Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks
Karim Daho

Tentamen i differential- och integralkalkyl II, 5B1103/Del 2 för T1, 5B1107 för F1.

Tisdagen den 24 april 2001 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Med bonuspoäng (max. 4) blir totalsumman 39 poäng.
Betygsgränser: 16p för betyget 3, 24p för betyget 4, 31p för betyget 5.
OBS! *Lösningar skall förklaras, beteckningar (som inte är standard) skall införas och alla svar noggrant motiveras.*

1. Finn ekvationen för tangentplanet till

$$xyz + x^2 - 2y^2 + z^3 = 14$$

i punkten $(5, -2, 3)$. (3p)

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x+y)^2}$$

där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(1,1)$. (3p)

3. Låt F vara en deriverbar funktion på $\mathbb{R}^2$ och låt k vara en godtycklig konstant. Visa att

$$u(x,y,z) = x^k F\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

löser differentialekvationen (3p)

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} + z\,\frac{\partial u}{\partial z} = ku.$$

4. Beräkna maximum och minimum av funktionen

$$f(x,y,z) = x + y + z$$

under bivillkoret $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$. (3p)

Vgv

5. Beräkna
$$\int_\gamma \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy$$
om γ är övre halvan av ellipsen $\frac{1}{4}x^2+y^2=1$ från punkten $(2,0)$ till punkten $(-2,0)$. (3p)

6. Beräkna integralen
$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$$
(3p)

7. Taylorutveckla funktionen $f(x,y) = x\,e^{x^3y^3}$ kring $(1,1)$ till och med termerna av andra grad i $(x-1)$ och $(y-1)$. Restermen behöver ej anges. (3p)

8. Visa att
$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \sqrt{3}\pi a^2,$$
där C är den slutna kurvan som ges av skärningen mellan ytorna $x^2+y^2+z^2=a^2$ och $x+y+z=0$ med lämpligt val av orientering. Denna orientering skall anges. (3p)

9. En kropp ges av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ och $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$. Kroppen har den variabla densiteten $\rho(x,y,z) = x^2$. Beräkna kroppens massa. (3p)

10. Låt $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$.

a) Har f några lokala extrempunkter? Ange dem i så fall. (2p)

b) Har f något största och minsta värde? Ange i så fall dessa. Motivering krävs. (2p)

11. a) Låt L vara den räta linjen från (x_1,y_1) till (x_2,y_2). Visa att
$$\tfrac{1}{2}\int_L -y\,dx + x\,dy = \tfrac{1}{2}\,(x_1y_2 - x_2y_1) \qquad (2\text{ p})$$

b) Antag att hörnen för en enkel sluten polygon som är orienterad moturs ligger i punkterna (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) och låt $x_{n+1}=x_1$, $y_{n+1}=y_1$. Visa att den av polygonen inneslutna arean är
$$A = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i). \qquad (2\text{ p})$$