Institutionen för matematik
KTH
Diff. & Trans. II, del 1, 5B1202 för F2
Michael Benedicks

Inlämningsuppgift 3, Diff. & Trans. II, del 1, 5B1202 för F2
Inlämnas den 21 november 2001

1. Låt $x_1 = y$ och $x_2 = y'$. Då svarar differentialekvationen av andra ordningen

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{i}$$

mot systemet

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -q(t)x_1 - p(t)x_2. \end{cases} \tag{ii}$$

Visa att om $\mathbf{x}^{(1)}$ och $\mathbf{x}^{(2)}$ utgör en mängd av fundamentallösningar till (ii) och y_1 och y_2 är två linjärt oberoende lösningar till (i) så gäller att $W[y_1, y_2] = c\ W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}]$ där c är en konstant som är skild från 0. (Wronskideterminanten $W[y_1, y_2]$ för en linjär homogen differentialekvation av andra ordningen finns definierad i kap 3.2 i Boyce diPrima (uppl. VII).)

Ledning. Observera att $y_1(t)$ och $y_2(t)$ måste vara linjärkombinationer av $x_{11}(t)$ och $x_{12}(t)$

2. Betrakta systemet av differentialekvationer

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

a) Finn den allmänna lösningen till systemet och beskriv beteendet för lösningen då $t \to \infty$.

b) Rita ett riktningsfält och plotta några lösningstrajektorier till systemet.

3. Betrakta systemet av differentialekvationer

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(a) Bestäm egenvärdena i termer av α

(b) Finn det kritiska värdet (de kritiska värdena) där den kvalitativa naturen av fasporträttet för systemet ändras.

(c) Rita ett fasporträtt för ett värde på α något under och för ett något över varje kritiskt värde.

4. Betrakta den elektriska kretsen i Boyce-diPrima, VII:e upplagan, Problem 7.6.26. Denna krets beskrivs av systemet av differentialekvationer

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

(a) Visa att egenvärdena är reella och lika om $L = 4R^2C$.

(b) Antag att $R = 1$ ohm, $C = 1$ farad, och $L = 4$ henry. Antag också att $I(0) = 1$ ampere och $V(0) = 2$ volt. Finn $I(t)$ och $V(t)$.

5. Finn den allmänna lösningen till följande system av differentialekvationer

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}.$$