Institutionen för matematik
KTH

Förslag till lösningar till Tentamen i differentialkalkyl II, 5B1103/Del 2 för T1 och 5B1107 för F1,
Tisdagen den 24 april 2001, kl. 14.00–19.00

1. Vi skriver $f(x, y, z) = xyz + x^2 - 2y^2 + z^3 - 14$ och får att
$$\mathrm{grad} f = (yz + 2x, xz - 4y, xy + 3z^2),$$
vilket ger $\nabla f(5, -2, 3) = (4, 23, 17)$. Ekvationen för tangentplanet genom (x_0, y_0, z_0) är $\nabla f(x_0, y_0, z_0)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$ vilket i detta fall ger
$$4 \cdot (x - 5) + 23 \cdot (y + 2) + 17 \cdot (z - 3) = 0.$$
Svar. Tangentplanets ekvation är $4x + 23y + 17z - 25 = 0$.

2. Linjen som går genom $(0, 0)$ och $(1, 1)$ har ekvationen $y = x$ ($x = y$) och linjen genom $(1, 1)$ och $(2, 0)$ har ekvationen $y = 2 - x$ ($x = y - 2$). Vi får
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(1 + x + y)^2} = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} \frac{dx}{(1 + x + y)^2}$$
$$= \int_0^1 dy \left[-\frac{1}{1 + x + y}\right]_y^{2-y} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + 2y} - \frac{1}{3}\right) dy$$
$$= \left[\frac{1}{2} \ln|1 + 2y| - \frac{1}{3} y\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2} - \frac{1}{3}.$$

3. $F = F(u, v)$ är en godtycklig differentierbar funtion på $\mathbb{R}^2$. För $u = (x, y, x) = x^k F\left(\frac{z}{x}\right)$ är
$$\frac{\partial u}{\partial x} = kx^{k-1}F + x^k \left[F'_u \cdot \left(-\frac{z}{x^2}\right) + F'_v \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]$$
$$= kx^{k-1}F - x^{k-2}zF'_u - x^{k-2}yF'_v$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^k F'_v \frac{1}{x} = x^{k-1}F'_v,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^k F'_u \frac{1}{x} = x^{k-1}F'_u,$$

så att

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=$$
$$=kx^kF-x^{k-1}zF'_u-x^{k-1}yF'_v+yx^{k-1}F'_V+zx^{k-1}F'_u$$
$$=kx^kF=ku.$$

4. Inför funktionen $g(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2-36$. Enligt Lagrange multiplikatiormetod kan maximum och minimum antas i en punkt där g=0 och $\nabla g=0$ eller i en punkt där $\nabla f+\lambda\nabla g=0$ för något λ. Man ser att $\nabla g\neq 0$ där $g=0$. För punkter av det andra slaget får vi ekvationssystemet
$$\begin{cases}1+\lambda 2x=0\\ 1+\lambda 8y=0\\ 1+\lambda 18z=0\\ x^2+4y^2+9z^2=36\end{cases}$$
De tre första ekvationerna ger $x=-\frac{1}{2\lambda}$, $y=-\frac{1}{8\lambda}$ och $z=-\frac{1}{18\lambda}$. Insättning i den fjärde ekvationen ger nu $\lambda=\pm 7/72$, vilket ger två punkter $P_1=(x_1,y_1,z_1)=(-\frac{36}{7},-\frac{9}{7},-\frac{4}{7})$ och $P_2=(x_2,y_2,z_2)=(\frac{36}{7},\frac{9}{7},\frac{4}{7})$. Funktionsvärdena i dessa punkter är $f(P_1)=-7$ och $f(P_2)=7$.
   Svar. Maximum är 7 och minimum är - 7.

5. Låt $P(x,y)=(x-y)/(x^2+y^2)$ och $Q(x,y)=(x+y)/(x^2+y^2)$. Man verifierar att utom då $(x,y)=(0,0)$ gäller att $\partial Q/\partial x=\partial P/\partial y=(y^2-2xy-x^2)/(x^2+y^2)^2$. I det enkelt sammanhängande området Ω, som defineras av $\Omega=\{(x,y):y>\min(x,-x)\}$ är därför integralen oberoende av vägen. Vi väljer därför som integrationsväg i stället för γ den orienterade halvcirkeln γ_1 med medelpunkt i $(0,0)$, som går från $(2,0)$ till $(-2,0$ i det övre halvplanet. γ_1 kan parametriseras som
$$\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$$
där $0\leq t\leq\pi$ Vi får
$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy=\int_{\gamma_1}P\,dx+Q\,dy=[x=2\cos t,y=2\sin t]$$
$$=\int_0^\pi\left[\frac{2\cos t-2\sin t}{4}\cdot(-2\sin t)+\frac{2\cos t+2\sin t}{4}\cdot 2\cos t\right]dt$$

$$= \int_0^{\pi} 1 \; dt = \pi.$$

Svar Integralens värde är π.

6. Integralen

$$I = \int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx$$

kan tolkas som en dubbelintegral över området $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y, \; 0 \leq y \leq \pi$. Genom att integrera först med avseende på x får man

$$I = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{y} \frac{\sin y}{y} \, dx \right) \, dy = \int_0^{\pi} \sin y \, dy = [-\cos y]_0^{\pi} = 2.$$

Svar. Integralens värde är 2.

7. Sätt $x = 1 + h$, $y = 1 + k$. Vi får då

$$f(1 + h, 1 + k) = (1 + h) \exp\{(1 + h)^3 \, (1 + k)^3\}$$
$$= (1 + h) \exp\{(1 + 3h + 3h^2 + O(h^3))(1 + 3k + 3k^2 + O(k^3))\}$$
$$= [e^u = 1 + u + \tfrac{1}{2}u^2 + O(u^3)]$$
$$= (1 + h) \, e \, \big(1 + 3h + 3k + 3(h^2 + k^2) + 9hk + \tfrac{1}{2}(3h + 3k)^2 + O(r^3))\big)$$
$$= e(1 + 4h + 3k + 3h^2 + 3hk + 3h^2 + 3k^2 + 9hk + \tfrac{1}{2} \cdot 9h^2 + 9hk$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cdot 9k^2 + O(r^3))$$
$$= e(1 + 4h + 3k + \tfrac{21}{2}h^2 + 21hk + \tfrac{15}{2}h^2) + O(r^3)$$

där $r = \sqrt{h^2 + k^2}$.

Svar. Taylorutvecklingen till andra ordningen är

$$e(1+4(x-1)+3(y-1)+\tfrac{21}{2}(x-1)^2+21(x-1)(y-1)+\tfrac{15}{2}(y-1)^2).$$

8. Låt $\mathbf{F} = (y, z, x)$. Låt oss preliminärt tilldela C den orientering som gör kurvan till rand till den plana orienterade yta Σ som ges av skärningen mellan klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ och planet $x + y + z = 0$ med normalvektor $(1, 1, 1)$. Enligt Stokes sats är

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS =$$

$$\iint_{\Sigma} (1, 1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \, dS = \sqrt{3}\mathrm{area}(\Sigma) = \sqrt{3}\pi a^2,$$

vilket är det resultat som efterfrågas.

Vi hade tydligen valt rätt orientering. Alternativt kan denna orientering uttryckas enligt följande: Det är den orientering som gör att projektionen av C på (x, y)-planet omlöps moturs då C genomlöps.

9. Kalla den givna kroppen K. Den sökta massan M är

$$M = \iiint_K \rho(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_K x^2\, dxdydz$$

P.g.a. symmetri får vi att

$$M = \frac{1}{3} \iiint_K (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$$

Efter införande av rymdpolära koordinater (observera att Jacobideterminanten är $r^2 \sin\varphi$) får vi

$$M = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi \int_1^a r^4\, dr$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^2 [-\cos\varphi]_0^{\pi/2} = \frac{31}{30}\pi.$$

Svar. Massan är $\frac{31}{30}\pi$ massenheter.

10. Efter införande av polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ kan vi skriva

$$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2} = \frac{r\cos\theta + r\sin\theta}{1 + r^2} = h(r)k(\theta)$$

där $h(r) = r/(1 + r^2)$ och $k(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$. Eftersom f växlar tecken nära $(0, 0)$ kan inte $(0, 0)$ vara extrempunkt för f. En extrempunkt för $f(x, y)$ måste då svara enentydigt mot en extrempunkt för $g(r, \theta) = h(r)k(\theta)$ och i en sådan punkt måste $\nabla g = (0, 0)$. Vi får

$$\begin{cases} g'_r = h'(r)k(\theta) = \frac{1-r^2}{(1+r^2)}(\cos\theta + \sin\theta) = 0 \\ g'_\theta = h(r)k'(\theta) = \frac{r}{1+r^2}(-\sin\theta + \cos\theta) = 0. \end{cases}$$

Då $r > 0$ har detta system som enda lösningar $(r_1, \theta_1) = (1, \pi/4)$ och $(r_2, \theta_2) = (1, 5\pi/4)$. I Cartesiska koordinater ges punkterna av $P_1 = (x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ och $P_2 = (x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ och $f(P_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(P_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Observera vidare att eftersom $|\cos\theta + \sin\theta| \leq 2$ och $h(r)$ är avtagande för $r > 1$ gäller

$$|f(x, y)| \leq \frac{r}{1 + r^2} 2 \to 0 \qquad r \to \infty$$

Välj R så stort att $|f(x, y)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ för $|(x, y)| \geq R$. På den kompakta mängden $B_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ måste f anta minimum och maximum. Dessa måste enligt valet av R antas i det inre av B_R och är då också globala maxima och minima. Punkterna där max och min antas måste vara kritiska punkter och enda kandidater är P_1 och P_2. Vi ser att f har globalt maximum i P_1 och globalt minimum i P_2. Detta ger nu också lösningen på a): Eftersom P_1 ger globalt maximum och P_2 ger globalt minimum är de också lokala extrempunkter.

Svar. a) Punkterna $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ och $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ är lokala max- respektive minpunkter. b) Funktionens största och minsta värden är $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

11a) Den räta linjen mellan (x_1, y_1) och (x_2, y_2) kan i parameterform skrivas

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

Vi får

$$\frac{1}{2}\int_L -y\,dx + x\,dy = [dx = (x_2 - x_1)dt, dy = (y_2 - y_1)dt]$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 -\left(y_1 + (y_2 - y_1)t\right)(x_2 - x_1)\,dt$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(x_1 + (x_2 - x_1)t\right)(y_2 - y_1)\,dt = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

11b) Låt linjen från (x_i, y_i) till (x_{i+1}, y_{i+1}) betecknas med L_i, $i = 1, \ldots, n$. Vi får enligt a) att

$$\frac{1}{2}\int_{L_i} -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

Låt Ω beteckna det inneslutna området och $\gamma = L_1 + \cdots + L_n$ dess rand. Enligt Greens formel gäller att

$$\frac{1}{2}\int_\gamma -y\,dx + x\,dy = \int_\Omega 1\,dxdy = \mathrm{area}(\Omega)$$

Vi får därför att

$$\mathrm{area}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$