0 \in X$ och definera rekursionsrelationen

$$x_{n+1} = f(x_n), \;\; n \in \mathbb{N}$$

Observera att $x_n \in X, \;\; \forall\, n$.
Vill visa att $x_n \to x, \;\; n \to \infty$, d.v.s. att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot ett element $x \in X$, men eftersom X är komplett räcker det att visa att $\{x_k\}_{n=1}^{\infty}$ är cauchy. Betrakta följande samband:

$$\begin{aligned}
d(x_2, x_1) &= d(f(x_1), f(x_0)) \leq c\, d(x_1, x_0) \\
d(x_3, x_2) &= d(f(x_2), f(x_1)) \leq c\, d(x_2, x_1) \leq c^2\, d(x_1, x_0) \\
&\vdots \\
d(x_{n+1}, x_n) &\leq c^n\, d(x1, x0)
\end{aligned}$$

Studera nu $d(x_{n+m}, x_n)$:

$$\begin{aligned}
d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq (c^{n+m-1} + c^{n+m-2} + \ldots + c^n)\, d(x_1, x_0) \\
&= c^n(1 + c + \ldots + c^{m-1})\, d(x_1, x_0) \leq \frac{c^n}{1-c}\, d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

Givet $c < 1$ och n stort kan således $d(x_{n+m}, x_n)$ göras godtyckligt liten, och därmed är $\{x_k\}_{n=1}^{\infty}$ cauchy.
V.S.V.

Anm. *Märk att beviset ovan är mycket allmänt, och gäller för såväl $\mathbb{R}^n$ som $\mathbb{C}^n$, vilka är de rum som i första hand intresserar oss när vi behandlar differentialekvationer.*

Standardproblem för differentialekvationer

Problemställning

Låt $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vara kontinuerlig. Existerar kurva $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t)$ sådan att

$$\dot{x} = f(x(t), t), \quad x(t_0) = p \quad ? \quad (*)$$

Observera att man vi utan att förlora i generalitet kan anta begynnelsetiden $t_0 = 0$.

Notation

Sätt $\mathcal{I} = [-1, 1]$ och låt $\mathcal{K}(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$ beteckna mängden av alla kontinuerliga funktioner $x(t) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$. Normera $X = \mathcal{K}(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n)$ enligt $\|x(t)\| = \max |x(t)|$, där $t \in \mathcal{I}$. Bilda slutligen $B(p, \varepsilon) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \;:\; |x - p| < \varepsilon \,\}$.

Övning 4 *Visa att X med given norm blir ett komplett metriskt rum.*

Existens- och entydighet för ordinära differentialekvationer

Låt $f : B(p, \varepsilon) \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ uppfylla Lipschitz villkor. Då existerar $a > 0$ och en entydig kontinuerligt deriverbar funktion $x(t) : \mathcal{I} \supset [-a, a] \to \mathbb{R}^n$ som uppfyller

$$\dot{x} = f(x(t), t), \quad x(0) = p$$

Obs 2 $f \in \mathcal{C}^k \Rightarrow x(t) \in \mathcal{C}^{k+1}$

Obs 3 *Om f endast är kontinuerlig kan man bara garantera existens av lösning, men inte entydighet. Exempel:*

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0.$$

vilken har lösningarna $x = t^2$ och $x = 0$.

Övning 5 *Visa att om $f'_x(x(t), t)$ ovan är kontinuerlig på en kompakt mängd så uppfyller $f(x(t), t)$ Lipschitz villkor.*

Metod

Fixera $t \in \mathbb{R}$ så att

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(x(t), t) \in \mathbb{R}^n$$

Definera $T : X \to X$ enligt

$$(T(x))(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s), s)\, ds = p + \int_0^t f(x(s), s)\, ds$$

Om det existerar en unik fixpunkt $x(t) = (T(x))(t)$ gäller

$$x(t) = p + \int_0^t f(x(s), s)\, ds \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = f(x(t), t), \quad x(0) = p$$

vilket är precis det vi vill ha. *Ergo:* Om vi kan bevisa existensen av en (unik) fixpunkt $x(t) = (T(x))(t)$, garanteras även existensen av en (unik) lösning till $(*)$ ovan.

Övning 6 *Visa att $x(t)$ är kontinuerligt deriverbar, d.v.s. att sista operationen ovan är tillåten.*
Ledning: Använd integralkalkylens fundamentalsats.

Anm. *Glöm ej att t är fixt*

Eftersom f är lipschitz existerar $A < \infty$ så att $|f(x(t), t) - f(y(t), t)| \leq A\,|x(t) - y(t)|$. Låt $t \in [-a, a]$, där vi senare kommer att sätta villkor på a.

Låt oss först visa att $T : X \to X$ är en strikt kontraktiv avbildning, där X är ett komplett metriskt rum *(se övning 4)*. Enligt Banachs fixpunktsats har då T en unik fixpunkt $x(t)$.

$$\begin{aligned}
|T(x)(t) - T(y)(t)| &= |\int_0^t f(x(s), s)ds - \int_0^t f(y(s), s)ds| \\
&= |\int_0^t f(x(s), s) - f(y(s), s)ds| \leq \int_0^t |f(x(s), s) - f(y(s), s)||ds| \\
&\leq A \int_0^t |x(s) - y(s)||ds| \leq A\,\|x - y\| \int_0^t |ds| \\
&\leq A\,\|x - y\||t| < \frac{1}{2}\|x - y\| \{ \text{ vill åstadkomma genom val av } a \}
\end{aligned}$$

Det sista steget säkrar kontraktionsegenskapen, och går att åstadkomma om man väljer $Aa < \frac{1}{2}$, exempelvis genom att sätta $a = \frac{1}{3A}$.
Följaktligen

$$|T(x)(t) - T(y)(t)| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$$

och avbildningen är strikt kontraktiv.

Resultat

Det återstår nu att tolka våra resultat. Eftersom T har en unik fixpunkt $x(t)$ för varje fixt $t \in [-a, a]$ har vi konstaterat att även begynnelsevärdesproblemet $(*)$ har en unik lösning $x(t)$ i detta tidsintervall. Från övning 5 fås även att denna lösning $x(t)$ kontinuerligt deriverbar. Därmed kan man anse att satsen är bevisad.

Märk: Man bör dock ha klart för sig att A i lipschitzvillkoret kan bli mycket stort för vissa typer av funktioner, varför lösningsintervallet i dessa fall kan bli mycket litet.